



RESENHA DE LIVRO

O Último Teorema de Fermat

PAULO ANTONIO ESQUEF

"Acho que vou parar por aqui".

Essas foram as palavras finais de Andrew Wiles, matemático britânico, no dia 23 de junho de 1993, no Instituto Isaac Newton, na Universidade de Cambridge após uma série de palestras. O título das palestras de Wiles era *"Formas Modulares, Curvas Elípticas e Representações de Galois"*. Era a mais importante conferência sobre Matemática do século XX. Duzentos matemáticos estavam extasiados. Estima-se que apenas 50 dos presentes compreenderam a densa mistura de símbolos gregos e álgebra que cobria o quadro negro. Para os presentes, acabava de ser provada a conjectura de Taniyama-Shimura (análises posteriores mostraram que a demonstração continha um erro que foi consertado por Wiles 14 meses depois) e que por conseqüência provava que o Último Teorema de Fermat era verdadeiro.

A história do Último Teorema de Fermat é singular. Sua beleza é extraordinária. Sua concepção é simples. É um problema que pode ser enunciado em termos familiares a qualquer estudante de primeiro grau. Basicamente sua origem está na Grécia – no Teorema de Pitágoras. Por volta de 1637, Pierre de Fermat, um matemático francês amador, estudava problemas e soluções relacionados ao Teorema de Pitágoras. Fermat, num momento de genialidade fez uma pergunta que os gregos jamais teriam imaginado: "O que acontece com o Teorema de Pitágoras quando se troca a potência 2 pela potência 3?". Com essa simples troca criou-se um dos problemas matemáticos mais difíceis da Terra.

Fermat afirmou que não havia solução para o problema. Para complicar mais a situação, ele usou potências maiores que três, ratificando que essas equações também não tinham solução. Fermat

presumiu que não existia um trio de números inteiros positivos que se encaixassem na equação:

$$x^n + y^n = z^n \text{ onde } n=3, 4, 5\dots$$

Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullan in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.

“É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para um número que seja elevado a um potência maior que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes”.

O livro de Aritmética de Diofante foi o grande guia de Fermat durante seus anos de estudo. Curiosamente, Fermat escreveu, em 1637, a seguinte anotação na margem do livro e ao lado do Problema 8:

Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.

“Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição mas esta margem é muito estreita para contê-la”.

A simples troca da potência 2 para 3 na relação de Pitágoras, implicava numa equação aparentemente sem solução para qualquer número inteiro. O método de tentativa e erro logo mostra a dificuldade de encontrar dois números elevados ao cubo que, ao serem somados produzam um outro número elevado ao cubo. A pergunta crucial era: “Como poderia uma simples modificação transformar a equação de Pitágoras, com um número infinito de soluções, em uma equação insolúvel?”

Entre todos os números possíveis parecia não haver razão por que pelo menos um conjunto de soluções não poderia ser encontrado. E, no entanto, Fermat declarava que em parte alguma do infinito universo dos números existiria um “trio fermatiano”. Sua anotação à margem da Aritmética de Diofante, ratificava essa declaração. Fermat acreditava que poderia prová-la. Este era Fermat no seu modo mais frustrante. Suas próprias palavras sugerem que ele estava particularmente satisfeito com uma demonstração “realmente maravilhosa” mas não se daria ao incômodo de escrevê-la em detalhe, quanto mais publicá-la. Ele nunca falou a ninguém sobre sua prova e, no entanto, apesar desta combinação de indolência e modéstia, o Último Teorema de Fermat, como mais tarde foi denominado, se tornaria famoso no mundo e desafiaria as maiores mentes matemáticas por mais de 350 anos.

Fermat morreu em 12 de janeiro de 1665, isolado da escola parisiense de matemática. O trabalho de Fermat só não foi perdido graças ao seu filho mais velho, Clement-Samuel, que passou cinco anos reunindo as cartas e anotações de seu pai.

Último Teorema Fermat ganhou fama devido a tremenda dificuldade em demonstrá-lo. Muitos matemáticos pensavam: “Se Fermat afirmava ter a demonstração, por que não encontrá-la?” A partir de então o problema tornou-se o santo graal da matemática. Vidas inteiras foram devotadas – e até mesmo sacrificadas – à busca de uma demonstração de um problema aparentemente simples.

Leonhard Euler, o maior matemático do século XVIII, teve que admitir sua derrota. Sophie Germain assumiu a identidade de um homem para poder pesquisar num campo fechado às mulheres. Apesar da grande contribuição de Sophie para o progresso da matemática, também fracassou na demonstração. Alguns historiadores admitem que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss – um dos maiores matemáticos de todos os tempos – estudou secretamente o Último Teorema de Fermat e teria fracassado em conseguir algum progresso na demonstração do problema. Para esses historiadores, a evidência para o fracasso de Gauss está numa carta resposta para seu amigo, o astrônomo alemão Heinrich Olbers, que o encorajou a disputar do prêmio oferecido pela Academia de Paris para a solução do problema de Fermat: “Fico-lhe muito grato pela notícia referente ao prêmio de Paris. Mas confesso que o Último Teorema de Fermat, como uma proposição isolada, tem muito pouco interesse para mim. Eu poderia facilmente apresentar uma série de proposições semelhantes que ninguém poderia provar ou desmentir”. Assim, a resposta de Gauss para Olbers seria meramente um caso de despeito intelectual.

O turbulento Évariste Galois tentou passar a noite escrevendo os resultados de suas pesquisas, antes de ser morto num duelo em 1832.

