

## 2. APRENDIZAJE Y MATEMÁTICA

Dada una situación problemática, una cuestión relevante consiste en establecer cómo caracterizarla con el propósito de intentar modelizarla, cómo puede definírsela en términos de problema, identificando claramente sus componentes (reales y aceptables) y cómo se puede modelar, buscando la metodología de resolución específica; esta situación se traduce en hallar todos los caminos vinculantes entre estado/s inicial/es y estado/s final/es.

Gagné (Las condiciones del Aprendizaje, 1977) postuló una taxonomía del aprendizaje, consolidada en 1985; identificando cinco tipos de aprendizaje: Información Verbal; Habilidades Intelectuales; Estrategias Cognoscitivas; Actitudes y Destrezas Motoras.

La *información verbal* (fechas trascendentes, procedimientos, fórmulas, identidades) está presente en todo tipo de conocimiento, constituyendo la base de otros aprendizajes; Gagné considera dos grupos de información verbal: *aislada* (inconexa, obtenida por ejercitación repetitiva o mediante alguna estrategia mnemotécnica); *organizada* (conectada a un cuerpo mayor de conocimiento existente en la estructura cognitiva del aprendiz, por tal razón, esencial la conectividad y su estabilidad).

Las *habilidades intelectuales* comprenden tanto la adquisición de conceptos como la aplicación de reglas. Gagné sostiene que este tipo de aprendizaje tiene naturaleza jerárquica; por tanto puede lograrse una habilidad intelectual al disponerse del dominio actual de aprendizajes previos requeridos (pre-requisitos); por ende, recomienda realizar un análisis de instrucción para adquirir una *habilidad intelectual*, obteniéndose una "jerarquía del aprendizaje", con el fin que durante esta construcción se verifiquen los pre-requisitos de los aprendices.

Las *estrategias cognitivas* son los mecanismos que el sujeto emplea durante todo el proceso de aprendizaje, paulatinamente van refinándose con la experiencia y no son propias de un campo del saber en particular; corresponden al acto de pensar, a las formas de *resolver problemas*, al almacenamiento de la información y a la evocación. Es importante que un aprendiz se exponga a situaciones donde pueda poner en práctica sus estrategias, mejorar las actuales o bien, imaginar nuevos enfoques.

Las *actitudes* se muestran a través de conductas observables y se aprenden al observar modelos; es recomendable emplear refuerzos positivos para delinear actitudes.

Las *destrezas motoras* corresponden a habilidades físicas.

La *Matemática* es una de las disciplinas tales que su estructura es más evidente que en otras, posee un conjunto de conceptos que definen su contenido; su lenguaje simbólico favorece la representación y el desarrollo de la disciplina, otorgándole carácter instructivo y facilitando la adquisición de aprendizajes posteriores; por ende, presenta un cúmulo de ventajas para ser *enseñada* correctamente y *aprenderse significativamente*.

Para *aprender Matemática* debe haber *información verbal* (procedimientos, fórmulas, identidades; en primera instancia en forma aislada y posteriormente, en forma organizada) que el alumno debe almacenar en su memoria, para su adquisición deberá repetir y/o relacionar con información previa; hay gran cantidad de conceptos y reglas de alto orden, por ende se necesitan *habilidades intelectuales* para aplicar estos conceptos y relacionarlos con reglas, que permitan mejorar la organización de la información verbal; hay necesidad de *estrategias cognitivas* (mecanismos empleados por el aprendiz, que no son propias de un campo específico del saber y que corresponden al acto de pensar, a las formas de resolver problemas, al almacenamiento de la información y a la evocación; el aprendiz que se expone a diferentes situaciones puede mejorar sus estrategias y la creatividad tendiente a lograr nuevos enfoques) y existe un aspecto *actitudinal* (mostrado en el comportamiento observable y aprendido en la observación de modelos) y existen *destrezas motoras* (habilidades físicas en la resolución); en consecuencia, es posible expresar que la *Matemática* no se enseña para lograr una reacción negativa de los alumnos y la actitud de ellos favorece o dificulta su aprendizaje.

*Modelización Matemática* es el proceso que posibilita la obtención de un modelo; el aprendiz debe realizar tal proceso *artesanalmente*, pues para poder construir un modelo, más allá del *conocimiento matemático*, debe disponer de una *alta dosis de intuición-creatividad* para estar en condiciones de interpretar el contexto, discernir *qué contenido matemático* tiene *mayor adaptabilidad* y esencialmente, tener *sentido lúdico* con el propósito de operar con las variables involucradas.

Conforme a estos conceptos, un aprendiz debe «tener» *el arte* mínimamente imprescindible que le permita formular, resolver y construir expresiones, no excluyentes a la resolución de un problema particular sino que puedan *reutilizarse* como soporte de otras teorías y aplicaciones.

En toda fase de la *Modelización Matemática* resultan procesos interactivos que permiten validar continuamente los procesos que van definiéndose; tanto en la interacción del resolutor con el dominio como en la posterior definición del tema-objetivo, reconociendo la situación problemática, efectuando la investigación propia del tema, identificando y luego parametrizando conceptos, formulando las hipótesis del problema, construyendo alternativas viables y determinando las posteriores soluciones, sean óptimas, cuasi-óptimas, semi-óptimas u óptimo-aproximadas y básicamente, interpretando tales soluciones en el contexto que da lugar a su validación.

