utilizando justificativas matemáticas, eu achei que já foi um pouco complicado. Houve construções que não tive a menor idéia de como justificá-las." (Michel)

Na auto-avaliação pedimos para que os alunos avaliassem o desempenho na realização das atividades, apontassem se houve evolução e atribuíssem uma nota explicando o porquê.

"A presença e a participação em sala de aula tem sido fundamentais nessa aprendizagem, pois é nela que aprendemos, pois é o único local onde temos acesso ao programa." (Carol)

"É difícil de fazer uma auto-análise, até porque ninguém é capaz de se julgar com muita precisão. Apesar disso eu acho que comecei o trabalho meio relaxado, até porque como eu não conhecia o que era essa eletiva, eu não ligava muito. Porém vendo a seriedade disso resolvi correr atrás... Na minha opinião interesse é a chave do sucesso, eu acho que melhorei meu desempenho inicial, apesar de saber pouco ainda, mas não puderam construir o Empire States sem uma base." (Gustavo)

Carol levanta uma questão relevante sobre a diferença da utilização do computador que, salvo raras exceções, o contato com um software educativo limita-se a escola contrapondo-se a um livro didático, por exemplo, ao qual o aluno pode consultar em casa e mostra valorizar a presença e participação nas aulas. Gustavo enfoca a questão da avaliação da Disciplina Eletiva. A quantificação da média bimestral foi acordada com os alunos e não possui avaliação formal escrita como nas disciplinas regulares. Gustavo escreve que no início do processo "começou meio relaxado" justificando o motivo "até porque eu não conhecia o que era essa eletiva". Foi a primeira experiência desses alunos com uma disciplina que não possui avaliação formal e houve uma quebra de paradigmas no modelo tradicional de avaliação ao modelo novo. O aluno mostra em sua fala que a princípio não compreendia que atitudes seriam relevantes no processo e ao longo do processo revela "correr atrás" que segundo Banathy, 1993 cit. Clunie, 1996 *"os alunos assumem progressivamente mais responsabilidades pela sua própria aprendizagem"*.

Considerações Finais

No desenvolvimento dessa pesquisa, trabalhamos uma perspectiva interativa e dinâmica do conhecimento geométrico. Encontramos no software um aliado na implementação do ambiente de aprendizado pretendido. Não buscamos *"uma versão computadorizada dos modelos atuais de ensino"* (Valente, 1993), mas uma proposta de Informática Educativa, inserida no novo paradigma educacional.

Muitas são as limitações de incorporar a utilização de softwares no processo ensino-aprendizagem. Se por um lado, estamos na era da informática, por outro a estrutura escolar não fornece condições ideais de utilização. Os professores ainda encontram muitas dificuldades na implementação de uma proposta de trabalho com o uso do computador. Quando existe essa possibilidade, geralmente precisam adaptar as condições e o ambiente para inserir o uso de softwares educacionais no ensino.

Acreditamos que essa pesquisa contribua na utilização de softwares educativos em Educação Matemática, em particular no uso do Cabri Géomètre II. Embora tenha sido feita com seis alunos, seus relatos e suas dificuldades podem auxiliar outros professores, mesmo que trabalhem com um grupo maior, e sempre adaptadas a realidade de cada um.

Consideramos relevante a experiência de manipulação do software através da descoberta, como foi proposta na atividade livre, e as estratégias utilizadas para resolução de problemas utilizando o Cabri Géomètre II.

A novidade da mudança de perspectiva provocada pelo caráter dinâmico do software pode ser comprovada no relato do Gustavo quando movimentou um ponto e exclamou: — *"Ih, ele mexe!"*.

Através dos relatos dos alunos, pudemos comprovar também que, inicialmente, o procedimento de construção era confundido com a justificativa do problema, o que foi sendo diferenciado ao longo do desenvolvimento das atividades.

Os alunos mostraram, inicialmente, resistência à escrita e alguns sentiram dificuldade com as justificativas, onde verificamos uma maior precisão na linguagem ao longo da pesquisa.