Alguns matemáticos do século XX recorreram ao primeiro teorema da indecidibilidade de Gödel – “Se um conjunto axiomático de uma teoria é consistente, então existem teoremas que não podem ser provados nem negados” – para justificarem seus fracassos.

No início do século XX, Paul Wolfskehl, um industrial alemão, deu nova vida ao problema. Paul estudara matemática na universidade mas dedicava sua vida à construção do império financeiro da família. Após

uma desilusão amorosa, Paul resolveu suicidar-se. Marcou o suicídio para a meia noite de um determinado dia. No dia do suicídio, um pouco antes da meia noite, ele dirigiu-se a biblioteca e começou a ler um livro de Krummer sobre o fracasso de Cauchy e Lamé relativo ao problema de Fermat. Ao examinar os cálculos ficou surpreendido pelo que parecia um erro de lógica. Paul sentou-se para examinar o problema e logo foi envolvido pelo mesmo. Quando terminou sua análise o dia estava amanhecendo. A hora marcada para o suicídio tinha passado. A matemática tinha lhe salvado a vida. Quando ele morreu em 1908, deixou em testamento um prêmio de 100 mil marcos, equivalente a um milhão de dólares, para quem demonstrasse o Último Teorema de Fermat. Era o seu modo de pagar uma dívida com o enigma que salvara sua vida. Estava criado o Prêmio Wolfskehl.

O Último Teorema de Fermat é um problema extremamente difícil e, no entanto, pode ser enunciado de forma que qualquer estudante pode entender. Não existe problema de Física, Química ou Biologia que possa ser enunciado de forma tão simples. No livro, *O último problema*, E. T. Bell escreveu que a civilização provavelmente acabaria antes que o Último Teorema de Fermat fosse demonstrado. Essa demonstração tornou-se o prêmio mais valioso da teoria dos números e não é de surpreender que tenha levado a alguns dos episódios mais empolgantes da história da Matemática.

A fama do enigma se espalhou além do mundo fechado dos matemáticos. Em 1958, o problema acabou aparecendo num conto faustiano. Uma antologia intitulada *Pactos com o demônio* contém um conto escrito por Arthur Poges. Em "O Diabo e Simon Flagg" o diabo pede a Simon que lhe faça uma pergunta. Se o Diabo conseguir responder dentro de 24 horas, levará a alma de Simon, mas, se fracassar, dará cem mil dólares a Simon. Simon então pergunta: "O Último Teorema de Fermat está correto?". O Diabo desaparece e sai pelo mundo absorvendo todo o conhecimento matemático existente para demonstrá-lo. No dia seguinte o Diabo volta cabisbaixo e admite sua derrota:

"Você ganhou, Simon", disse ele quase num sussurro, olhando-o com indisfarçável respeito. "Nem mesmo eu posso aprender Matemática suficiente, em tão curto espaço de tempo, para resolver um problema tão difícil. Quanto mais eu mergulho na coisa, pior ela fica. Fatoração não única, ideais - Bah! Você sabe", confidenciou o Diabo, "nem mesmo

os matemáticos de outros planetas, todos eles muito mais adiantados do que o seu, conseguiram resolvê-lo. Até um cara em Saturno, que se parece com um cogumelo sobre pernas de pau e que resolve equações diferenciais parciais de cabeça, desistiu do problema.”

O Último Teorema de Fermat era uma sereia matemática atraindo os gênios em seu sentido somente para frustrar suas esperanças. Qualquer matemático que se envolvesse com o Último Teorema de Fermat se arriscava a desperdiçar sua carreira, e, no entanto, qualquer um que pudesse fazer o avanço crucial entraria para a história como tendo resolvido o problema mais difícil do mundo.

Um grande matemático contemporâneo confessou que o prazer que ele sente em resolver problemas de matemática é semelhante ao desfrutado por viciados em jogos de computador. Derrotar o inimigo no final de um jogo, no nível máximo de dificuldade, é sempre uma experiência agradável, mas imagine o sentido de realização depois de passar anos enfrentado um problema que ninguém no mundo foi capaz de resolver e finalmente descobrindo uma solução.

Foram esses os motivos que levaram Andrew Wiles, a ficar fascinado por Fermat. “Desde que vi o Último Teorema de Fermat pela primeira vez, ainda criança, ele se tornou minha grande paixão”, dizia Wiles num tom de voz que transmitia a emoção que ele sentia em relação ao problema. “Os matemáticos puros adoram um desafio. Eles adoram problemas não-resolvidos. Quando fazemos matemática temos esta grande sensação. Você começa com um problema que o intriga. Não consegue entendê-lo, é tão complicado que você não distingue o começo do fim. Mas então, quando finalmente consegue resolvê-lo, você tem esta sensação incrível de como ele é bonito, de como tudo se encaixa de modo tão elegante. Os mais enganadores são os problemas que parecem fáceis e depois se mostram extremamente complexos. O Último Teorema de Fermat é o mais belo exemplo deste tipo de problema. Ele parecia ter uma solução e, é claro, muito especial porque Fermat disse que ele tinha uma solução”.

Ao completar a série de palestras no dia 23 de junho de 1993, Wiles acreditava ter provado a conjectura de Taniyama-Shimura e realizado seu sonho de provar o Último Teorema de Fermat. Qual a relação entre Curvas Elípticas, Formas Modulares e a conjectura de Taniyama-Shimura? Afinal, qual a ligação entre a conjectura de Taniyama-Shimura com o Último Teorema de Fermat?