Nas atividades do grupo I, os alunos realizaram quatorze problemas de construção distribuídos nas folhas-tarefa 2, 3, 4 e 5. Analisamos construções do triângulo equilátero e da divisão do segmento em sete partes congruentes.

Na construção do triângulo, os alunos, inicialmente, não faziam distinção entre justificar e descrever os processos realizados durante as construções. Somente o aluno Michel buscou a justificativa para esse problema. Nenhum aluno evidenciou a existência de dois triângulos equiláteros, que diferem por reflexão.

Com o desenvolvimento dessas atividades trabalhamos a diferença do que Laborde chama de Desenho do Cabri e Figura do Cabri. Na primeira construção realizada, os alunos tentaram inicialmente construir de duas formas: uma delas utilizando um triângulo qualquer e a outra por segmentos de reta, depois foram ajustando de forma que o triângulo parecesse equilátero.

A professora indagava *"Posso mexer no que você fez?"* e acontecia o que Laborde chama de deformação. A partir daí questionávamos o que é um triângulo equilátero e que, para construí-lo e não desarrumar, teríamos que construir a partir de suas propriedades.

Depois dessa discussão, com exceção de Gustavo, os outros alunos perceberam a distinção entre desenho e figura do Cabri. Discutimos com Gustavo as propriedades do triângulo equilátero, e o aluno não mostrou dúvidas nas propriedades e procedimentos de construção do triângulo utilizando instrumento de Desenho Geométrico. Apesar disso, algum tempo depois novamente chama a professora para mostrar sua construção.

P - Posso mexer?

G - Ah não, a senhora vai bagunçar tudo.

O aluno segurou o mouse protegendo sua construção do desmoronamento. No computador ao lado, a professora construiu um triângulo equilátero e ocultou as linhas auxiliares de construção. Gustavo não associou inicialmente a construção feita com régua e compasso com aquela feita no computador utilizando o software. Foi preciso que a professora mostrasse a construção através de um recurso do Cabri Géomètre II que refaz o processo passo à passo. Nesse momento o aluno percebeu as propriedades que a professora utilizou para construir e fez a transferência da construção instrumental à construção no Cabri Géomètre II.

Outra questão sobre a mudança de perspectiva e definição do objeto geométrico é que a construção com o Cabri Géomètre II ocorre diferente do papel. Quando no papel traça-se o círculo com centro e raio em um segmento dado, abre-se o compasso e passa-se um círculo pelo ponto que é uma aproximação visual da outra extremidade do segmento.

Quando realizamos a construção no papel utilizando régua e compasso, a partir de um segmento $\overline{AB}$, colocamos a ponta seca no ponto A e com abertura do tamanho da medida desse segmento traçamos o círculo passando por B. Essa é a construção representada na figura 1.

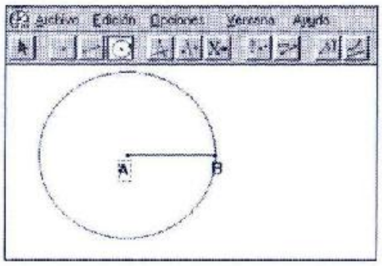


FIGURA 1

Acontece que essa construção quando realizada no software desmorona, ou seja, separa o círculo do segmento $\overline{AB}$, como ilustra a figura 2:

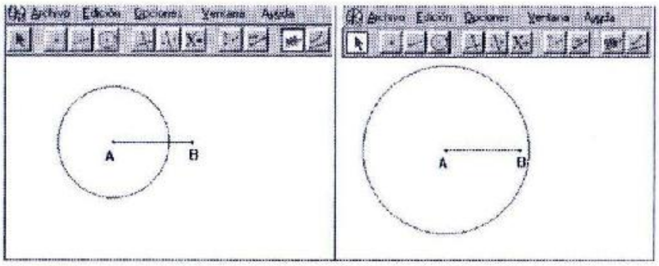


FIGURA 2

No software Cabri Géomètre II o centro e o raio do círculo têm que estar definidos. No caso, se desejamos traçar um círculo com centro em A e raio de medida $\overline{AB}$ ocorre uma troca entre uma informação dada pelo software e o aluno de forma que estes objetos fiquem definidos.

Aqui ficam evidenciadas algumas regras do micromundo Cabri Géomètre II. A construção ilustrada na figura 1 mostra a construção que o aluno faz usualmente com instrumentos de Desenho Geométrico. Na verdade, quando fazemos esta construção estamos pensando em construir um círculo com o ponto A como centro e passando por B, mas no papel isso fica visual.