O Cabri Géomètre II forneceu aos alunos recursos para estratégias de investigação, trabalhando a percepção visual do problema e calculando medidas desejadas, e ajudou no estabelecimento do plano de resolução do problema (Polya, 1995).

Comprovamos um progresso no encadeamento das idéias nas justificativas realizadas ao longo das atividades, o que pode ser verificado nas soluções da folha-tarefa 7. Isso foi evidenciado nos relatos, onde alguns alunos formularam e verificaram hipóteses auxiliares, comprovaram sua conjectura e as utilizaram para justificar o problema proposto. No relato de Fernando, por exemplo, além de utilizar uma estratégia de resolução diferente dos demais o aluno afirma resultados e depois os justifica.

Os alunos mostraram fazer relações entre a investigação proposta e as realizadas anteriormente, como verificamos na fala de Gustavo ao construir a atividade da folha-tarefa 7: — *"Isso tem a ver com aquela parada do círculo"*.

Na continuidade dos processos estamos utilizando as macro construções para agilizar os processos de construção e intensificar a utilização do software para justificar situações-problema. Os alunos vêm preparando seminários de alguns conteúdos para uso posterior com o software. Dentre alguns temas dos seminários temos as cônicas, conteúdo que despertou curiosidade dos alunos desde o desenvolvimento da atividade de exploração do software quando o aluno Michel descobriu o ícone.

O Cabri Géomètre II insere a Geometria em seu raciocínio lógico-dedutivo, proposta há muitos séculos nos Elementos de Euclides (Boyer, 1974), na era da tecnologia do século XXI, onde "mouses falantes" e "formas malcriadas e bagunceiras" dão forma às imagens mentais abstratas.

Referências Bibliográficas:

ABRANTES, Paulo e outros. *Matemática para todos: Investigação na sala de aula*. In ABRANTES (org.): Investigar para Aprender Matemática. Lisboa, 1996.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blüncher Editora, 1974

CLUNIE, Gisela E. T., e outros. *Ambientes de Aprendizagem e Hipertecnologias: Uma Relação Promissora*. Programa de Engenharia de Sistemas e Computação UFRJ. Rio de Janeiro, 1996.

GARCIA, Pedro Benjamim. Paradigmas em Crise e Educação. In BRANDÃO (org.). *A Crise dos Paradigmas e a Educação*. São Paulo, Cortez, 1994.

ILABACA, Sánchez. *Informática Educativa*. Chile, Editora Universitária, 1993.

MASON, John. *O "quê", "o porquê" e o "como" em Matemática*. In

ABRANTES (org.): Investigar para Aprender Matemática. Lisboa, 1996.

NASSER, Lilian. *O Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria*. Boletim do GEPEM, 27, pp. 93-99, 1991.

PAPERT. *The Children's machine*. New York: Basic Books, Traduzido para o português como, *A Máquina das Crianças: repensando a escola na Era da Informática*. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Método Matemático*. Rio de Janeiro, Interciência, 1985.

SAMPAIO, Marisa Narcizo. *A Alfabetização Tecnológica do Professor: a busca de um conceito*. Dissertação de Mestrado apresentada a COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação UFRJ, 1996.

SANGIACOMO, L. *O Processo da Mudança de Estatuto: De Desenho para Figura Geométrica. Uma Engenharia Didática com o Auxílio do Cabri Géomètre*. Dissertação de Mestrado apresentada a PUC-SP. São Paulo, 1996.

SOUZA, Fernanda Cristina A. G. de. *Geometria Dinâmica: Um Estudo*. Dissertação de Mestrado apresentada a COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação UFRJ. Rio de Janeiro, 1998.

VALENTE, José Armando. *Diferentes Usos do Computador na Educação. Em Aberto*, Brasília, ano 12, (57), 3-17, jan/mar. 1993.

Captando, Examinando e Reagindo ao Pensamento Matemático

Arthur B. Powell

Tradução / **Wilson Reis de S. Neto**

Enquanto educadores e professores de matemática, nós ansiamos por comunicação direta com os estudantes, com seus processos de pensamento, com o seu pensamento sobre a Matemática. Entretanto, como conseqüência da natureza esotérica das mentes humanas, existem barreiras naturais que fazem com que seja difícil para nós captar, examinar e reagir ao pensamento matemático de nossos alunos. Os alunos apresentam limitações semelhantes. Não existe uma técnica não intrusiva capaz de nos permitir acessar em tempo real o que se passa na mente de nossos alunos enquanto eles trabalham para resolver problemas matemáticos. Embora os alunos possam estar cientes do que pensam, freqüentemente eles não desenvolvem o hábito de pensar sobre o mesmo, e também não percebem uma utilidade nessa prática. Quando alunos escrevem sobre seus sentimentos e pensamentos referentes a idéias matemáticas específicas, podemos captar suas idéias matemáticas, tal escrita consiste em um veículo eficaz para que nós e eles possamos examinar, refletir profundamente e reagir ao seu pensamento matemático.

A escrita, além de possibilitar a captação do pensar matemático, pode também servir como um veículo de aprendizagem. Desde que essa proposta foi teorizada por pesquisadores em escrita e composição literária, tanto professores de redação quanto de matemática desenvolveram uma gama de atividades escritas e experimentaram diferentes abordagens ao usar tais atividades em sala de aula.[1] Qual a

[1] In composition theory, important early work can be gleaned in Britton et al., (1975) and Emig (1977). Hairston (1982) provides a useful history on the recognition of writing as a tool for learning in composition theory. In mathematics education, as far as I am aware, Geeslin (1977) is the first teacher to have published on the use of writing as a teaching technique. Subsequently, an analysis and annotated bibliography of the use of writing to learn in mathematics appear in Powell, Pierre, and Ramos (1993). For a practical guide to activities for use in K to 12th grades, see Countryman (1992) and at the collegiate level, see Sterrett (1990).

prova concreta da afirmativa na primeira frase deste parágrafo? De fato, pode não ser imediatamente óbvio que a escrita seja uma ferramenta poderosa para o aprendizado matemático e para capturar, examinar e reagir a esse pensar. Nesse artigo nós examinamos atividades comuns de redação conhecidas como diários ou relatórios de aprendizagem[2] para ilustrar a utilidade da escrita para a aprendizagem e então elaborar motivos pelos quais escrever é essencial na sala de aula de matemática. Finalmente, nós desenvolvemos uma série de idéias teóricas ao examinar uma outra, porém não tão usual atividade de redação, que eu chamo de Relatórios de Entrada Múltipla[3].

Não raro, os alunos exploram técnicas para determinar o máximo divisor comum (MDC) e o mínimo múltiplo comum (MMC) de um grupo de inteiros. Em um ambiente escolar urbano, alunos trabalharam os problemas em pequenos grupos e discutiram como encontrar o máximo divisor comum (MDC) de um grupo de inteiros positivos. Em seguida, cada aluno escreveu o que ele ou ela entendeu sobre a idéia. Vamos examinar o que um dos alunos escreveu:

> Eu descobri que eu podia encontrar o máximo divisor comum de dois inteiros encontrando primeiro os fatores dos dois inteiros e então pegando o maior fator comum à ambos.
> Ex: (24,30) 1, 2, 3, 6 MDC = 6 ou $2^1 \times 3^1$

No trecho acima, o aluno descreve e ilustra sua forma de entender como encontrar o MDC. Ele lista os fatores comuns de dois inteiros, 24 e 30, e representa seu MDC na forma de potências de primos. Sobretudo em seu texto, ele demonstra seu próprio controle sobre o processo e a forma como clareia suas idéias.

Em uma passagem subseqüente do diário, depois de explorar idéias sobre o mínimo múltiplo comum (MMC) de um grupo de inteiros positivos, este mesmo aluno tenta internalizar ambos os conceitos e coordená-los com a sua compreensão de fatores primos e decomposição em fatores primos.

[2] For further discussions of journal writing see Powell (1985) and Powell and López (1989).

[3] Multiple-entry logs (Hoffman & Powell, 1989; Frankenstein & Powell, 1989) are variations, mainly in content and form, but similar in purposes, of what some call double-entry logs (Jones, 1988), divided pages (Tobias, 1989), or dialectical notebooks (Berthoff, 1982, 1987).

O caminho a se seguir para encontrar o MDC de um grupo de inteiros é olhar para a fatoração em números primos dos inteiros no grupo, então pegar os primos comuns, conseguindo-se assim o MDC.
Ex: MMC(28,36) = 2^2, uma vez que 28 = $2^2 \times 7^1$ e 36 = $2^2 \times 3^2$.
Nesse caso 2^2 é o MMC.

Diferentemente do primeiro trecho, aqui o texto do aluno indica que ele precisa desenvolver mais profundamente suas idéias sobre o MDC. Não só temos uma prova de como ele encontra o MDC de dois inteiros, também capturamos uma representação verbal não efêmera de seu pensamento. Se examinamos com cuidado seu texto e reagimos apropriadamente à indicação escrita do seu pensamento, como professores, nós poderíamos transformar a escrita de seu diário em um veículo dinâmico para desafiar e, conseqüentemente, ampliar sua consciência matemática.

Parece que a confusão deste aluno gira justamente em torno de um problema simples de se usar as siglas erradas, MDC ou MMC e não de um problema de confusão nos conceitos. Em resposta a esse trecho, o professor apontou o problema e questionou o aluno. Em sua réplica escrita, o aluno primeiro reiterou a pergunta do professor, depois respondeu-a e ilustrou sua resposta com alguns exemplos. Aqui está o que o aluno escreveu:

Hoje, eu observei a fatoração em números primos de um grupo de números para ver se eu era capaz de determinar seus MDC e MMC somente através de sua fatoração. Eu descobri que em ambas as respostas podem, de fato, ser obtidas pela decomposição em fatores primos. O caminho que se segue para determinar o MDC de um grupo de inteiros é primeiro observar que fatores primos que um grupo tem em comum. Os fatores primos comuns a um grupo formam o MDC.

Note, se não há fatores primos comuns ao grupo o seu MDC é (1) um exemplo. MDC(60,12) = $2^2 \times 3^1$ MDC(5,12) = 1
60 = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ 12 = $2^2 \times 3^1$ 5 = 5^1 12 = $2^2 \times 3^1$

No trecho acima, o aluno descreve corretamente como determinar o MDC de um grupo de inteiros positivos e discute até mesmo um caso especial. Entretanto, abaixo, na segunda parte do texto, ele dá provas de uma persistente incompreensão matemática ou talvez de um erro conceitual lingüístico.

O MMC pode ser determinado de maneira similar. Porém, ao tentar determinar o MMC de um grupo de inteiros, deve-se pegar a fatoração por números primos comum à esse grupo.
Ex: MMC(6,12,15) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$
$6 = 2^1 \times 3^1$ $12 = 2^2 \times 3^1$ $15 = 3^1 \times 5^1$

Significativamente, a representação verbal do pensamento desse aluno capturada em seu texto é precisamente o que nós raramente temos acesso quando alunos meramente reagem a deveres de casa mecânicos ou problemas propostos. Por um lado, nesta parte do diário, apesar dele calcular corretamente o MDC, parece que ele não encontra palavras que permitam uma descrição acurada do que ele percebeu e fez. Por outro lado, parte de sua confusão verbal é relacionada ao que o adjetivo 'comum' qualifica, assim como ao que pode ser visualizado em uma fatoração por números primos de um grupo de inteiros. Para encontrar o MDC, a palavra 'comum' é relacionada ao que se vê diretamente nas fatorações por números primos, os elementos *comuns*. Entretanto, dadas as decomposições em fatores primos de um grupo de inteiros, o MMC não se refere aos elementos 'comuns' *visíveis*. Isto é, os múltiplos dos inteiros não são mostrados; não se pode ver o MMC de um grupo de inteiros simplesmente examinando suas decomposições.

