Rupturas no Estatuto Matemático dos Números Negativos

Gert Schubring
Tradução / **Rosa M. Mazo Reis**

Introdução

Os números negativos constituem um exemplo instrutivo para os processos de desenvolvimento de conceitos matemáticos. A partir de noções empíricas, bem adaptadas à prática da vida cotidiana, foram formados conceitos teóricos nos quais não se nota mais uma conexão com as bases históricas e que constituem ferramentas científicas importantes. Mas esses conceitos apresentam grandes dificuldades de aprendizagem. Como é sabido, enquanto é possível representar os números naturais por objetos ou por modelos empíricos, os números negativos não "existem", no mesmo sentido, na vida cotidiana. Assim a didática não pode ignorar o caráter teórico desta noção matemática que quase todos os estudantes de ensino fundamental escolar devem agora aprender. Os números negativos apresentam, portanto, um desafio à didática. Como abordar a passagem das grandezas aos números no processo de aprendizagem escolar?

Percorrendo algumas publicações recentes sobre aprendizagem dos números negativos, parece-me que a didática camufla mais ou menos sistematicamente a presença de um obstáculo a vencer. Notei duas tendências para lidar com a dificuldade: uma nega o caráter teórico do conceito de número negativo e reduz esse conceito às noções empíricas, diretamente acessíveis à experiência cotidiana, a outra fala apenas de grandezas, quando se trata das séries iniciais do ensino fundamental, enquanto supõe a existência dos números negativos a partir das séries finais do ensino fundamental: assim, a passagem das noções concretas às noções abstratas fica identificada, seja com a segregação escolar, seja com a tentativa de uma certa "maturidade de espírito"; nos dois casos, identifica-se com condições realmente externas ao processo didático.

Dentre as publicações recentes[2], um caso revelador para relacionar estas duas tendências é um artigo de G. Bélanger (1984): o autor recusa-se a relegar a introdução dos números negativos para o final do fundamental — como é recomendado no programa de seu país (o Canadá), devido ao conceito matemático bastante sofisticado (das classes de equivalência), necessário para justificar a nova operação — e sustenta que o ensino dos números negativos deva ser ministrado desde as séries iniciais do fundamental, mas apoiando-se sobre um reducionismo bem expresso no enunciado do seu objetivo principal:

"Permitir aos alunos que tomem consciência da existência dos números inteiros relativos na vida e que compreendam sua utilidade." (p.7; o grifo é meu, G. S.).

O que diz a pesquisa em didática sobre a história dos números negativos? Glaeser (1981) foi o primeiro, a meu ver, a estudar a recusa dos números negativos como um problema não da "pré"-história, mas como um problema relativamente atual: tanto para a Matemática quanto para a Didática[3]. Apesar de notar as rupturas que apareceram no desenvolvimento histórico, Glaeser se surpreende ao constatar que a regra dos sinais (sobre a qual ele centra seu estudo) tenha sido capaz de suscitar tantas dificuldades para os matemáticos e para os didatas.

Abordarei essa questão sob um outro ângulo: o das controvérsias históricas em torno da existência dos números negativos. Tentarei também colocar em evidência os enraizamentos culturais das epistemologias subjacentes a cada posição, a fim de delimitar melhor a natureza das rupturas em questão.

De fato, nesta história, é a própria existência dos números negativos, mais do que a regra dos sinais, que gera o questionamento, seja na Matemática ou na Didática. Por outro lado, a regra dos sinais sempre constitui um verdadeiro obstáculo para os alunos. Se isso ocorre, é sem dúvida porque os professores tentaram por muito tempo (e ainda tentam) demonstrar esta regra. Lembremos que só no final do século XIX é que a didática percebeu, a partir do "princípio da permanência" de H. Hankel[5], que não podemos demonstrar esta regra e que ela não é nada mais que uma convenção.

