ISSN (versão impressa) 0104-9739
ISSN (versão online) 2176-2988

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Boletim Gepem

55

ANO XXXIII
RIO DE JANEIRO - RJ
P. 1 - 199
JUL. / DEZ. 2009

2009

G E P E M

Boletim nº 55 jul./dez. 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Boletim GEPEM / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
n. 1 (dez. 1976) Rio de Janeiro: O Grupo, 1976.

N. 55, jul. / dez. 2009
Semestral
ISSN 0104-9739

1. Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Tiragem: 500 exemplares
Impresso na Navegantes Editora Gráfica Ltda.

Revista indexada em:
Biblioteca Brasileira de Educação (BBE)
Zentralblatt für Didaktik der Mathermatik (ZDM)
Open Journal Systems - Diretório de Revistas Brasileiras em SEER

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática - GEPEM
Rodovia BR 465, Km7   CEP: 23890-000
Instituto de Educação da UFRRJ - DTPE - Sala 30
Seropédica, RJ - Brasil
Tel./fax.: (21) 2682-1841
gepem@ufrrj.br
www.gepem.ufrrj.br
Boletim Gepem Online: http://www.uffrj.br/SEER/index.php/gepem

SUMÁRIO

COLABORAM NESTA EDIÇÃO

Adair Mendes Nacarato / Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade São Francisco (USF), Itatiba/SP (adamn@terra.com.br).

Ana Maria Severiano de Paiva / Professora do Mestrado Profissional em Educação Matemática da USS, Vassouras, RJ (anaseveriano@uol.com.br).

Ana Paula Jahn / Professora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, UNIBAN (anapjahn@gmail.com).

Andréia Maria Pereira de Oliveira / Professora do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana. Membro do Núcleo de Pesquisas em Modelagem Matemática (ampodeinha@uol.com.br).

Antonio Vicente Marafioti Garnica / Livre-docente pelo Departamento de Matemática da UNESP de Bauru. Professor dos cursos de pós-graduação em Educação Matemática (UNESP-Rio Claro) e Educação para a Ciência (UNESP-Bauru) e coordenador do Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática (vgarnica@fc.unesp.br).

Clarissa Trojack Della Nina / Professora da ULBRA e do IEE Vasconcelos Jardim (prof.clarissatrojack@hotmail.com).

Helena Noronha Cury / Professora do mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática da UNIFRA, Santa Maria, RS (curyhn@via-rs.net).

Heloisa da Silva / Doutora pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro e docente das Faculdades Claretianas de Rio Claro-SP (helo_da_silva@terra.com.br).

Ilaine da Silva Campos / Graduada do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana (ila_scampos@yahoo.com.br).

Lourdes de la Rosa Onuchic / Professora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro (lonuchic@vivax.com.br).

Maiana Santana da Silva / Graduada do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana. Membro do Núcleo de Pesquisas em Modelagem Matemática (maai.san@gmail.com).

Marcio Antonio Silva / Professor da Universidade Metodista de São Paulo (UMESP), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (marcioantonio2005@uol.com.br).

Maria Elvira Jardim Menegassi / Professora do Colégio Dom Bosco (elvira4@terra.com.br).

Mercedes Matte da Silva / Professora do Colégio Farroupilha (mercedesmatte@terra.com.br).

Mirian Tomazetto / Professora da Educação Básica (mtomazetto@bol.com.br).

Monica Karrer / Professora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN) e do Centro Universitário da FEI (mkarrer@uol.com.br).

Norma Allevato / Professora da Universidade Cruzeiro do Sul, UNICSUL, São Paulo (normallev@uol.com.br).

Rafael Teixeira dos Santos / Mestrando do PPGEduc/UFRRJ, professor do Centro Universitário de Volta Redonda e do Centro Universitário Geraldo Di Biase (rafa.teixeira@gmail.com).

Sumaia Cury Vazquez / Pesquisadora do projeto *e*Math, da Rutgers University - Newark, New Jersey, EUA (Sumaia_ns@yahoo.com).

