subjacentes à transmissão do saber científico à sociedade em geral. Por "epistemologia", podemos compreender as concepções mantidas sobre as condições da "existência" das entidades matemáticas. Estas epistemologias se apresentam na alternativa seguinte:

- uma epistemologia substancialista (ou ontológica), segundo a qual os conceitos são justificados por uma redução aos seres aos quais outorgamos uma existência como a do mundo físico;

- uma epistemologia sistêmica, onde a existência é justificada pela coerência do campo conceitual, devendo os conceitos satisfazer apenas às condições internas da Matemática.

A meu ver, a opção em favor de uma ou de outra destas epistemologias, dentro de uma dada cultura, ressalta as condições sociais (das quais dependem também o "gosto" ou "desgosto" pelas ciências puras) e é, desta forma, suscetível a mudar e conhecer rupturas.

c) A arquitetura da Matemática

Há uma terceira categoria de causas dos obstáculos aos quais vêm se misturar e interagir as causas internas ao desenvolvimento matemático e as causas propriamente epistemológicas. Trata-se das concepções sobre a "arquitetura da Matemática", e, particularmente, das concepções sobre o peso relativo da Álgebra e da Geometria, com respeito aos fundamentos da Matemática. Várias opções são apresentadas, cada uma tendo por conseqüência uma diferenciação particular:

- se a Álgebra e a Geometria são igualmente fundamentais, de fato, devemos ter as noções fundamentais que possam servir uma vez na Álgebra ou na Geometria. O efeito disto é impedir uma diferenciação da noção de quantidade, visto que supõe-se que esta noção compreenda aquela dos números (como "quantidade discreta") e aquela de "linha" (como "quantidade contínua");

- ou se uma destas partes domina a outra;

- se então a Geometria é considerada como a disciplina mais fundamental, que incluiu alguma sorte de Álgebra (é a posição dos Gregos e de Euclides), então a quantidade serve de noção de base e a noção de número é derivada;

- ou se é a Álgebra que é vista como a disciplina fundamental em si, a Geometria não sendo mais que um campo de aplicação da Álgebra, então temos a concepção que sustenta o esforço chamado "aritmetização da Matemática", com o número como noção de base.

As questões que são levantadas sobre a arquitetura da Matemática são primordiais, para a didática assim como para a elaboração de programas de ensino, porque tocam nos problemas de transposição do saber científico às "seqüências didáticas", seguindo uma ordem, seja "lógica", seja "natural", seja "psicológica". É também em torno destas questões que são expressas as visões da Matemática mantidas pelo grande público. Assim, parece-me que foi esta categoria que realizou uma contribuição bastante determinante aos casos de rupturas.

Antes de concluir, há certas observações que gostaria de fazer sobre a noção de obstáculo epistemológico, como explicativa da aparição de rupturas no estatuto conferido a certos conceitos matemáticos. No começo desta pesquisa, eu estava convencido de que a noção de **obstáculo epistemológico** era a categoria explicativa adequada (e confesso que esta terminologia é bastante sedutora), mas (sem me misturar na discussão dos didáticos franceses (ver Brousseau, 1983 e Glaeser, 1984)) depois de uma volta às fontes bachelardianas (Bachelard, 1938/1975) tenho dúvidas sobre a possibilidade de aplicar esta noção. Minhas dúvidas não vêm tanto do fato de Bachelard ter excluído o conhecimento matemático do domínio da aplicação de sua noção de obstáculo epistemológico, dizendo:

> *"A história da Matemática é uma maravilha de regularidade. Ela conhece períodos de parada. Ela não conhece períodos de erros"* (Bachelard, 1975, p. 22).

A meu ver, esta observação apresenta uma visão muito estreita do erro.