É conveniente ilustrar brevemente a pertinência da história dos números negativos na França, através de alguns fatos desta história. Em primeiro lugar, a própria denominação números relativos, que é empregada para o conjunto dos números positivos e negativos, remete a L. Carnot e à sua refutação do estatuto matemático dos números relativos. Aliás, em torno desta posição, cerrou fileiras, quase que por unanimidade, o público francês. Por outro lado F. C. Busset (1843)(6), queixando-se do fracasso do ensino da Matemática na França e da marginalização da matemática na cultura, encontra todas as causas desses males reunidas em uma só: a admissão da existência das quantidades negativas. Ele chega a ficar chocado com a discussão sobre saber "se existem quantidades menores que nada"(7). Assim, com o objetivo de melhorar o ensino da Matemática e os livros didáticos, Busset preconiza a revisão da "teoria dos números" e, mais precisamente, de tudo que diz respeito à operação de subtração. Achamos, no livro de Busset, o enunciado de um critério de qualidade para redação dos livros didáticos: *"Os tratados da Ciência... (não devem estar) em desacordo com as noções comuns"* (Busset 1843, p.47). Em resumo, ao invés de elevar a cultura geral, deve-se reduzir os conceitos teóricos às noções da vida prática. Aí está uma expressão inequívoca do reducionismo a que nos referimos mais acima.

Minha hipótese principal é que as controvérsias em torno da existência dos números negativos se explicam, sobretudo, pelo obstáculo que há em passar da noção de grandeza, que é de natureza substancial (ver mais adiante), à de número, que é essencialmente teórica(8). Utilizo aqui a relação grandeza — número para revelar as razões epistemológicas da negação da existência dos números negativos.

Analisei o desenvolvimento dos conceitos sobre números negativos depois do século XVII, época de aceitação destes números na Matemática (segundo as assertivas da historiografia). Conduzi a análise em forma de comparação entre Inglaterra, França e Alemanha (os três países europeus com as maiores comunidades matemáticas), utilizando um número muito grande de documento: monografias de pesquisa matemática, tratados sobre a filosofia matemática, tratados históricos, fontes de arquivo, reflexões didáticas, mas sobretudo os livros didáticos. No que concerne aos livros didáticos, preocupei-me em não me restringir às partes que tratavam explicitamente dos números negativos, mas procurei considerar também as partes referentes a suas "aplicações", analisando os manuais de Aritmética, Álgebra, Geometria Analítica, Trigonometria etc, dos quais só posso citar aqui alguns trabalhos paradigmáticos. Não posso explicar aqui o problema bastante complexo de analisar um tão grande número de manuais; para isto, remeto a outras publicações (Schubring 1986b 1987). Indico apenas que, para a França, escolhi como dados básicos os manuais de Aritmética e Álgebra adotadas pelas escolas de ensino médio entre 1795 e 1845. No âmbito deste artigo, não posso apresentar o caso inglês (ver, como apresentação introdutória, a tese de Pycior 1976, pp.42-85), e restrinjo-me a apresentar a discussão, na França e na Alemanha, sobre a natureza dos números negativos, a partir da metade do século XVIII até a metade do século XIX, e as diversas causas da recusa desses números. Começo por um breve resumo da história, matemática, destes números.

Breve História dos Números Negativos Desde suas Origens até o Século XVIII[9]

Encontramos na Antigüidade e na Idade Média oriental abordagens distintas e uma mesma resistência em relação aos números negativos.

Entre os gregos, Diofanto fala de quantidades subtraídas e explica a regra dos sinais. Mas ao mesmo tempo, não admite equações como $4 = 4x + 20$, porque sua solução é "absurda".

Na Índia, Bhaskara, no século XII, a respeito da equação do segundo grau: $(x/5 - 3)^2 + 1 = x$, com soluções $x_1 = 50$ e $x_2 = 5$ diz que ela "não é consistente", porque as pessoas não aceitam considerar os números negativos absolutos como -2. Os números positivos são chamados "propriedades" ou "bens", enquanto os números negativos são chamados "dívidas"; para um pedaço de uma reta, um valor negativo é associado ao seu sentido oposto.

Os matemáticos chineses utilizavam as quantidades negativas como meios intermediários no cálculo para resolução de problemas, mas essas quantidades não eram admitidas como soluções.

Também entre os árabes, não eram admitidas quantidades negativas; melhor dizendo, os matemáticos escolhiam, na Álgebra indeterminada, as constantes que garantissem a obtenção exclusiva de soluções positivas.

Na Europa da Idade Média, os números negativos podiam aparecer nos sistemas de equações lineares. Assim, em seu "Liber Abaci", Leonardo de Pisa considera a eventualidade de uma solução negativa, mas a rejeita como inválida. Por outro lado, utiliza valores intermediários negativos, que interpreta como dívidas. Em resumo, ele admite apenas os problemas nos quais é possível interpretar os valores negativos como algo de positivo.