NORMAS EDITORIAIS

O Boletim GEPEM (ISSN 0104-9739) é uma publicação semestral e acolhe, com vistas à divulgação, artigos ou comunicações que possam contribuir para o progresso da Educação Matemática ou para a troca de experiências e idéias entre pesquisadores, educadores e professores de Matemática.

As propostas de *artigo* ou *relatos* de *experiência* devem conter Título (em português e inglês), Nome do(s) autor(es), Resumo de aproximadamente 100 palavras (em português e inglês) e *até* 5 palavras-chave, instituição a que está vinculado o autor, endereço, telefone, fax e endereço postal e eletrônico. O arquivo do artigo deve conter entre 25000 e 30000 caracteres (com espaço) e o do relato 10000 e 15000 caracteres. As *resenhas* devem conter 2 páginas no máximo. O texto deverá ser submetido somente através do Sistema Eletrônico de Editoração e Revistas (SEER), http://www.ufrrj.br/seer/index.php/gepem.

As *referências bibliográficas* devem estar de acordo com as normas da ABNT (NBR 6023/2002), por exemplo:

> Para livros: SOBRENOME, prenome (abreviado) / **Título:** subtítulo. Local: Editora, ano.
> Para periódicos: SOBRENOME, prenome (abreviado) / Título. **Nome do periódico**, local, v., n., página inicial, página final (ex.: p.2-17), ano:
> Para artigos em meio eletrônico (CD-ROM, online etc.):
> SOBRENOME, prenome / Título. Local, (volume, número etc), ano. Meio (disquete, CD-ROM, endereço disponível na rede, data de acesso etc).
> Citações: as transcrições com mais de três linhas devem ser destacadas com recuo de 4cm da margem esquerda, com letra menor que a do texto utilizado e sem aspas.

As notas de rodapé devem vir ao longo do artigo e recomendamos que sejam evitados identificações de autoria ao longo do texto. Podem ser enviadas propostas em português ou espanhol. Cada trabalho será examinado pela Comissão Editorial e pelos Consultores, a quem os trabalhos são enviados sob anonimato. Os trabalhos refletem a opinião dos autores.

O GEPEM também pode auxiliar os autores na elaboração de seus textos. No entanto, a versão final do material enviado passará pela análise e avaliação dos consultores.

Editorial

Você está recebendo o Boletim Gepem referente ao segundo semestre de 2009. Artigos de pesquisadores nacionais de diferentes regiões da federação e de uma colaboradora internacional enriquecem o fascículo. Mais uma vez nossa Revista cumpre sua função de ser um veículo qualificado de divulgação científica, com uma pluralidade e abrangência nacional significativa e, inclusive, com inserções internacionais. Inserções essas que tem sido interesse constante de pesquisadores estrangeiros.

Iniciando o número, as educadoras *Ana Paula Jahn* e *Monica Karrer* apresentam um estudo relativo ao ensino e à aprendizagem da noção de transformação linear em um contexto de estudantes universitários da área computacional. A pesquisa foi desenvolvida com base na teoria dos registros de representação semiótica e adotando a metodologia dos *design experiments*. Foram realizadas análises de livros didáticos e de um questionário. Os resultados apontam deficiências com relação ao uso dos registros numérico-tabular e gráfico de uma transformação linear. Reflexões sobre a implementação de atividades com o *Cabri-Géomètre* e com papel e lápis também são promovidas.

Sumaia Cury Vazquez discute resultados de uma pesquisa desenvolvida com crianças de origem hispânica em duas escolas públicas do Estado de New Jersey (USA). A investigação analisou dois grupos (um bilíngue e o outro em processo de aquisição da língua inglesa) de crianças enquanto realizavam problemas de análise combinatória. Os resultados mostram que as crianças bilíngues construíram representações mais sofisticadas do que o grupo ainda não bilíngüe. A análise dos discursos também revelou maior habilidade entre os bilíngues para resolver problemas e conflitos surgidos durante a sua resolução.

