

como expressão de um "compromisso", a designação  $X, X'$  e  $Y, Y'$ , respectivamente para os quatro eixos. Designa-se os pontos pelas letras nas figuras, mas não pelos números.

23. Não gostaria de excluir a possibilidade de que Grassmann tenha visto o livro de Mourey, pois encontramos este livro já citado, em 1834, em um livro sobre equações algébricas de M.W. Drobisch, matemático e filósofo em Leipzig e bem conhecido à época.

24. O termo "quantidade" não representa apenas a concepção tradicional da Matemática ("a Matemática é a ciência das quantidades", Encyclopédie, vol. 13, 1765, p. 653), donde o caráter "geral" (no sentido de Bachelard) deste conceito – mas ele implica também uma conotação filosófica: ele faz, ao mesmo tempo, alusão ao par de características filosóficas qualidade-quantidade.

25. De fato, as definições respectivas de "quantidade" e de "grandeza" na Enciclopédia mostram que os dois termos poderiam ser quase utilizados um em lugar do outro. Mesmo hoje em dia, não se distinguem sempre claramente estes dois termos (em alemão não há duas palavras diferentes como em francês (e português)). Para uma discussão didática da noção de "grandeza" e de seu contexto, ver Rogalski, 1979.

26. A emersão do conceito de valor absoluto entre os matemáticos é assaz tardia. O conceito não estava ainda claro, e mesmo definido, no início do século dezenove. Ver o estudo de A. Duroux (1983) sobre os obstáculos ligados a este conceito, estudo que contém também visões sobre a história do conceito.

27. Bachelard comenta: "o pensamento científico moderno empenha-se para especificar, limitar, purificar as substâncias e seus fenômenos. Procura o fermento específico, objetivo, e não a fermentação universal... Se tudo fermenta, a fermentação acaba sendo um fenômeno sem grande interesse. Convém, pois, definir o que não fermenta, o que pode impedir a fermentação" (Bachelard, 1996, p. 89-90).

#### BIBLIOGRAFIA

- ARCAVI A., BRUCKHEIMER M. EN-ZVI R. *May be a Mathematics Teacher can Profit from the Study of the History of Mathematics*. For the learning of Mathematics, 3.1, 30-37. 1982.
- BACHELARD G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, tradução de Estela dos Santos abreu de *La formation*

- de l'esprit scientifique* Paris: J. Vrin 1975. 1996.
- BELANGER G. *Une approche intuitive pour l'enseignement des entiers relatifs*. Instantanés Mathématiques, XXI.2, 5-12. 1984.
- BIOT J. B. *Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre*. Paris, Bernard. Seconde édition. 1805.
- MAINE de BIRAN. *Mémoire sur les rapports de l'idéologie et des mathématiques*. Oeuvres, éd. P. Tisserand, Paris: Alcan, T. III, 1924, 1-26. 1803.
- BOURLET C. *Leçons d'algèbre él; émentaire*. In: Cours complet de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. Darboux. Paris, A. Colin. 1896.
- BROUSSEAU G. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2. 164-198. 1983.
- BUSSE F. G. *Vergleichung zwischen Carnots und meiner Ansicht der Algebra und unserer beyderseitig vorgeschlagenen Abhelfung ihrer Unrichtigkeit*. Freyberg, Craz und Gerlach. 1804.
- BUSSET F. C. *De l'enseignement des mathématiques dans les collèges, considéré sous le double point de vue des prescriptions réglementaires de l'Université et des principes fondamentaux de la science*, Paris, Chamerot. 1843.
- CARNOT L. *De la Corrélation des Figures de Géométrie*. Paris, Duprat, an IX. 1801.
- CARNOT L. *Géométrie de Position*. Paris, Duprat, an IX. 1803.
- CAUCHY A. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Première partie, Analyse algébrique. Paris, Imprimerie Royale. 1821.
- CLASON R. G. *Number Concepts in Arithmetic Texts of the United States from 1880 to 1966*, with related psychological and mathematical developments. Ph. D. Thesis University of Michigan. Ann Arbor, University Microfilms. 1968.
- CONDILLAC E. B. *La Langue des Calculus*, Texte établi et présenté par Anne-Marie Couillet. Introduction et notes de Sylvain Auroux. Lille, Presses Universitaires. 1981.
- GROWLY M. L., DUNN K. A. *On Multiplying Negative Numbers*. Mathematics Teacher, 78, 252-256. 1985.
- DESTUTT de TRACY A. L. C. *Mémoire sur la faculté de penser*. Mémoires de morale et politique (institut), an 6, 283-450. 1798.