Um manuscrito em provençal, datando de aproximadamente 1430 e recentemente descoberto, é o primeiro texto conhecido no qual um resultado negativo é admitido sem reservas: trata-se da resolução de um problema através de um sistema de cinco equações lineares; para uma das variáveis, a primeira solução negativa é $-10\ \frac{3}{4}$ (ver Sesiano 1984).

Por sua vez, Nicolas Chuquet (igualmente francês) admite soluções negativas para problemas abstratos (isto é, compreendendo números puros e não grandezas), onde um valor é considerado uma solução quando satisfaz a equação. Mais ainda, ele elabora os procedimentos para adicionar e subtrair tais números(10).

Passo ao século XVIII para fornecer algumas indicações sobre o estado mais avançado da ciência da época, como ponto de partida das análises que desenvolverei a seguir. O célebre manual de Álgebra de Euler, escrito em 1766, fornece-nos um modelo de admissão de um estatuto de entes matemáticos verdadeiros para os números negativos. Aqui, a subtração não é restrita ao caso específico onde o subtraendo é menor que o minuendo; Euler afirma sem reservas que $25 - 40 = -15$ e que os números negativos são menores que zero ("Nichts"). Ele chega a considerar as duas séries:

0, 1, 2, 3, 4, 5...

..., -4, -3, -2, -1, 0

para reuni-las sob um único conceito, o dos números inteiros (Euler 1940 pp.19 ss). Euler define também as quatro operações sobre esses números. Embora utilize a interpretação das quantidades como bens ou dívidas, é com o objetivo único de fornecer uma motivação ao cálculo feito com os números inteiros. Em Euler, estas quantidades concretas não servem como justificação ontológica.

O Estatuto dos Números Negativos, na França, de 1750 a 1850

Nos manuais franceses da segunda metade do século XVIII, o cálculo sobre quantidades está bem exposto, mas os números negativos conservam ainda um estatuto um pouco ambíguo. O exemplo da Enciclopédia é revelador.

Por um lado, há o artigo "negativo" escrito por d'Alembert. D'Alembert havia aliás criticado que a teoria das quantidades negativas não estava ainda perfeitamente esclarecida. Censurava o fato dos autores de manuais considerarem as quantidades negativas *"ora como abaixo de nada, noção absurda em si mesma*(11)*: ora como expressão de dívidas; noção muito limitada e, por isso, mesmo pouco exata"* (citado por Condillac 1981, p.299). Por outro lado, ele só admite as quantidades negativas como falsas posições que devem ser traduzidas para quantidades positivas:

"Desta maneira, as quantidades negativas indicam realmente num cálculo de quantidades positivas, mas que foram supostas numa posição falsa. O sinal – que se coloca diante de uma quantidade serve para reparar e corrigir um erro que foi feito na hipótese... Portanto, não existem de modo nenhum, realmente e absolutamente, quantidades negativas isoladas: –3 tomado abstratamente não apresenta ao espírito idéia alguma; mas se eu digo que um homem deu a um outro –3 escudos, isto quer dizer, numa linguagem inteligível, que ele lhe tomou 3 escudos" (Enciclopédia, v. 11, p. 73).

Esta concepção persistirá no século XIX, onde a encontramos em textos de Bezout, La Croix, Bourdon, e outros.

Por outro lado, encontramos igualmente na Enciclopédia uma aceitação das quantidades negativas, em pé de igualdade com as positivas, as duas servindo de noções fundamentais à Álgebra. Assim, o artigo "Quantidades (em Álgebra)" explica:

"As quantidades algébricas são positivas ou negativas. Chamamos de quantidade positiva aquela que está acima de zero, e que é precedida, ou se supõe que seja precedida, pelo sinal +, ...Quantidades negativas são aquelas que são consideradas como menos que nada, e que são precedidas pelo sinal –". (ibid. vol. 13, p.655).

Podemos supor que o autor deste artigo, o padre de La Chapelle, que era professor de Filosofia, tenha ensinado Matemática segundo essa concepção, em suas classes de Filosofia. De fato, há pelo menos um manual de Matemática que foi utilizado nas aulas de Filosofia (onde se davam os únicos cursos de Matemática oferecidos nas universidades francesas, na época), no qual eram admitidas as quantidades negativas:

"As quantidades precedidas pelo sinal + são chamadas de positivas; aquelas que são precedidas pelo sinal – são chamadas de negativas: