

- Vocabulário e coerência na escrita.
- Referência bibliográfica.

A seguir, apresento parte dos relatos dos grupos. Os licenciandos trabalharam em grupo de, no máximo, quatro alunos e cada grupo tinha pelo menos uma torre. Normalmente não interfiro na formação dos grupos, mas considero importante o professor intervir nesta formação, principalmente em turmas com número grande de alunos, o que não foi o meu caso. As turmas de Prática de Ensino tem tido em média dezoito alunos por semestre. Ao todo foram utilizadas 5 (cinco) aulas e os alunos deveriam relatá-las em grupo (diário do grupo) e individualmente (diário individual).

Grupo 1

Nº de discos	Nº de movimentos	
1	1	
2	3	(3-1=2)
3	7	(7-3=4)
4	15	(15-7=8)
5	31	(31-15=16)
6	63	(63-31=32)
7	127	(127-63=64)

Tabela 1

Para descobrir a quantidade de movimentos a serem feitos (MT) para um determinado número de discos, basta somar a quantidade de movimentos anteriores (MA) com a quantidade de discos que queremos mover (MD): $MT = MA + MD$.

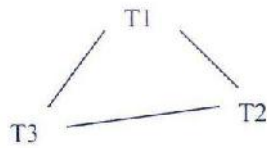
Fórmula para o movimento da torre com n discos (observe tabela 1). Seja a_n o número mínimo de movimentos com n discos. De acordo com a tabela vemos que:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$$

Resolvendo o sistema para a_n chegamos a fórmula que determina o número mínimo de movimentos: $a_n = 2^n - 1$

Estratégias para conseguir um número mínimo de movimentos.
 Considere



Se quisermos mover a pilha de T1 para T2 (sentido horário) então:

(1) se o número de discos for par, o primeiro disco deve ser colocado em T3 (sentido anti-horário).

(2) se o número de discos for ímpar, o primeiro disco deve ser colocado em T2 (sentido horário).

Obs.: Esta estratégia serve para o movimento das torres intermediárias também.

Grupo 2

...Para cada disco a mais que colocamos, o número de movimentos dobrava e aumentava em 1, como mostra o esquema abaixo:

Nº de discos	Movimentos numéricos necessários
1	1 ($x^2 + 1 = 3$)
2	3 ($x^2 + 1 = 7$)
3	7 ($x^2 + 1 = 15$)
4	15 ($x^2 + 1 = 31$)
5	31 ($x^2 + 1 = \dots$)
...	...
N	$x^2 + 1$

Grupo 3

...Variando o número de discos e tentando identificar qual o número que expressa o mínimo de movimentos necessários [...] passamos à tarefa de generalizar para um número n de discos. Veja os passos utilizados nesses raciocínios:

1º passo:

nº de discos	nº min. de mov.
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	?

2º passo:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 a_1 + 1$$

$$a_3 = 2 a_2 + 1$$

$$a_4 = 2 a_3 + 1$$

$$a_5 = 2 a_4 + 1$$

$$a_6 = 2 a_5 + 1$$

3º passo:

$$a_7 = 2 a_6 + 1$$

$$a_7 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$$

4º passo:

$$a_n = 2 (a_{n-1} + 1)$$

$n = \text{nº de discos}$

$a = \text{nº min. de mov.}$

5º passo:

$$a_7 = 2 a_6 + 1$$

$$a_7 = 2 (2 a_5 + 1) + 1$$

$$a_7 = 4 a_5 + 3$$

$$a_7 = 4 (2 a_4 + 1) + 3$$

$$a_7 = 8 a_4 + 7$$

$$a_7 = 8 (2 a_3 + 1) + 7$$

$$a_7 = 16 a_3 + 15$$

$$a_7 = 16 (2 a_2 + 1) + 15$$

$$a_7 = 32 a_2 + 31$$

$$a_7 = 32 (2 a_1 + 1) + 31$$

$$a_7 = 64 a_1 + 32 + 31$$

$$a_7 = 64 + 32 + 31$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2^{7-2} + 2^{7-3} - 1$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2 (2^{7-2}) - 1$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2^{7-1} - 1$$

$$a_7 = 2 (2^{7-1}) - 1$$

$$a_7 = 2^7 - 1$$

6º passo:

$$a_n = 2^n - 1$$

Grupo 4

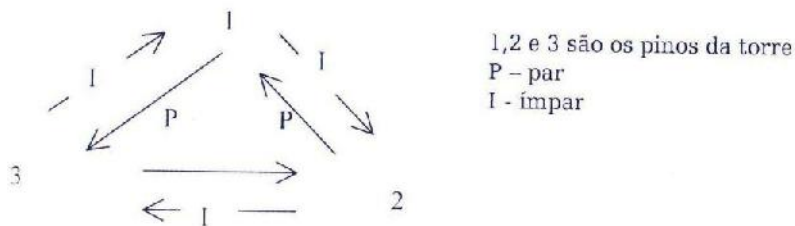
Quantidade de discos das torres(n)	Quant. de movimentos das peças nas torres							Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	Pç 7	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	0	31
6	32	16	8	4	2	1	0	63
7	64	32	16	8	4	2	1	127

- A quantidade mínima de movimentos das torres com n discos é igual a soma de uma P.G. finita de razão 2, 1º termo igual a 1 e com n^o de termos igual ao n^o de discos da torre.

