

inteiros não em sua forma padrão como 750, mas ao invés o fizeram em sua forma decomposta, $2^1 \times 5^3 \times 3^1$. Isto é, sua escrita evidencia uma certa predisposição em lidar com essa maneira mais abstrata de representar inteiros. Segundo, ele descreve como determinar o MMC de um grupo de inteiros de modo geral e conciso. Ele atingiu esse nível de generalização e concisão refletindo e refletindo criticamente em sua escrita e então revisando as representações escritas de seu pensar. Terceiro, na descrição acima, se a palavra "tomar" for substituída por "multiplicar" e a frase "expressá-los" substituída por "expressar cada um deles", que também exprime estas ações, então sua descrição ia aparentar ter vindo de uma edição de James and James (1963, p.262)!

A maneira com que esse aluno aderiu seu pensamento ao escrever sobre as idéias de MDC e MMC ilustra como as anotações de aula podem ser usadas para capturar, examinar e reagir ao pensamento matemático. Nós vemos que escrever força os alunos a refletir sobre suas experiências matemáticas e examinar reflexões escritas pode levar alunos a refletir criticamente em suas idéias. Sobretudo, refletir e refletir criticamente nas experiências matemáticas da escrita de um aluno, pressupõe um aprendiz ativo, não um passivo. Essa ação acoplada ao caráter revelador da escrita reflexiva indica que a escrita pode influenciar significativamente a cognição e a metacognição de um aluno. Escrever, por ser algo que pode ser visto pelo escritor e outros, permite que se explore relacionamentos, construa-se significados, e manipule-se pensamentos; para estender, expandir ou abandonar idéias; e para rever, comentar e monitorar reflexões. A escrita expressiva apóia esses atos cognitivos e metacognitivos.⁴ Depois de estabelecer um grau de confiança nas idéias de alguém, parece quase natural a mudança da prosa expressiva para a prosa argumentativa. Essa mudança ocorreu com o aluno enquanto ele lutou com suas idéias de como determinar o MMC de um grupo de inteiros. Ele construiu e reconstruiu o significado. Ele escreveu e revisou suas reflexões, um processo mediado por comentários externos. A medida que

⁴ In the literature on composition theory, researchers distinguish between different modes of writing: expressive and transactional. Transactional writing uses language "to get things done: to inform people (telling them what they need or want to know or what we think they ought to know), to advise or persuade or instruct people." It is used whenever an "accurate and specific reference to what is known about reality" is needed. Expressive writing is "thinking aloud on paper." It has the function of revealing the speaker, verbalizing his consciousness ... submits itself to the free flow of ideas and feelings ..." (Britton et al., 1975, pp. 88-90).

ele começou a expressar suas idéias com maior clareza e confiança e selecionar uma linguagem que descrevesse mais precisamente suas ações e percepções, sua escrita mudou de expressiva para transacional.⁵

Nós também percebemos que escrever ajuda os alunos a adquirir um vocabulário rico e funcional e a usá-lo no contexto de sua compreensão da Matemática. Mayher, Lester & Pradl (1983) já consideravam desta forma no que diz respeito à aprendizagem, de um modo geral.

A capacidade da escrita de colocar o aprendiz no centro de seu próprio aprendizado pode e deve fazer da escrita um facilitador importante para se aprender qualquer coisa que envolva a linguagem. A escrita, por sua vez, envolve escolha de uma linguagem e isto requer que cada escritor encontre suas próprias palavras para expressar aquilo que está sendo aprendido. Tal processo pode inicialmente servir para revelar mais as lacunas do que o domínio de um assunto particular, mas mesmo isso pode ser de imenso valor para o diagnóstico de um professor assim como de um aluno. E à medida que o processo se repete, adquire-se o domínio real e duradouro de um assunto e de seu vocabulário técnico. (p.79)

Ao fornecer aos estudantes oportunidades de trabalhar com conceitos matemáticos e termos de sua própria linguagem, em sua escrita, também ajuda os estudantes a construir sua confiança no contexto da matemática e se tornar envolvido mais metodicamente com o material.

Os trechos acima, retirados do diário de classe de um aluno ilustram que, como professores, nós atingimos importantes objetivos pedagógicos quando os alunos escrevem sobre a matemática em que estão envolvidos. Qualquer que seja a atividade escrita, desde que ela obrigue os alunos a sondar suas idéias e compreensão sobre alguma matemática em que estejam envolvidos, pode capturar evidência importante de seu pensamento matemático. Diferente da natureza efêmera da fala, a escrita é um meio estável, que permite a ambos, aluno e professor, examinar, reagir e responder ao pensamento matemático do aluno. Quando um professor responde aos diários de classe dos alunos, por exemplo, isso estabelece um meio poderoso de diálogo entre professor e alunos.