- DESTUTT de TRACY A. L. C. *Elements d'Idéologie*. Première partie. Idéologie proprement dite. Second édition, Paris, Courcier, an XIII. 1804.
- DIESTERWEG W. A. *Beiträge zu der Lehre von den POSITIVEN und NEGATIVEN GRÖSSEN*. Bonn, Habicht. 1831.
- DROBISCH M. W. *Grundzuege der Lehre von den hoeheren numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften*; e. Suppl. zu d. Lehrbuechern d. Algebra u. Differentialrechnung. Leipzig, Voss. 1834.
- DUROUX A. *La valeur absolue*; difficultés majeures pour une notion mineure, petitxnuméro 3, 43-67. 1983.
- Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des métiers. Article Grandeur («O»), t. 7 (1757), 855; Négatif («O»), t. 11 (1765), 72-74; Quantités, en terme d'algèbre («E»), t.13 (1765), 655.
- EULER L. *Vilständige Anleitung zur Algebra*. Leipzig, Reclam jun. 1940. 1766.
- FÖRSTEMANN W. A. *Ueber den Gegensatz positiver und negativer Größen*. Nordhausen. 1817.
- FRANCOEUR L. B. *Cours Complet de Mathématique Pures*. Tome premier, seconde édition. Paris, Courcier. 1819.
- GERGONNE J. D. *Réflexions sur le même sujet* (i. e., La théorie des quantités négatives). Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, 4, 6-20. 1814.
- GLAESER G. *Epistemologie des nombres relatifs*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 2.3, 303-346. 1981.
- GLAESER G. *A propos des obstacles épistémologiques*. Réponse à Guy Brousseau. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 5.3, 229-234. 1984.
- GRASSMANN H. G. *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. Leipzig, Wigand. 1984.
- HECKER P. J. *Über den gewöhnlichen Vortrag der Anfangsgründe der Lehre von den entgegengesetzten Größen*. (Weihnachtsprogramm schrift der Universität Rostock). Rostock. 1799.
- ITARD J. *L'évolution de l'enseignement des mathématiques en France de 1872 à 1972*. Essais d'Histoire des Mathématiques, réunis et introduits par R. Rashed. Paris, Blanchard 1984, 353-359. 1972.
- KÄSTNER A. G. *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv*. Der mathem.

- Anfangsgründe Iten Theils erste Abth. Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht, Fünfte vermehrte Auflage, 1792. 1755.
- KANT I. *Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen*. Werkausgabe Band II, Vorkristische Schriften bis 1768: 2, Hg. W. Weischedel, Frankfurt am Main. Suhrkamp, 1977, 777-819. 1763.
- KLOSTERMANN J. *Le carré d'une quantité négative est négatif et non positif*. St. Petersbourg. 1804.
- KLOSTERMANN J. *Démonstration que la règle: moins multiplié par moins donne plus, induit en erreur et qu'elle ne s'accorde pas avec les opérations de l'esprit humain*. (Avec permission de la censure). St. Petersbourg. 1805.
- KLÜGEL G. S. *Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen*. Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 1, 3: 309-319, et 4: 470-48. 1795.
- LACROIX S. F. *Eléments d'algèbre, à l'usage de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations*. Seconde éditions, revue et corrigée. Paris, Duprat, an IX; septième éditions, revue et corrigée, Paris. Courcier, 1808. 1800.
- MAASS J. G. E. *Grundriss der reinen Mathematik zum Gebrauche bei Vorlesungen und beim eigenen Studium*. Halle, Renger.
- MARIE M. *Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires, et interprétation des solutions imaginaires en géométrie*. Paris, Carillan-Goeury et V<sup>or</sup> Dalmont. 1796. 1843.
- METZ A. *Handbuch der Elementar-Arithmetik in Verbindung mit der Elementar-Algebra*. Zum Gebrauche für Anfänger. Bamberg/Würzburg, Göbhardt. 1804.
- MOUREY C. V. *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*. Dédié aux amis de l'évidence. Paris, Mallet-Bachelier, deuxième édition 1861. 1828.
- NOVY L. *Origins of Modern Algebra*. Leyden/Prag: Nijhoff. 1973.
- PYCIOR H. M. *The role of Sir William Rowan Hamilton in the development of British modern algebra*. Ph. D. Thesis Cornell University. University Microfilms, Michigan. 1976.
- ROGALSKI J. *Quantités physiques et structures numériques*. Mesures et quantifications: les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes. Bulletin de l'APMEP numéro 320, 58, 563-586. 1979.