Em seu artigo, *Heloisa da Silva* e *Antonio Vicente Garnica* contribuem com reflexões sobre a história do Centro de Educação Matemática (CEM/SP), buscando analisar a identidade desse Centro construída no trabalho de um grupo de professores. Utilizando-se da História Oral e do Modelo dos Campos Semânticos o estudo tem como um dos resultados a elucidação de *narrativas* de (e sobre) um grupo de professores formadores e educadores matemáticos, histórias *de quem sabe dar conselhos* sobre a formação do professor de matemática.

O artigo de *Adair Nacarato* e *Mirian Tomazetto* apresenta resultados de uma pesquisa realizada com alunos de 6ª série. O estudo teve o propósito de analisar os conhecimentos matemáticos produzidos e mobilizados por estudantes e professor. As autoras discutem a natureza e as potencialidades das tarefas que possibilitam a investigação matemática do discente em um exemplo relacionado à desigualdade triangular. A análise destaca a importância da criação de um cenário para investigação cuja dinâmica valoriza os processos de discussão, diálogo e comunicação nas aulas, o papel da escrita e a necessidade de criação de uma outra cultura de aula de matemática.

O quinto artigo, de autoria de *Marcio Antonio Silva*, examina a proposta curricular do Estado de São Paulo e aponta evidências para a existência de duas distintas concepções de Educação Matemática: currículo por competências e currículo crítico. A intenção do autor é mostrar que estas tendências não possuem pontos em comum e que, no caso do Estado analisado, denotam uma dificuldade na concepção da proposta. O ensaio aponta também dificuldades com a adoção do termo competências, localizando duas acepções contraditórias para o mesmo. Algumas outras dificuldades indicam que a proposta acaba por cumprir objetivos uniformizadores, não oportunizando a enunciada criticidade e reforçando o afastamento da escola da realidade do país.

A contribuição das educadoras *Norma Allevato* e *Lourdes Onuchic* está em propor a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (RP). As autoras fazem uma contextualização histórica, apresentam fundamentos da RP e orientações para implementação em aulas. O ensaio propicia-nos refletir sobre as possibilidades que a metodologia proposta oferece no incremento da aprendizagem e do ensino e da promoção das práticas dos docentes em matemática.

A professora *Helena Noronha Cury*, mediante um ensaio teórico, toma o debate da filosofia da matemática para abordar questões do ensino de matemática. A leitura do artigo propicia reflexões para um debate que focaliza as relações entre filosofias da matemática e práticas pedagógicas.

A modelagem na prática docente é a temática do oitavo artigo deste fascículo. Nele, *Andréia de Oliveira, Ilaine Campos* e *Maiana da Silva* identificaram e analisaram as estratégias utilizadas por uma professora na implementação da modelagem. Os resultados evidenciam que as estratégias (para os momentos iniciais, para a coleta das informações e para justificar o objetivo do ambiente) utilizadas pela professora foram fundamentais para o desenvolvimento do ambiente de modelagem e interferiram no envolvimento dos alunos. Segundo as autoras, essas estratégias tiveram como propósitos: justificar a importância da atividade, viabilizar o desenvolvimento da atividade e envolver os estudantes.

O relato das professoras *Clarissa Trojack Della Nina, Maria Elvira Jardim Menegassi e Mercedes Matte da Silva* ilustra-nos contribuições de um coletivo docente que buscou inovações para o trabalho com análise combinatória. As educadoras utilizaram dois tipos de materiais: um chamado de objetos de aprendizagem (formado por fichas e materiais confeccionados pelo próprio grupo) e outro denominado jogo das torres (composto de pinos plásticos de cores diferentes e que se encaixam). Segundo as docentes, a resolução de problemas de combinatória desperta nos estudantes a curiosidade e a vontade de encontrar soluções para outros problemas.