Quando o aluno passa da construção do papel para a construção no software, a construção assume um caráter diferente pois os pontos têm que ser definidos. A diferença será percebida pela movimentação dos elementos básicos da figura. Nas primeiras construções no Cabri Géomètre II é comum que os alunos façam como Theresa. A construção apresentada pela aluna visualmente estava como na figura 3 e quando movimentamos os círculos ocorre como na figura 4.

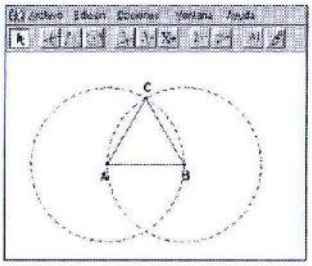


FIGURA 3 - CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO DA ALUNA THERESA.

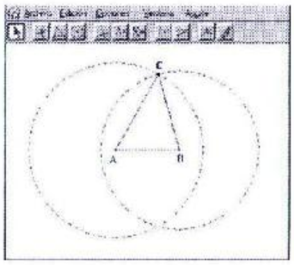


FIGURA 4 - CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO DA ALUNA.

Nesse momento a aluna ainda não distinguia figura de objeto geométrico pois ainda lhe eram obscuras as diferenças entre a construção no papel e no software.

Na folha-tarefa 3, propomos a construção da divisão de um segmento em sete segmentos congruentes. Os alunos relataram os processos de construção e a justificativa.

Alguns alunos indicam, já nesse momento, a procura de justificativas mostrando o teorema de Tales, mas não chegam a conclusão. O aluno Michel mostra preocupação com a linguagem e com a justificativa do problema. Tanto a justificativa como os procedimentos estão precisos.

Nessa atividade houve progressos na manipulação do software e questões importantes surgiram para que desenvolvêssemos mais questionamentos sobre os objetos geométricos. Apareceram mais indícios de busca de justificativa, mas alguns alunos ainda mostram-se resistentes, diferente de suas atitudes nas construções que logo procuram fazer e os motiva mais. Isso reforça nossa opção em procurar nas atividades do grupo II utilizar o software para levantar conjecturas e depois buscar justificativas.

Desenvolvimento de Atividades do Grupo II

Analisamos aqui estratégias de investigação dos alunos relativos a duas situações-problema. Nosso foco era verificar como os alunos utilizavam os objetos geométricos construídos no Cabri Géomètre II, para conjecturar e relacionar propriedades geométricas na busca justificativas. As atividades propostas nesta etapa constam das folhas-tarefa 6 e 7.

A folha-tarefa 6 propunha a construção e a investigação sobre a posição dos pontos D, E e F, obtidos a partir de um quadrado ABCD e dois triângulos equiláteros: o triângulo ABE interno ao quadrado e o triângulo BFC externo ao quadrado.

Primeiro foi proposto que os alunos fizessem o esboço do problema no papel. Não foi imposta nenhuma condição sobre o uso ou não dos instrumentos de desenho geométrico. A seguir os alunos realizaram a construção no Cabri Géomètre II.

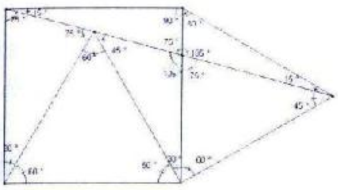
Após a construção no software, os alunos movimentaram os elementos básicos da figura construída para investigar ou comprovar o que ocorre com os pontos D, E e F. Gustavo e Fernando relatam:

"Eu puxei o ponto D e notei que parecia que D, E e F serem retos (distância), então eu tracei uma semi-reta a partir de D e confirmei que a distância dos pontos poderia ser traçada por uma reta, semi-reta, etc." (Gustavo)

"Traça-se então a reta DEF. Realmente os pontos estão na reta." (Fernando)

Perguntamos aos alunos, depois da investigação no Cabri Géomètre II, se consideravam que o problema já estava justificado "matematicamente". Todos os alunos responderam que não, o que mostra um resultado do trabalho desenvolvido nas atividades anteriores, onde procurava-se estimular articulações de propriedades geométricas não sendo suficiente uma justificativa visual.

As justificativas destes alunos apresentadas para o problema foram:



$$\alpha + \beta + \gamma = 75 + 60 + 45 = 180^o$$

Fernando

Com B como centro E e F tem a mesma distância, pois são raios e D é o raio com A como centro sendo que a distância de A com D, B com E e B com F, então com uma certa arrumação angular que eu não descobri qual, a distância entre eles pode ser dada por uma reta, semi-reta, etc.