### 3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La *resolución de problemas* se asocia frecuentemente con la performance en la salida del pensamiento humano, pues esta actividad mental consiste en hallar una solución a un problema. La expresión “*resolución de problemas*” fue introducida por matemáticos; pero, la disciplina que más evolucionó desde tal concepto, fue la Inteligencia Artificial, a partir del nacimiento de “GPS” (General-purpose Problem Solver), procedimiento desarrollado por Newell & Simon (Human Problem Solving, 1973) para su Teoría de Máquina Lógica, en el intento de creación de una computadora inteligente.

En términos generales, los *juegos* representan situaciones de naturaleza no numérica, tal que su comportamiento es tan impredecible que permite rotularlos como problemas no determinísticos y no algorítmicos; puede afirmarse que la teoría esencial de estos problemas presenta rasgos isomórficos con la Matemática en cuanto a la teoría de la demostración; así, puede esbozarse un esquema de similitudes:

Logica	Juegos
- Premisas Iniciales	- Posición Inicial de Piezas
- Reglas Inferenciales	- Reglas del Juego
- Teoremas	- Ordenación subsiguiente de piezas
- Búsqueda de Pruebas	- Sucesión de jugadas permitidas

Considerando que matemáticamente, para *resolver* un problema se postula: "Dado un conjunto  $X$ , hallar todos los puntos  $x_i \in X$  que satisfagan el conjunto de restricciones  $R(x_i)$ "; se tiene que un problema puede resolverse exhibiendo un objeto perteneciente a un conjunto conocido para satisfacer las restricciones que explícitamente se imponen, a saber:

- Aplicando una *fórmula* explícita para lograr la solución; si el método se puede usar, brindará la solución en todos los casos.

- Empleando *definiciones recursivas*.

- Utilizando un *algoritmo* convergente a la solución.

- Aplicando otros procedimientos; en particular, *ensayo y error*, enumerando el total de casos.

Pueden definirse *otros sistemas* de resolución?

Esta pregunta tiene respuesta afirmativa, dado que es posible conceptualizar métodos interactivos (o bien, cooperativos) que involucran *procesos de búsqueda*, con la característica de poder ser *reutilizables*; tales procesos pueden emplearse al desconocer métodos más directos.

En particular, el *proceso de resolución* de un problema es isomorfo al proceso de *búsqueda* en un grafo; en consecuencia, cada nodo constituye la representación de un estado del problema y cada arista corresponde a la aplicación del operador entre los estados representados por los nodos vinculados. Considerando que para resolver un problema es necesario efectuar una *reducción*, se puede definir un espacio de estados del problema y un conjunto de operadores en tal espacio; así, el problema se reduce a *buscar un camino* en el espacio que permita unir el estado inicial con un estado objetivo; este proceso se puede modelar como un *Sistema de Producción*. El objetivo esencial reside en elegir una *Estrategia de Control* apropiada que tienda a optimizar el proceso de búsqueda y por ende, que los resultados sean eficientes.

Las *estrategias de control* requieren el cumplimiento de las condiciones siguientes:

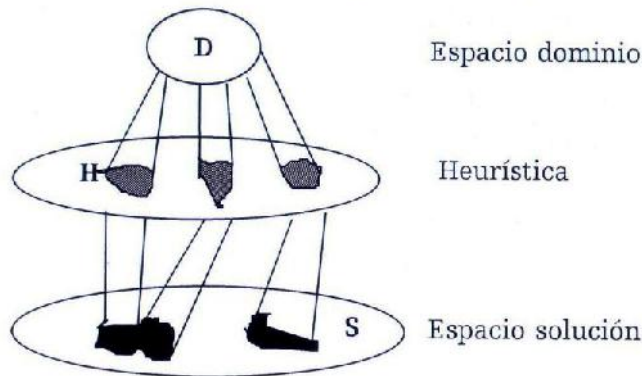
- Deben causar algún *cambio*, pues en caso contrario jamás se podrá alcanzar la *solución*.

- Deben ser *sistemáticas*, para permitir establecer una correspondencia, tanto con necesidad de cambio global (en el curso de varios pasos) o con necesidad de cambio local (en el curso de un simple paso).

En esta instancia, puede hablarse de interactividad? Si no hay interactividad puede haber cambios?

Cómo se aplican los procesos resolutivos?

Un mecanismo resolutivo está avalado por la *heurística*, que matemáticamente representa el mapeo del espacio dominio D en el espacio solución S, o bien, como los medios para obtener la *proyección restringida* del espacio dominio D a conjuntos en el espacio solución S; gráficamente:



En esta instancia, se puede hablar de metodologías interactivas para resolver problemas? Considerando lo expuesto, se dispone de las condiciones necesarias para expresar que una *heurística* es un *mecanismo cooperativo* que permite resolver problemas, básicamente en cuanto a tópicos que posibilitan la reutilización de metodologías; en tal situación, una heurística es una técnica que permite incrementar la eficiencia de un proceso de búsqueda, a costa de presentar, en ciertos casos, incompletitud; sin embargo, es posible mejorar la calidad de los caminos explorados.