- SAURI J. *Institutions Mathématiques*, servant d'Introduction à un Cours de Philosophie à l'usage des Universités de France. Paris, deuxième édition 1772. 1770.
- SCHUBRING G. *Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques*, particulièrement en France et en Prusse. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 5.3, 343-385. 1984.
- SCHUBRING G. *Lápport des recherches en histoire de l'enseignement des mathématiques à la didactique des mathématiques*. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. IMAG Grenoble, année 1984-1985. (1986a). 1986.
- SCHUBRING G. *L'Histoire de l'Enseignement des Mathématiques comme sujet de recherches en Didactique des Mathématiques*. IREM UNIVERSITÉ Paris VII, cahier de didactique des mathématiques. Numéro 26. (1986b). 1986.
- SCHUBRING G. *On the methodology of analysing historical text-books* – The oeuvre of Lacroix as textbook autor. Forthcoming. 1987.
- SESIANO J. *Une Arithmétique médiévale en langue provençale*, *Centaurus*, 27, 26-75. 1984.
- SESIANO J. *The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics*, *Archive for History of Exact Sciences*, 32.2, 105-150. 1985.
- STEIN J. P. W. *Die Elemente der Algebra*. Trier: Lintz, Erster Cursus. 1828, Zweiter Cursus. 1829. 1828-1829.
- WILCKENS H. D. *Die Lehre von den entgegengesetzten Größen in einem neuen Gewande*. Braunschweig. 1800.

# Movendo Discos, Construindo Torres e Matematizando com Futuros Professores<sup>1</sup>

**MARCELO ALMEIDA BAIARRAL**

## **INTRODUÇÃO**

A formação de professores, tanto a inicial como a continuada, constitui desafio permanente das instituições formadoras e cada vez mais estão em evidência os processos de formação docente. O processo de matematização<sup>2</sup> tem sido o meu foco com licenciandos em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro<sup>3</sup>. Considero matematizar como um processo construtivo, fortalecido pela interação pessoa/grupo no qual as idéias matemáticas constituem e são constituídas de significações, a partir do que "falam" (gesticulam, desenham ou qualquer outra maneira de representar e comunicar suas idéias) meus alunos. Nesta perspectiva, complementa (Powell, 1996) matematizar é um processo natural, inerente ao ser humano e que deve ser propiciado desde a infância e depende da capacidade que todos os seres humanos têm, de tomar consciência de um evento ou acontecimento.

Assim, o que pretendo aqui é contribuir com esta reflexão relatando uma experiência como professor da disciplina de Prática de Ensino de Matemática. A disciplina, com carga horária teórico-prática de 60 horas utiliza, dentre outras estratégias, propor diferentes jogos como detonadores do processo de matematização e refletir sobre a prática avaliativa em Matemática. Integrando jogo, processo ensino-aprendizagem de Matemática e avaliação, enfatizando a utilização de diários de campo (individuais e coletivos) como instrumentos avaliativos potencializadores, segue minha reflexão.

---

<sup>1</sup> Agradeço as contribuições e colocações do amigo Arthur Powell (Rutgers University, USA).

<sup>2</sup> Reflexão propiciada com Powell (1996).

<sup>3</sup> BR 465 km 7 CEP. 28970-000 Seropédica-RJ <http://www.ufrj.br>

## O JOGO E A PRÁTICA EM SALA DE AULA

Por ser o jogo uma atividade inata às crianças, o professor deve aproveitar o seu caráter lúdico para fazer com que o processo ensino-aprendizagem, em especial o de Matemática, seja mais motivador e divertido, sem que essa prática pedagógica seja confundida com falta de proposta educativa. Segundo Giménez e Rosich (1998) um jogo possui as características de vertente lúdica, fator de azar, tempo limitado e conteúdo curricular implícito. Como *componente lúdico*, o jogo proporciona um valor motivacional de atitudes e de predisposições ao livro didático. No mais, fomenta o processo de socialização, uma vez que tem um componente social indubitável por estabelecer efetivas reações de aceitação, cumprimento de regras, etc. O *azar* é um dos elementos sociais principais que tem o jogo, por desenvolver no aluno o hábito ganhar/perder como inerente ao processo. O *tempo* e o *número limitado de movimentos* de um jogo faz com que seja possível utilizá-lo também como base de situações didáticas e o *conteúdo curricular* (conceitos, procedimentos e atitudes) do jogo não pode ficar em segundo plano.

Utilizo jogo com futuros professores de Matemática com o objetivo de que eles reconheçam-no como um recurso manipulativo importante, porém com características diferentes de outros materiais didáticos e que o licenciando perceba também a importância de incorporá-lo como instrumento "sério" em sua sala de aula, para uma busca e desenvolvimento de "idéias matemáticas". Além de promover a socialização e despertar o espírito investigativo, importantes no processo de matematizar, provocará mudanças de atitude frente ao erro. Ou seja, professor e aluno passarão a reconhecer o erro como potencial no processo de matematização.