Gustavo

A partir do registro do Gustavo onde apareceu o termo "arrumação angular" iniciou-se um diálogo entre o aluno e a professora:

P - *Gustavo, leia novamente o seu problema, tenho uma dúvida na justificativa.*

G - *Já li.*

P - *Lembra porque você escreveu 'com uma certa arrumação angular?' O que você quis dizer com isso? Eu não entendi.*

G - *Calma aí. Eu não entendi porque certinho nesse ponto aqui seria a reta, prá mim tinha alguma coisa a ver com angulo, percebi quando mexi que ficava tudo com essa arrumação angular.*

P - *Faz o desenho da figura aqui nesse papel. Você falou que aqui tinha uma 'certa arrumação angular'. O que eu entendi é que você disse que alguns ângulos se mantinham. Você quis dizer que têm ângulos que permanecem com a mesma medida quando você movimenta a figura?*

G - *É isso professora! Eu até medi eles e mexi em tudo e não é que esses ângulos continuavam iguais sempre prá onde quer que eu puxasse.*

P - *Então você descobriu que eles ficavam com a mesma medida e o que mais? Os ângulos ficarem com a mesma medida já é suficiente para garantir que é uma reta?*

G - Ah, não, tem outra coisa. Juntos eles davam 180º por isso também que era uma reta.

P - Puxa Gustavo, você percebeu que os ângulos se mantinham e também que somados encontramos 180º e você tentou achar os ângulos?

G - Não. Prá que?

Gustavo mediu os ângulos e apesar de ter visualizado que eram invariantes, não percebeu que o fato da soma dos ângulos ser 180º, era suficiente para afirmar que os pontos estavam alinhados.

A professora interferiu fazendo duas figuras de três, uma em linha reta e a outra com os três pontos não alinhados.

P - Gustavo olha aqui. O que há de diferente nessas duas figuras?

G - Na de cá os pontos estão em uma reta e na de lá tem um triângulo.

P - E com relação aos ângulos formados nelas?

G - Como assim?

P - Vamos chamar os pontos de D, E e F como no problema. No triângulo se eu for aumentando o ângulo DÊF quando é que os pontos estarão em linha reta?

G - Quando for igual a 180º?

P - Isso mesmo. Então quando o ângulo DÊF medir 180º teremos uma reta. Agora vamos voltar ao problema. Será que consegue justificar agora?

G - Ah, achando os ângulos e somando. Mas não sei os ângulos, só sei porque medi no computador.

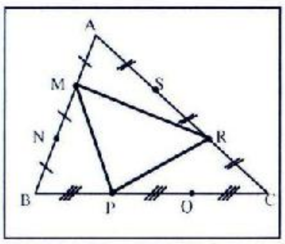
O aluno já entende que medir os ângulos no software Cabri Géomètre II e somá-los não era suficiente para justificar o problema.

P - Mas você não tem na figura um quadrado e dois triângulos equiláteros?

G - Como é que é? É! É!

P - Use isso então. Vou deixar você pensar sozinho agora.

O aluno começou a relacionar os ângulos e encontrou que a medida do ângulo é igual a 180º.



Na folha-tarefa 7 os alunos realizaram investigações a respeito das áreas dos triângulo ABC e MPR conforme ilustra a figura anterior. Os vértices do triângulo MRP foram obtidos através da divisão de cada lado do triângulo ABC em três segmentos congruentes.

Primeiro a professora pediu que os alunos construíssem a figura no Cabri Géomètre II explicando sua construção. Na realização dessa atividade constatamos que a construção do objeto geométrico não foi um entrave, pois envolvia a construção de um triângulo qualquer e a divisão de segmentos em três partes congruentes. Essas atividades já haviam sido realizadas nas atividades do grupo I.

Propusemos então a investigar a relação entre a medida das áreas dos triângulos ABC e MPR. Ao iniciar a manipulação da figura em busca de relações, o aluno Gustavo afirma que:

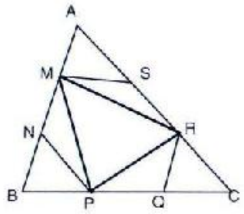
G - Isso tem a ver com a parada do cano.

O aluno associa a busca de relação entre as medidas das áreas com a realizada durante o desenvolvimento da atividade disparadora.

Analisando os registros, num primeiro momento, todos os alunos investigaram as áreas calculando o valor pelo ícone de medida de área do programa. Com exceção do Fernando, todos utilizaram a ferramenta calculadora, o que na visão de Nasser (1991), é um momento que buscam acreditar na validade da relação encontrada. No registro do Gustavo, acreditamos que o uso de aspas confirmam mais uma vez, que ele interiorizou que apresentar justificativas para o problema é mais que usar o software, calcular e medir.

Após conjecturar sobre a relação entre as áreas, pediu-se aos alunos que justificassem o resultado encontrado. Dentre as soluções encontradas, temos as apresentadas por Fernando e Michel:

Fernando resolve por uma estratégia diferente dos demais. Calcula que a medida da área externa do triângulo MPR é 2/3 da medida da área do triângulo ABC e depois acha a razão 1/3. Afirma dois resultados e depois justifica, o que sugere as conjecturas que levantou na elaboração do plano de resolução.