Mas a posição de Bachelard torna-se realmente problemática quando entende "a formação do espírito científico" como um processo teleológico, ou seja, dirigido **necessariamente** a um progresso em teoreticidade, à vitória última da razão. Reconhecemos aí a visão racionalista da matematização, suposta necessária e desejável, das ciências no seu processo evolutivo. Deste ponto de vista, o processo de formação do espírito científico se realiza em três etapas sucessivas (bastante análogas às de Piaget): um estado concreto, pré-científico, onde reinam os fenômenos; um estado concreto-abstrato, onde a experiência física completa-se com as abstrações; enfim, o estado abstrato propriamente dito (identificado com nossa época), onde domina a razão teórica. Para Bachelard, não há ruptura no progresso da razão humana: se há recuos na nossa época, são pontuais e provisórios, não representam mais que uma "sonolência do saber" nos indivíduos (1996, p. 10), e não uma escolha deliberada. Por "obstáculos epistemológicos" podemos então compreender as expressões de tais "sonolências" individuais (donde a atenção que a didática lhes destina).

Mas a história "social" dos números negativos nos oferece exemplos onde a escolha por uma epistemologia parece ter sido feita (como decisão "coletiva", e não somente de alguns indivíduos!) com um pleno conhecimento das epistemologias concorrentes. Para o estudo de tais casos, não podemos recorrer à noção de obstáculo, que supõe, ao contrário, uma certa incapacidade, intelectual ou outra. Então, se uma escolha é feita com conhecimento das diversas possibilidades, não se pode desqualificar a epistemologia que sustenta esta posição, rotulando-a como "obstáculo".

Contudo, as reflexões de Bachelard podem ser utilizadas para esclarecer as dificuldades dentro dos desenvolvimentos conceituais (particularmente na primeira categoria de causas). Bachelard mostrou bem como o "conhecimento geral" e uma epistemologia "substancialista" podem transformar-se em obstáculos ao conhecimento científico, em seu estado pré-científico. Por "conhecimento geral", Bachelard entende que são conceitos "corretos e úteis", mas que podem constituir um obstáculo "oferecendo ao pensamento uma forma geral prematura" (ibid., p. 82). Como exemplo, ele analisa o conceito de fermentação do século dezoito como não diferenciado e, portanto, não operacionalizado[27].

Assim, a noção de quantidade apresentou este mesmo caráter universal, geral e intuitivo (ver ibid., p. 98) que impede a especificação das idéias que ela recupera. D'Alembert critica a definição correntemente considerada da "grandeza" (em sua época tomada como definição da "quantidade" por toda parte) como muito geral e inconveniente para a pesquisa.

> *"Segundo a definição que acabamos de trazer, devemos chamar de* ***grandeza*** *tudo aquilo que é suscetível de aumento e diminuição; ora, a luz é suscetível de aumento e diminuição; entretanto nos expressaríamos com forte impropriedade considerando a luz como uma grandeza"* (Encyclopédie, vol. 7, p. 855).

Ademais, falando de obstáculo "substancialista", Bachelard analisa toda uma série de tendências do pensamento científico, onde ligamos diretamente a uma substância, as qualidades diversas de um conceito (ibid., pp. 121 ss). Neste artigo, colocamos em evidência diversas argumentações contra a existência de números negativos, que se nutrem de um substancialismo deste tipo. Como, entre outros, a identificação da Geometria (euclidiana, em três dimensões) ao espaço de nossa experiência sensível, que supões que a Geometria pode ser apreendida pela evidência ou pela intuição direta.

Observações de Conclusão

As concepções bachelardianas parecem subentender o desenvolvimento cognitivo e científico independente das mentalidades e das visões específicas das nações, como um invariante cultural. Ora, o estudo aqui apresentado fornece indicações sobre as dependências manifestas entre os contextos culturais e nacionais e as epistemologias favoráveis (e desfavoráveis) a certos desenvolvimentos científicos. Estas dependências advertem contra uma transposição imediata de uma certa etapa da evolução científica para o processo de aprendizado, designemos esta etapa como um "obstáculo" ou a privilegiemos como etapa necessária a cada indivíduo, de uma nova geração.

Entretanto, ao mesmo tempo, estas dependências implicam uma responsabilidade da didática, que deve levar em conta as epistemologias subjacentes e as suposições, por vezes implícitas, de suas próprias proposições sobre o ensino.