⁵ For an example of a writing activity that prompts learning and requires students to write transactionally, see Powell (1993).

Professores têm a oportunidade de providenciar um retorno direcionado às afirmações, interpretações, questões, descobertas e enganos dos alunos. Oportunidades importantes de encorajar um aluno a reconsiderar sua conceitualização e a estendê-las e aprofundá-las são freqüentemente apresentadas. Esses métodos de diálogo pessoal podem reafirmar aos alunos que seus conceitos e idéias tem importância. Além disso, o caráter revelador da escrita expressiva dos alunos dá ao professor um retorno em dimensões importantes de sua própria instrução.

As revelações sobre o pensamento alheio dão ao aluno uma percepção afetiva e cognitiva crucial. Refletir criticamente sobre o que escrevem da Matemática que estão aprendendo permite que os alunos desenvolvam critérios para monitorar seu desempenho e obtenham um maior controle sobre sua aprendizagem. O desenvolvimento das capacidades de controlar e monitorar provoca nos alunos um sentimento de dever cumprido, que por sua vez tem um efeito positivo em suas reações afetivas para com a Matemática que estão aprendendo. Além disso, alunos têm uma grande satisfação pessoal enquanto aprendizes capazes de fazer e compreender a Matemática à medida que adquirem um controle ainda maior sobre seu aprendizado, desenvolvem critérios para seus padrões individuais de progresso, e compreendem as idéias matemáticas com que estão envolvidas.

Quando nós incorporamos atividades de escrita na aula de matemática, nós aplicamos de maneira diversificada um importante princípio pedagógico: o aprendizado é otimizado quando alunos refletem criticamente sobre suas experiências matemáticas, reagindo a situações matemáticas e questões que são pessoais e de seu próprio arbítrio. Nós já vimos como a escrita de um diário de classe pode desenvolver o aprendizado matemático. Similarmente, outras atividades escritas nos permitem capturar, examinar e reagir ao pensamento matemático dos alunos.

Outros exemplos de tal atividade são os relatórios de entrada múltipla.⁶ Um relatório de entrada múltipla é primeiramente um veículo que possibilita que os alunos disponham de modo a refletir e formar imagens de uma determinada parte da Matemática e, também, um meio onde eles registrem, em prosa, múltiplas versões de suas reflexões e imagens. Alunos criam esse veículo pessoal e reflexivo ao dividir uma folha de papel em três seções iguais, ao longo de seu comprimento. Na

⁶ For further discussions of multiple-entry logs see, Hoffman and Powell (1989) as well as Powell and Ramnauth (1992a and 1992b).

coluna da esquerda, eles inserem um "texto" de sua própria escolha que os interesse ou atinja pessoalmente. Nós interpretamos a palavra "texto" amplamente, significando uma combinação de prosa matemática ou notações selecionadas de um livro, texto, conjunto de problemas, tela de calculadora ou computador, ou qualquer outro recurso disponível. Os alunos podem também extrair seu texto de uma discussão matemática em que eles participaram ou, se for o caso, testemunharam. Uma vez extraído o texto é inserido na primeira coluna, os alunos colocam suas reflexões escrevendo, na coluna do meio, um comentário, interpretação, avaliação ou qualquer outro tipo de elaboração de seus pensamentos. Finalmente, o mais crucial e crítico aspecto ao se manter um relatório de entrada múltipla é o terceiro momento, onde os estudantes, após um certo tempo, refletem novamente ou "meta-refletem" sobre o que escreveram em antigas reflexões nestes 'textos' e, na coluna da direita, revisar, reconsiderar ou então comentar estas reflexões prévias. O trecho abaixo é de um relatório de entrada múltipla que uma aluna escreveu durante a segunda semana de um curso de Álgebra.

Texto	Reflexão #1	Reflexão #2
<p>Doug recebe dobrado por cada hora de serviço acima de 40 horas por semana. Semana passada ele trabalhou 46 horas e ganhou US\$ 468. Quanto é a sua hora de serviço, normalmente?</p>	<p>Ele trabalhou 6 horas-extras. Isso significa somente 6 dessas horas foram dobradas. Não tenho certeza de como devo montar esse problema. Os US\$ 468 representam quanto ele recebeu pelas 40 horas regulares mais as 6 horas-extras, que foram dobradas.</p> <p>Qualquer que seja a sua hora de serviço, para as 6 horas ele trabalhou em hora-extra e recebe dobrado. Digamos que x representa a sua hora de serviço normal. Ele normalmente trabalha 40 horas/semana, então $40x$ representa o seu salário semanal padrão. $6(2x)$ representa as 6 horas-extras, pagando o dobro de sua hora normal de serviço.</p> $40x + 6(2x) = 468$ $40x + 12x = 468$ $52x = 468$ $x = 9$ <p>Sua hora normal de serviço é US\$9/hora. Para as 6 horas-extras ele recebeu US\$18/hora.</p>	<p>Embora o problema não peça o quanto ele ganha por semana sem hora-extra, eu agora posso responder essa pergunta. Também posso responder o quanto ele ganhou pelas 6 horas-extras em que trabalhou.</p> $40(\text{US\$}9) = \text{US\$}360/\text{semana}$ $6(\text{US\$}18) = \text{US\$}108 \text{ por horas-extras.}$ <p>Depois de refletir nesse problema, eu cheguei a conclusão que se eu posso representar uma quantidade desconhecida com uma variável, posso também encontrar as outras quantidades desconhecidas de um problema usando aquela mesma variável.</p>