Pode-se perceber uma relação de proporcionalidade entre os segmentos do novo △ e do antigo, para se extrair a relação é preciso provar qual é essa proporcionalidade, construindo novos no △ interior da figura e provando que essas possuem áreas iguais mesmo tendo lados diferentes.
Traça-se os triângulos auxiliares MAS, BNP, QCR, que são congruentes entre si e proporcionais em área ao triângulo por razão 1/9, porque a base dos triângulos menores é 1/3 da base maior e a altura também, daí se extrai que a área total dos 3 é 3 nonos da maior. É visível também que MAS possui área igual a RSM pois as bases são iguais e a altura também, aplica-se isso aos outros dois triângulos e se tem uma área total de 2/3 de novo, logo a área dos triângulos BPN, PCR, AMR é da área do maior, a área de MPR então é 1/3. Fernando

Carol, Jonathas, Gustavo, Michel e Theresa dividem o problema em dois outros: As áreas de três triângulos congruentes AMS, NBP e RQC e a do hexágono MNPQRS. Em seguida reduzem o problema de encontrar a área do hexágono MNPQRS ao de calcular três áreas de paralelogramos MSRQ, PQRQ e MQPN. Michel mostra que organizou a resolução do problema em casos e relata como a construção geométrica ajudou na justificativa:

"Através da construção geométrica no Cabri pude analisar e visualizar os traçados feitos no interior do triângulo, pois com a utilização desse programa, os traçados saíram sem nenhum tipo de erro referente a medida, o que auxiliou na hora da análise." (Michel)

Os alunos mostram que utilizaram o objeto geométrico construído nos seguintes aspectos: visualização, verificação, análise, construções auxiliares e cálculo de medidas. Theresa relata que houve interação entre a visualização no computador e o raciocínio no papel, mostrando que a utilização do software é uma etapa que atua como facilitador, motivador e disparador do processo de buscas por justificativas.

No relato de Michel, observamos que nesse momento o aluno já diferencia os procedimentos de construção e a busca de justificativas.

"Na explicação do procedimento, que é para você descrever o processo utilizado para a construção feita, não houve, ao meu parecer, algum tipo de complicação. Na justificativas que é para agente dizer o porque

utilizando justificativas matemáticas, eu achei que já foi um pouco complicado. Houve construções que não tive a menor idéia de como justificá-las." (Michel)

Na auto-avaliação pedimos para que os alunos avaliassem o desempenho na realização das atividades, apontassem se houve evolução e atribuíssem uma nota explicando o porquê.

"A presença e a participação em sala de aula tem sido fundamentais nessa aprendizagem, pois é nela que aprendemos, pois é o único local onde temos acesso ao programa." (Carol)

"É difícil de fazer uma auto-análise, até porque ninguém é capaz de se julgar com muita precisão. Apesar disso eu acho que comecei o trabalho meio relaxado, até porque como eu não conhecia o que era essa eletiva, eu não ligava muito. Porém vendo a seriedade disso resolvi correr atrás... Na minha opinião interesse é a chave do sucesso, eu acho que melhorei meu desempenho inicial, apesar de saber pouco ainda, mas não puderam construir o Empire States sem uma base." (Gustavo)

Carol levanta uma questão relevante sobre a diferença da utilização do computador que, salvo raras exceções, o contato com um software educativo limita-se a escola contrapondo-se a um livro didático, por exemplo, ao qual o aluno pode consultar em casa e mostra valorizar a presença e participação nas aulas. Gustavo enfoca a questão da avaliação da Disciplina Eletiva. A quantificação da média bimestral foi acordada com os alunos e não possui avaliação formal escrita como nas disciplinas regulares. Gustavo escreve que no início do processo "começou meio relaxado" justificando o motivo "até porque eu não conhecia o que era essa eletiva". Foi a primeira experiência desses alunos com uma disciplina que não possui avaliação formal e houve uma quebra de paradigmas no modelo tradicional de avaliação ao modelo novo. O aluno mostra em sua fala que a princípio não compreendia que atitudes seriam relevantes no processo e ao longo do processo revela "correr atrás" que segundo Banathy, 1993 cit. Clunie, 1996 *"os alunos assumem progressivamente mais responsabilidades pela sua própria aprendizagem"*.

Considerações Finais

No desenvolvimento dessa pesquisa, trabalhamos uma perspectiva interativa e dinâmica do conhecimento geométrico. Encontramos no software um aliado na implementação do ambiente de aprendizado