Notas

1. Versão redigida de uma exposição ao colóquio "História e Epistemologia da Matemática", Montpellier 31.5 – 1.6.1985.

2. Outros exemplos são: o número 15.3 (maio) 1984 do "Journal for Research in Mathematics Education". Apesar do número ser dedicado inteiramente aos problemas da subtração, nenhum dos artigos discute os números negativos.

3. Houve outros estudos de didática versando sobre história. Um estudo bastante interessante descreveu como os autores utilizaram a história dos números negativos para desenvolver nos docentes uma certa sensibilidade aos obstáculos inerentes a este conceito. Eles colocaram um ponto particular no esclarecimento da natureza **convencional** da "regra dos sinais". A história da matemática parece, segundo os autores,

progredir em marcha lenta, porém contínua (Arcavi et al., 1982). Um outro artigo discute os problemas dos números negativos dentro da história da matemática em relação aos modelos, atualmente utilizados nos EUA para ensinar as quatro operações sobre os inteiros (Crowley/Dunn 1985).

4. De fato, eu só conheço um exemplo de refutação da regra dos sinais, J. Klostermann (Petesburg). Correspondente associado da sociedade real de ciências de Göttingen, ele estabeleceu, em 1804 e 1805 o "teorema" seguinte: menos multiplicado por menos dá menos. Notavelmente, ele não refuta a existência dos números negativos. No entanto, ele aceita o cálculo com as "quantidades opostas". O erro principal de sua "demonstração" reside no fato que ele não distingue entre o sinal da operação e o sinal do número (Klostermann 1804 e 1805).

5. Segundo o princípio da permanência, não há um só sistema de leis que reja as operações sobre todos os sistemas de números, mas antes uma hierarquia:

A extensão progressiva do sistema de naturais aos sistemas (maiores) dos inteiros, racionais, reais é definida de uma tal maneira que o conjunto das leis em vigor no sistema inferior continua em vigor no próximo sistema superior.

6. Este livro de um Engenheiro-topógrafo e "Geômetra chefe do Cadastro da Costa do Ouro" é apenas o segundo tratado de didática de matemática na França, junto com o de Lacroix, por toda a primeira metade do século XIX!

7. Busset culpa particularmente Euler, de ter "resolvido esta questão pela afirmativa! Ora, não temo dizer, apesar de meu respeito... pelo gênio de Euler..., esta doutrina é para mim o auge da aberração da razão humana, e só a ela, ela será suficiente, seja para afastar do estudo da matemática uma multidão de espíritos excelentes, seja para acreditar todas as falsas idéias que debitamos sobre estas ciências" (Busset, 1843, p. 47).

8. Glaeser menciona também a dimensão epistemológica das relações da matemática com a realidade física (Glaeser 1981, p. 339), mas a relação grandeza-número não figura nesta lista de obstáculos (ibid., p. 308).

9. Para o período indo das origens até a Idade Média, eu me servi principalmente de artigo de J. Sesiano (1985), que descreve o desenvolvimento dos números negativos durante este período como uma passagem do concreto ao abstrato.

10. Luca Pacioli toma uma posição ambígua: nota-se nele uma refutação, instintiva, dos números negativos, entretanto ele admite uma vez um preço negativo em um problema comercial e uma outra vez considera a solução negativa em um problema abstrato como um "belissimo caso".

11. D'Alembert não distingue o zero matemático do nada absoluto da filosofia.

12. O editor da publicação póstuma transformou "equação" em "operação". Uma mudança que não faz sentido algum e que obscureceu as intenções de Condillac.