Existe una clase general de problemas que formalmente pueden resolverse conforme a:

- 1 - Elección de una *acción* entre un conjunto de *posibles acciones*.
- 2 - Ejecución de la acción; esto es, se modifica la acción inicial.
- 3 - Se evalúan *nuevas situaciones*.
- 4 - Rechazo de *situaciones desfavorables (o desventajosas)*.
- 5 - Si se alcanza la *situación objetivo*, se concluye; en caso contrario, se elige otra acción y se repiten los pasos anteriores.

Este procedimiento no garantiza hallar las mejores soluciones; en consecuencia, es *conveniente* mejorar cada uno de los pasos empleando estas estrategias:

### 1 - Elección de la Acción

#### (a) Por la *importancia del objetivo*

- Reduciendo diferencias no deseadas entre la situación actual y el objetivo.

- Debido al conocimiento o al fácil logro de la solución de un subproblema.

#### (b) Por *experiencia*

- Repitiendo lo ocurrido en problemas anteriores.

- Identificando la acción clave.

#### (c) Por cumplimiento de alguna *acción necesaria*

- Por elección generada por algún análisis de la situación.

- Por eliminación de acciones no conducentes a lo deseado.

#### (d) Por selección *aleatoria*

- Por Preferencia

- Por Indiferencia

### 2 - Ejecución de la Acción elegida

### 3 - Evaluación de la Situación

#### (a) Por *Analogía*

- Reconocimiento del problema como un problema resuelto previamente.

- Reconocimiento de un subproblema.

- Medición de la distancia relativa al objetivo:

. Desde la situación inicial.

. Con respecto al esfuerzo necesario.

#### (b) Mediante algún *criterio matemático*:

- Construcción de las Propiedades Necesarias y/o Suficientes para la Solución.

- Construcción de una Función.

- Hallando límites inferiores y/o superiores.

- Adicionando los valores de las características aceptables.

#### (c) Por la *Esperanza de Evolución basada en la experiencia previa*:

- Simplicidad de la situación.

- Tasa de progreso en la búsqueda.

- Otro criterio; por caso, la dificultad del problema.

#### 4- Rechazo de situaciones desfavorables

5 - Elección del movimiento siguiente o progreso continuo hacia el objetivo:

- Desarrollo de la situación generada.
- Trabajo en paralelo.
- Ejecución de acciones, consecutiva o simultáneamente, retornando a la situación de *mejor pronóstico*.
- Conforme al valor dado por la función de gradiente.
- En base al *pequeño número de acciones* que implica; o, por un *compromiso* entre *tales acciones* y: la profundidad de la búsqueda y/o la evaluación de la situación.

En qué medida se puede hablar sobre metodologías interactivas en los procesos de búsqueda que incluyen heurísticas? Hay *interacción* entre diferentes modelos de búsqueda con el propósito de mejorar la solución de un problema particular; hay *adaptación* en la integración de metodologías provenientes de diferentes campos del saber en cuanto a su *reutilización*; hay cambio global en la aplicación de metodologías en algún instante futuro.

Esta situación puede medirse en términos de Aprendizaje Cooperativo?

Si se considera este artículo como un enfoque plausible, la respuesta es afirmativa y en relación con la visión del aprendiz, puede concluirse que bajo ciertas condiciones, se pueden alcanzar instanciaciones de aprendizaje cooperativo, más aun si se atiende a considerar que la cooperación permite describir Aprendizaje Social y que éste puede definirse como «el conjunto de los procesos de ajustes de cada comportamiento racional individual de los componentes de la sociedad», significa entonces que el contexto social del aprendizaje puede modelarse como una estructura de coalición (conjunto de partes) que forma una coalición en la cual se definen los socios, que posibilitarán el aprendizaje, aquellos que mejoren sus capacidades.

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

DOUGHERTY & GIARDINA; *Mathematical Methods for Artificial Intelligence and Autonomous Systems*; Prentice-Hall, 1988.

- GAGNÉ, YEKOVICH & YEKOVICH; *The cognitive psychology of school learning*; Harper Collins, 1993.
- HARDY L. & JACKSON H.; *Aprendizaje y Cognición*; Prentice-Hall, 1998.
- LAURIERE J. L.; *Problem-Solving and Artificial Intelligence*; Prentice-Hall, 1987.
- LUGER & STUBBLEFIELD; *Artificial Intelligence: Structures and Strategies for Complex Problem Solving*; Benjamin Cummins, 1995.
- OSHERSON D., Editor; *An Invitation to Cognitive Science: Thinking*, Volume 3; MIT Press, 1995.
- PEARL J.; *Heuristics*; Addison-Wesley, 1983.
- POLYA G.; *How to Solve It*, 1944.
- RÍOS D. I., RÍOS S. y MARTÍN J.; *Simulación: Métodos y aplicaciones*; Editorial Ra-Ma, 1997.