O exemplo anterior de um relatório de entrada múltipla ilustra uma série de aspectos interessantes sobre os modos escrever que os alunos produzem ao usar essa ferramenta. Primeiro, as entradas nas colunas do meio e direita são exemplos de escrita pessoal e expressiva, sendo ambos reflexivos e analíticos. Segundo, na coluna do meio, a aluna diz que ela “não tem certeza de como deve montar o problema”, de maneira que, ao declarar tal coisa, isso permita que ela se assegure e prossiga. Terceiro, ela usa a oportunidade de escrever para explorar sua compreensão do problema. Especificamente, ela parece lutar com a importância do fato de Doug ter trabalhado 6 horas extras e o impacto que isso acarretará em seu pagamento semanal. Quarto, enquanto a aluna escreve, sua compreensão do problema parece se aprofundar, e ela descobre uma maneira de expressar uma das quantidades desconhecidas. Ela determina que a variável x pode representar a hora normal de serviço de Doug e que $2x$ seria portanto sua hora-extra. Então, ela estabelece uma equação: o “salário semanal padrão” de Doug mais suas horas-extras é igual a seu salário semanal total.

Na coluna da direita, que contém a segunda reflexão da aluna, ela discute duas importantes descobertas. A segunda é uma generalização da situação particular, em que ela se tornou ciente de que se uma quantidade desconhecida pode ser denotada por uma variável, então essa mesma variável pode ser usada para representar as outras quantidades associadas ao problema. Mais tarde, claro, ela precisará aprofundar esses usos para determinar o domínio referente a suas compreensões. O cerne da questão, entretanto, é que generalizar é um aspecto importante do pensamento e que reagir de forma reflexiva à escrita concedeu a esta aluna a oportunidade de se envolver com a metacognição e examinar profundamente a sua compreensão de uma idéia matemática: o uso de uma variável para construir uma expressão notacional para uma outra, porém relacionada, incógnita. Naturalmente, a reflexão em diários de entrada múltipla pode ter continuidade e gerar mais questões, assuntos e diferentes compreensões.

Escrever sobre idéias matemáticas é uma tecnologia isenta e não intrusiva que permite aos alunos e professores capturar, examinar e reagir ao pensamento matemático. As duas atividades escritas apresentadas — diários de classe e relatórios de entrada múltipla — são ferramentas efetivas para implementar a escrita nas salas de aula de

matemática, posto que ela incita os alunos a escrever de um modo particularmente útil. Geralmente, diferentes atividades do tipo escrever-para-aprender incitam os alunos a produzir diferentes tipos de texto. Como Hoffman e Powell (1989) teorizaram, esses textos existem dentro de uma matriz de categorias: impessoal e não reflexivo; impessoal e reflexivo; pessoal e não reflexivo e pessoal e reflexivo. Na matriz acima descrita sugere-se que a categoria que melhor incentiva o pensamento matemático é a "escrita pessoal e reflexiva, cujo conteúdo é a Matemática e as respectivas respostas afetivas dos alunos sobre assunto" (1989, p.132). O uso por nós sugerido de diários de classe e diários de entrada múltipla incita os aprendizes a entrar em *comunicação* não somente com o seu instrutor mas também com o texto por eles selecionado e, ao invés de um reles resumo, encorajando-os a interpretação e análise do texto. Até o ponto em que os professores convidam os alunos a refletir sobre seus próprios aprendizados, examinando e reagindo às antigas entradas que ambos, diários de classe e diários de entrada múltipla, possam efetivamente dar suporte ao aprendizado matemático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERTHOFF, A. E. 1982. *Forming/thinking/writing: The composing imagination*. Portsmouth, NH: Boynton/Cook Heinemann.
- BERTHOFF, A. E. 1987. Dialectical notebooks: An audit of meaning. In T. Fulwiler (Ed.), *The journal book* (pp. 11-18). Portsmouth, NH: Heinemann.
- BRITTON, J., BURGESS, T., MARTIN, N., MCLEOD, A., & ROSEN, H. 1975. *The Development of Writing Abilities (11-18)*. London: Macmillan.
- COUNTRYMAN, J. 1992. *Writing to learn mathematics: Strategies that work, K-12*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- FRANKENSTEIN, M., & POWELL, A. B. 1989. Empowering non-traditional students: On social ideology and mathematics education. *Science and Nature*(9/10), 100-112.
- GEESLIN, W. E. 1977. Using writing about mathematics as a teaching technique. *Mathematics Teacher*, 70, 112-115.
- HAIRSTON, M. 1982. The winds of change: Thomas Kuhn and the revolution in teaching and writing. *College Composition and Communications*, 33(1), 76-88.