Eventualmente, esse aluno tem que criar uma palavra adequada, até mesmo toda uma linguagem, que corresponda às suas percepções e ações. Quando seu instrutor pediu que ele refletisse criticamente — para *rever* e comentar — em um grupo de anotações do diário que continham o trecho acima, esse aluno finalmente encontrou a linguagem apropriada para descrever corretamente o processo que ele elegeu para encontrar o MMC. O texto seguinte é extraído de um registro no diário que ele escreveu depois de refletir criticamente em seus registros anteriores sobre o assunto MMC:

Para encontrar o MMC, mínimo múltiplo comum de um grupo de números deve-se tomar os fatores primos distintos de um grupo e expressá-los em sua maior potência (o fator comum de maior expoente).
Ex: MMC($2^5 \times 5^9 \times 3^3$, $2^1 \times 5^3 \times 3^1$, $7^1 \times 19^1 \times 13^1$) = $2^5 \times 3^3 \times 5^9 \times 7^1 \times 3^1 \times 19^1$

Esse trecho de um registro de diário contêm três aspectos particularmente fascinantes. Primeiro, esses alunos representaram inteiros não em sua forma padrão como 750, mas ao invés o fizeram em sua forma decomposta, $2^1 \times 5^3 \times 3^1$. Isto é, sua escrita evidencia uma certa predisposição em lidar com essa maneira mais abstrata de representar inteiros. Segundo, ele descreve como determinar o MMC de um grupo de inteiros de modo geral e conciso. Ele atingiu esse nível de generalização e concisão refletindo e refletindo criticamente em sua escrita e então revisando as representações escritas de seu pensar. Terceiro, na descrição acima, se a palavra "tomar" for substituída por "multiplicar" e a frase "expressá-los" substituída por "expressar cada um deles", que também exprime estas ações, então sua descrição ia aparentar ter vindo de uma edição de James and James (1963, p.262)!

A maneira com que esse aluno aderiu seu pensamento ao escrever sobre as idéias de MDC e MMC ilustra como as anotações de aula podem ser usadas para capturar, examinar e reagir ao pensamento matemático. Nós vemos que escrever força os alunos a refletir sobre suas experiências matemáticas e examinar reflexões escritas pode levar alunos a refletir criticamente em suas idéias. Sobretudo, refletir e refletir criticamente nas experiências matemáticas da escrita de um aluno, pressupõe um aprendiz ativo, não um passivo. Essa ação acoplada ao caráter revelador da escrita reflexiva indica que a escrita pode influenciar significativamente a cognição e a metacognição de um aluno. Escrever, por ser algo que pode ser visto pelo escritor e outros, permite que se explore relacionamentos, construa-se significados, e manipule-se pensamentos; para estender, expandir ou abandonar idéias; e para rever, comentar e monitorar reflexões. A escrita expressiva apóia esses atos cognitivos e metacognitivos.[4] Depois de estabelecer um grau de confiança nas idéias de alguém, parece quase natural a mudança da prosa expressiva para a prosa argumentativa. Essa mudança ocorreu com o aluno enquanto ele lutou com suas idéias de como determinar o MMC de um grupo de inteiros. Ele construiu e reconstruiu o significado. Ele escreveu e revisou suas reflexões, um processo mediado por comentários externos. A medida que

[4] In the literature on composition theory, researchers distinguish between different modes of writing: expressive and transactional. Transactional writing uses language "to get things done: to inform people (telling them what they need or want to know or what we think they ought to know), to advise or persuade or instruct people." It is used whenever an "accurate and specific reference to what is known about reality" is needed. Expressive writing is "'thinking aloud on paper.' It has the function of revealing the speaker, verbalizing his consciousness ... submits itself to the free flow of ideas and feelings ..." (Britton et al., 1975, pp. 88-90).