- Ao movimentarmos o número de discos, a quantidade de movimentos de cada peça cresce em P.G. de razão 2, com 1º termo igual a 1.

- O n^o de movimentos de uma torre com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com $(n-1)$ discos acrescido de um movimento.

- Condições para os movimentos das peças para obtermos o mínimo possível. Consideramos as peças/discos numerados de 1 a 7. Dividimos a torre de Hanói conforme o esquema abaixo:



- as peças ímpares se movimentam seguindo a ordem crescente dos pinos partindo do n^o 1.

- as peças pares se movimentam seguindo a ordem decrescente dos pinos partindo do n^o 1.

- A tabela apresentada anteriormente forma uma matriz triangular inferior, com a diagonal principal contendo todos os termos igual a 1, apresentando 7 divisores do n^o 64

- O número de divisores de 64 contido na matriz é igual ao número de discos da torre de Hanói.

- A matriz é quadrada e de ordem 7.

1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
4	2	1	0	0	0	0
8	4	2	1	0	0	0
16	8	4	2	1	0	0
32	16	8	4	2	1	0
64	32	16	8	4	2	1

É interessante observarmos nos diários o objeto matemático “priorizado” por cada grupo e como os alunos vão desenvolvendo suas idéias e construindo o seu texto matemático⁵. Neste processo, ressalto a importância do desafio próprio do jogo e no trabalho em grupo, pois as discussões e as diferentes colocações de cada aluno enriquecem esta dinâmica e os diferentes estilos, o que não poderia deixar de ser: diferentes alunos, diferentes discussões, diferentes registros e diferentes conteúdos contextualizados.

Sem o objetivo de uma análise mais aprofundada destacarei algumas observações que considero relevante. A escrita bem organizada e detalhada do **grupo 3** mostra que os licenciandos conseguiram generalizar através de uma investigação apoiada na recursividade. O texto do **grupo 4** me chama atenção por sua análise considerando também a quantidade de movimentos de cada peça e como isso contribui para determinar o número total de movimentos. Ao observarem sobre o movimento de cada peça e disporem estas observações em forma de tabela, os licenciandos passam a centrar sua atenção na matriz que fica formada e fazem mais destaques sobre esta disposição. Além de construir um sistema de equações a partir do que observa na tabela o **grupo 3**, como o grupo 4, também construiu a estratégia para o número mínimo de movimentos a partir do sentido horário/anti-horário. Interessante também notar que o **grupo 2** se deu como convencido para determinar o número de movimentos apoiados no termo anterior sem perceber, por exemplo, a possibilidade de se encontrar o termo geral. Além de existirem licenciandos com dificuldade para encontrar e expressar a relação que determina o número mínimo de movimentos, também existem aqueles que são mais imediatos e se dão por convencidos a partir de cinco movimentos, por exemplo:

Nº de discos	Nº de movimentos
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
...	...
n	$2^n - 1$

⁵ Ver Lins e Giménez (1997).

É importante verificar o matematizar de cada licenciando e discutir com eles esse processo. Uma preocupação dos licenciandos é fazer comparações do tipo melhor ou pior e, então, enfatizo para eles o tempo todo que não é meu objetivo estabelecer comparações do tipo saber mais/menos, mas que eles percebam, analisem e respeitem o matematizar do seu companheiro e contribuam com a continuidade desse processo, pois ensino-aprendizagem é um processo contínuo de *aprender a aprender* e *aprender a ser*, fortalecido pelas relações interpessoais e não mera acumulação acrítica de conhecimentos.

Após o trabalho em pequenos grupos, no qual vou esclarecendo dúvidas, analisando processos de raciocínio utilizados pelos licenciandos e propondo questões, passamos a analisar os diários de cada grupo, ou seja, cada grupo analisa o texto do outro e, ao final, fechamos a discussão com toda a turma. Por exemplo, veja a observação do grupo 3 sobre o diário do grupo 1.

"A princípio discordamos com o tipo de referencial, horário e anti-horário, que o grupo usou. Só partimos para a prática (testamos na torre) e verificamos que funciona para n movimentos e n número de peças. Este fato não ocorreu em nenhum dos membros do nosso grupo, o que observamos que facilita em fazer o menor número de movimentos."

Podemos observar na escrita do grupo que além de compreenderem, inicialmente discordando do texto do outro o grupo, os licenciandos foram verificar se realmente aconteceriam as observações feitas. Alguns sentem necessidade de voltar ao jogo enquanto outros o fazem direto no papel. Além de se darem por satisfeitos, reconhecem a importância do referencial (sentido horário ou anti-horário) para determinar o número mínimo de movimentos. O que considero importante aqui é que a partir de um professor que faz este tipo de observação, o licenciando tem a oportunidade de verificar como pensaram os seus colegas. Estes diferentes momentos *escrita-reflexão-nova escrita* favorecem a matematização do futuro professor.