- HOFFMAN, M. R. AND POWELL, A. B. 1989. Mathematical and commentary writing: Vehicles for student reflection and empowerment. *Mathematics Teaching*, No 126, March, 55-57.
- JAMES, G., AND JAMES, R. C., Eds. 1963. *Mathematics dictionary*. Princeton: D. Van Nostrand.
- JONES, W. 1988. Double entry logs: Prompts for revision and expository comments. Unpublished manuscript.
- MAYHER, J., LESTER, N., AND PRADL, G. 1983. *Learning to write/Writing to learn*. Upper Montclair, New Jersey: Boynton/Cook.
- POWELL, A. B. 1985. Working with 'underprepared' mathematics students. In M. Driscoll and J. Confrey (Eds.), *Teaching Mathematics: Strategies that Work*, 2nd ed., Portsmouth, New Hampshire: Heinemann, 181-192.
- POWELL, A. B. 1993. Pedagogy as ideology: Using Gattegno to explore functions with graphing calculator and transactional writing. In C. JULIE, D. ANGELIS, & Z. DAVIS (Eds.), *Proceeding of the Second International Conference on the Political Dimensions of Mathematics Education*, 356-369. Cape Town: Maskew Miller Longman.
- POWELL, A. B., AND LÓPEZ, J. A 1989. Writing as a vehicle to learn mathematics: A case study. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), *Writing to Learn Mathematics and Science*, New York: Teachers College Press, 157-177.
- POWELL, A. B., PIERRE, E., AND RAMOS, C. 1993. Researching, reading, and writing about writing to learn mathematics: Pedagogy and product. *Research & Teaching in Developmental Education*, 10, 1, 95-109.
- POWELL, A. B. AND RAMNAUTH, M. 1992a. Beyond questions and answers: Prompting reflections and deepening understandings of mathematics using multiple-entry logs. *For the Learning of Mathematics*, 12(2), 12-18.
- POWELL, A. B. AND RAMNAUTH, M. 1992b. Multiple-entry logs: A writing tool for responding to, discussing, and learning mathematics. In P. A. Malinowski & S. D. Huard (Eds.) *Perspectives on practice in developmental education*. New York: New York College Learning Skills Association, 46-49.
- STERRETT, A. (Ed.) 1990. *Using writing to teach mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

TOBIAS, S. 1989. Writing to learn science and mathematics. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), *Writing to learn mathematics and science* (pp. 48-55). New York: Teachers College Press.

Diversidade no Pensar: Um Caminho Para Construção do Conhecimento Matemático

MARIA CELMA DA SILVA BOHER

COMENTÁRIOS INICIAIS¹

Este relato de experiência originou-se no curso de Álgebra de Pós-Graduação em Educação Matemática da Faculdade Santa Dorotéia na cidade de Nova Friburgo - Rio de Janeiro.

O curso de Álgebra foi distribuído da seguinte forma: 1) Um passeio pela história da Álgebra; 2) Leitura de artigos sobre dificuldades no ensino e aprendizagem da Álgebra; 3) Álgebra no ensino fundamental, médio e superior; 4) Parâmetros Curriculares Nacionais: o que dizem sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra. Como trabalho final, foi solicitado aos professores-alunos do curso de Especialização que aplicassem uma atividade em suas salas de aula e fizessem um relato sobre o desenvolvimento da atividade. O relato a seguir é um desses trabalhos apresentado por uma das professoras do curso. De um modo geral, existe nos professores uma grande resistência em escrever, registrar suas experiências. O registro é parte fundamental na socialização e construção de novas práticas pedagógicas. Este relato foi escrito na terceira pessoa, porém foi a própria professora que aplicou a atividade em sala de aula. Esta seção do Boletim GEPEM é um convite para o professor contar sua experiência em de sala de aula, ele dessa forma estará contribuindo para a prática de outros professores.

¹ Os Comentários Iniciais e Finais deste artigo são da professora do curso de Álgebra, Rosana de Oliveira, Mestre em educação Matemática. Email: rosanaol@highway.com.br