Nesta perspectiva, um dos jogos que utilizo na disciplina é a Torre de Hanói, bastante conhecido pelos professores. Este jogo é baseado num mito indiano. O mito (Ferrero, 1991; Machado, 1992) do templo de Benarés, no qual Deus no momento da criação colocou 64 discos de ouro puro, todos de tamanhos diferentes, colocados em uma das três agulhas de diamante que haviam fixado numa placa de cobre. O maior disco seria a base da torre e o menor seu topo: era a Torre de Brahma. A tarefa dos sacerdotes do templo seria transportar a torre para outra agulha de diamante, movendo um disco de cada vez, e nunca colocando um disco maior sobre outro menor. Ainda, segundo o mito, quando a tarefa fosse cumprida o mundo desapareceria.

Assim considerando o caráter motivador intrínseco ao jogo Torre de Hanói, seu aspecto investigativo e que se adapta a diferentes séries, suas

**regras** são: mover um disco de cada vez e nunca um maior pode ficar sobre o menor e, o desafio é descobrir o número mínimo de movimentos que podem ser realizados para mover determinada quantidade de discos de uma torre a outra. O jogo é encontrado facilmente em lojas de materiais pedagógicos, mas também pode ser construído pelo próprio professor utilizando madeira, cartolina, papelão ou até mesmo simular com moedas. Veja a seguir a ilustração de uma torre com 5 discos.



Como também tenho incluído na temática de minhas aulas a divulgação e busca de *sites* em Matemática, uma aluna encontrou este, que vale a pena acessar para conhecer e jogá-lo, virtualmente: <http://www.fortalnet.com.br/jogos/hanoi/hanoi.htm>

A utilização das torres de Hanói em sala de aula, já foi muito bem apresentada por Grandó (1997), porém o que pretendo aqui é aprofundar a reflexão sobre a sua utilização com futuros professores de Matemática e enriquecê-la no tocante à prática avaliativa em Matemática.

#### **A PRÁTICA AVALIATIVA EM MATEMÁTICA COM OS DIÁRIOS DE CAMPO**

Pensar em avaliação implica mudanças nos objetivos para o processo ensino-aprendizagem, na maneira de conceber a aprendizagem, na interpretação e na abordagem dos conteúdos matemáticos, num trabalho docente que deve incluir uma variedade de situações de aprendizagem (PCN, 1998). Despertado e influenciado por Powell e López (1995) sobre a importância da escrita no ensino-aprendizagem de Matemática comecei a utilizar em minhas aulas o instrumento de avaliação que é o diário de campo<sup>4</sup>. A seguir, o roteiro (Bairral e Giménez, 2000; D'Ambrósio, 1996) que sugiro aos licenciandos para a elaboração dos diários.

<sup>4</sup> Prefiro utilizar este termo, pois normalmente existem alunos que, ao iniciarem o processo de escrita dos diários, descrevem, superficialmente, o que aconteceu. Por exemplo, em uma aula com o jogo Torre de Hanói é comum o aluno escrever "conhecemos a Torre de Hanói" então, o que enfatizo é que o meu interesse é saber o que ele aprendeu, ou não, no trabalho com a torre. Assim, prefiro não utilizar o termo relatório, pois para mim é um texto mais que descritivo. A idéia de diário de campo vem da pesquisa qualitativa.



- Data
- Carga horária
- Tema principal da aula
- Palavras-chave
- Qual(is) foi(ram) o(s) objetivo(s) da(s) aula(s)?
- O que você aprendeu? O que precisa de esclarecimento?
- Descreva brevemente um momento especialmente significativo no desenvolvimento da aula.
- Identifique algo que te surpreendeu, que te fez refletir, levantar perguntas, etc.
- Procure explicar algo que te deixou confuso, alguma dificuldade encontrada, uma dúvida ou pergunta não esclarecida.
- Sugestões e outros comentários que considere importantes.
- Bibliografia (utilizada, sugerida, ...)
- Valore de 1 a 10:
- A aula como um todo:
- O professor:
- O seu grupo:
- Os demais grupos:
- Você:

As idéias de D'Ambrósio (1996) também foram orientadoras para adaptação do instrumento à dinâmica da disciplina e, como critérios de avaliação utilizo:

#### **Principais**

- Prazo de entrega.
- Compreensão e explicitação dos temas abordados: perceber o que é importante destacar dentro do estudado.
- Utilização do roteiro.
- Resposta às colocações feitas pelo professor.

#### **Outros**

- Reporte ao trabalho coletivo.
- Associação de idéias com a prática, apresentando exemplos.
- Capacidade de análise e síntese.
- Evolução no processo de elaboração de escrita e idéias.
- Dúvidas levantadas e esclarecimentos solicitados.
- Críticas e sugestões feitas.
- Organização e apresentação.