Vale destacar que os licenciandos encontram dificuldade na escrita, seja de um diário com idéias mais matemáticas ou não. Assim, a dinâmica de ler criticamente, recebendo e colocando questões, seja do próprio diário ou do(s) colega(s), é imprescindível, pois enriquece e propicia melhora no seu processo de escrita, na medida em que lê outro tipo de

texto, fazendo críticas com argumentos e discutindo-os com toda a turma. Neste momento ele assume o papel de professor na medida em busca compreender o que escreveu o seu amigo (aluno!) e coloca questões e, até mesmo, busca reconhecer suas dificuldades ou facilidades. Considero importante colocar o licenciando neste papel professor-aluno, constantemente.

A AULA SEGUINTE: UM DIÁRIO COLETIVO⁶

Além dos diários construídos coletivamente em algumas aulas, cada aluno possui o seu caderno de diário de campo que deverá ser entregue em data acordada desde o início da disciplina. Neste caderno o licenciando relata cada aula. Recolho todos os diários na data marcada, faço a leitura de cada um e as devidas anotações (perguntas, elogios, pedidos de esclarecimento,...). Em seguida, monto o diário coletivo colocando as idéias dos licenciandos em “relativa” seqüência. Na aula seguinte, distribuo aos alunos para uma leitura conjunta, neste momento o licenciando pede ou dá esclarecimento, discorda, concorda e sugere alteração. Este momento é muito importante, pois além do licenciando ficar interessado em “se localizar” no texto, fica motivado e à vontade para a discussão. Um ponto importante do diário coletivo é que o licenciando pode identificar as idéias de seus colegas, ao passo que no caderno individual as colocações ficam apenas entre licenciando e professor. Os erros gramaticais não interferem na avaliação, porém são comentadas e feitas as devidas correções nos próprios diários dos alunos.

A seguir, uma parte do diário que organizei a partir dos textos individuais dos licenciandos. Como pode ser visto, além das idéias “mais matemáticas”, destacadas nos relatos anteriores, eles também acrescentam reflexões sobre o processo ensino-aprendizagem de Matemática, fruto de leituras e discussões que ocorrem nesta disciplina. A fala de cada licenciando é colocada em um tipo de letra e neste exemplo foi colocada apenas uma fala de cada licenciando.

“... A Educação é política, portanto trabalha valores e ideologias de quem planeja. Sobre o processo educativo, foi falado da relação entre ensino-aprendizagem-avaliação e para que se tenha efeito positivo nas inovações é necessário que o professor mude sua forma de

⁶ Utilizei aqui a idéia da amiga Rosa M. Mazo Reis, desenvolvida com professores do curso CAPES-FAPERJ da USU.

ensinar. A educação tradicional enfatiza o formalismo, o rigor e respostas certas através de testes e provas escritas. Essa avaliação, segundo o grupo, serve para avaliar a capacidade de reprodução dos procedimentos em sala de aula. Será que eu tenho sido uma autoridade do saber ou uma das autoridades do saber em sala de aula, será que eu tenho dado condições a que os alunos raciocinem ou eu como professor tenho raciocinado por ele? Preciso melhorar! Uma aula inovadora, além do professor existe outras fontes de informação, como instrumentos didáticos, jogos, um ambiente mais descontraído, dinâmico e atrativo por parte dos alunos. O aluno cria e o professor aprimora junto com o aluno. Nesse processo de construção o conhecimento do professor quase sempre deve funcionar como observador. Cabe ao professor facilitar ao máximo as idéias que surgem com a apresentação dos problemas e verificar se estas idéias estão coerentes. O conteúdo curricular é formado de atitudes, conceitos e procedimentos. O seminário tinha como finalidade apresentar diferentes formas de avaliação em Matemática e grupo falou e mostrou alguns exemplos como: relatório e ensaios; produtos gerados pelos alunos; teste em duas fases; pequenas tarefas orais e outras. ... os alunos puderam concluir que as formas e instrumentos de avaliação eram válidos e que caberia a cada professor saber como usá-los. O professor apresentou o jogo Torre de Hanói e deixou que os alunos tentassem resolver o jogo, assim terminou a aula. Foi proposto que teríamos que analisar o número mínimo de movimentos para transferirmos todos os discos de uma torre para outra, de forma que o disco maior sempre fique embaixo do menor. Observando os 5 primeiros casos, fizemos infêrencia, através de um processo indutivo que com n discos dispomos de um número mínimo de movimentos igual a $2^n - 1$. O número mínimo de movimentos é sempre ímpar, não importando o número de discos. O intervalo entre os números mínimos de disco dá uma P.G. de razão 2. Outras observações que tiramos da tarefa são: utilizando as torres em forma triangular, vimos que para um número n de discos, temos que o número de movimentos do disco menor é igual a $2^n - 1$, onde o mesmo gira num sentido único (horário ou anti-horário); fixando uma das torres e um sentido de orientação para o disco menor teremos que, para um número par de discos o resultado final dará numa torre diferente do que para