13. Carnot diferenciou claramente, no texto de 1801, a quantidade de seu "valor absoluto", o valor positivo e o valor negativo (Carnot, 1801, p. 2). Assim, não se pode mais criticá-lo por

14. Um exemplo eloqüente é o manual de Francoeur, destinado aos alunos da Escola Politécnica e aos universitários de Ciências. No quadro da resolução das equações, em Álgebra, ele discute longamente a solução $x=\frac{b-d}{c-a}$ segundo os casos: $b > d$ ou $b < d$ e ou $c > a$ ou $c < a$. Evidentemente, ele discute esta questão de Álgebra segundo o método da Geometria " dos antigos"; considerando essses casos isolados e independentes. Enfim, ele exclui dois casos como soluções impossíveis porque: "Toda solução negativa denota um absurdo" (Francoeur 1819, vol. 1, p. 149-150). Paralelamente reveladora é a nota "sobre a teoria da quantidades positivas e negativas – de acordo – do famoso manual "Cours d´Analyse" de Cauchy (Cauchy 1821, p. 333-359): ela mostra a necessidade, para Cauchy, de apresentar aos alunos da Escola Politécnica os elementos da Álgebra de maneira que os números negativos sejam aceitos.

15. Depois de procurar um exemplar deste livro (um processo de longa duração) eu fiquei muito surpreso de constatar que antes deste primeiro capítulo "Números positivos e negativos" há como uma verdadeira "cabeça" um capítulo de "Introduções" de Geometria. É uma exposição da doutrina de segmentos orientados, ou melhor, dos "caminhos" (de acordo com a terminologia Mourey, ver mais longe). Ela é utilizada como justificativa ontológica de número negativo. Referindo-se às propriedades dos caminhos (respectivamente dos segmentos), aplica-se as regras do cálculo com o novo tipo números. É preciso acrescentar que sete é um dos raros manuais onde se enfatiza o caráter convencional das regras dos sinais. (Bourlet 1896, p. 21).

16. Esta diferença não foi mencioada até hoje, na historiografia. É muito difícil avançar nas hipóteses sobre as razões desta evidente diferença. Entretanto, a doutrina das quantidades opostas deriva-se das reflexões filosóficas, parece-me que houve na Alemanha debates e trocas bastante estreitas e frutíferas entre matemáticos e filósofos. Além das diferenças profundas entre a filosofia alemã e a filosofia francesa, existe uma desconfiança entre autores (de numerosas correntes filosóficas) de sistemas transcendentes desacreditados, na Fraca, ao lado da anexação à filosofia jesuíta.

17. Infelizmente, não existe uma tradução adequada da palavra "aufheben" (o que já é muito indicativo!). Segundo Hegel, por exemplo, "aufheben" tem às vezes o sentido de negar, assim como o de conservar.

18. A dupla "método analítico" – "método sintético", conheceu, no decorrer da história uma grande variedade de significados (que já expliquei na minha exposição da terceira Escola de Verão de Didática da Matemática, julho 1984, Orleans). Entretanto o significado atribuído aqui aos dois métodos por Klügel tem muitas vantagens porque ele nos conduz ao fundo dos debates ideológicos sobre o "método".

19. Esta crítica é correta, mas Carnot não a aceita como refutação porque ela implica admissão dos números inteiros, tanto que para Carnot só há números absolutos e o significado dos sinais x e - é simplesmente de sinais das operações.

20. Uma outra refutação exaustiva se encontra no livro de W. A. Diesterweg (1831) que trabalha no mesmo nível da "matemática de problemas" mas que defende a independência da Álgebra, apesar desta tendência favorável ao método sintético.

21. O primeiro texto francês onde se diferencia de uma maneira análoga entre números e grandezas é uma memória de 1843: M. Marie está prestes a admitir os números negativos (no quadro de uma "Álgebra pura"), mas uma teoria das grandezas negativas não faz para a autora nenhum sentido matemático (Marie 1843, pp. 11-12).

22. Mesmo Klügel, em "Mathematisches Wörterbuch" limita-se, sob a rubrica "Coordinate" a visualizar em seus gráficos apenas o primeiro quadrante.

E Biot (1805), que utiliza o eixo de coordenadas, designa as duas direções de um eixo pelo mesmo sinal: x e y respectivamente. Mais tarde, encontramos, em todo o século dezenove, nos manuais franceses,