Fechando o número você lerá duas resenhas. Uma feita pelo professor *Rafael Teixeira dos Santos* e a outra pela professora *Ana Maria Severiano de Paiva.* Entre e confira.

Lembramos que nossa Revista está com a sua versão no Sistema Eletrônico de Editoração e Revistas (SEER). Estamos estudando a possibilidade de disponibilizarmos versões anteriores, pelo menos, as que possuímos os arquivos em versão digital. Além de ampliarmos o seu acesso e visibilidade, todo processo de submissão de material (artigos, relatos de experiência e resenhas) e de gestão editorial está funcionando no referido sistema. Continuaremos publicando a versão impressa do Boletim. Para isso, continuamos contando com a sua anuidade.

Continuamos trabalhando pela democratização da produção científica em educação matemática e pela qualidade do material publicado, sem distanciar-nos do propósito do Boletim Gepem e do interesse do seu leitor. Desta forma, somos gratos aos consultores, aos autores que acreditam em nosso trabalho ao submeter suas propostas, aos sócios que colaboram com a atualização de sua anuidade. Assim, podemos continuar aumentando o número de doações e permutas.

Comitê Editorial

Transformações lineares planas: Um estudo com base nos registros de representação semiótica e na utilização da geometria dinâmica

Monica Karrer
Professora da UNIBAN/SP e do Centro Universitário da FEI
mkarrer@uol.com.br

Ana Paula Jahn
Professora da UNIBAN/SP
anapjahn@gmail.com

Resumo
Este artigo apresenta um estudo relativo ao ensino e à aprendizagem da noção de transformação linear. Baseados em considerações teóricas sobre registros de representação semiótica e aprendizagem em Matemática, foram realizadas análises de livros didáticos e de um questionário aplicado a oitenta e seis estudantes universitários da área computacional. Estes estudos apontaram deficiências com relação ao uso dos registros numérico-tabular e gráfico de uma transformação linear. Utilizando a metodologia de *design experiment,* foram elaboradas e aplicadas atividades envolvendo diversas representações de transformações planas, nos ambientes *Cabri-Géomètre* e papel&lápis. Os principais resultados deste experimento são aqui relatados, destacando-se o papel do *software* utilizado.

Palavras-chave: Transformações Lineares, Registros de Representação Semiótica, Livros Didáticos, *Design Experiment*, *Cabri-Géomètre*.

Plane linear transformations: a study based on semiotic representation registers and on the use of dynamic geometry

Abstract
This paper presents a study concerning the teaching and learning processes related to linear transformations. Using as its theoretical basis the theory of semiotic register of representation, this study analyzed the use of registers and conversions between registers in textbooks as well as responses to a questionnaire about linear transformations, administered to eighty-six computer science students. Results point to deficiencies in the use of graphical and matrix registers of linear transformations. Within a *Design Experiment* methodology, activities involving various representations of plane transformations were elaborated and applied, using the environments *Cabri-Géomètre* and paper&pencil. The role of the software and the main results concerning the experiment are emphasized in this paper.

Keywords: Algebraic Education; Algebraic Thinking; Algebraic Language; Written Work; Assessment Process.

Introdução

Este artigo expõe um estudo relativo ao ensino e à aprendizagem das transformações lineares, conteúdo geralmente desenvolvido na disciplina de Álgebra Linear de diversos cursos da área de exatas. Iniciaremos apresentando uma visão geral desse estudo, evidenciando, em seguida, as etapas que serão focalizadas neste artigo.

Várias pesquisas, como as de Dorier (1997, 1998) e as de Sierpinska *et al*. (1999a; 1999b), mostram inúmeras dificuldades de estudantes na aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear, relacionadas principalmente ao seu caráter formal e à sua abordagem essencialmente algébrica. Tais evidências despertaram nosso interesse em investigar como conteúdos desta disciplina são abordados no contexto nacional. Em particular, devido à nossa prática no Ensino Superior em cursos de Engenharia Computacional, optamos por abordar o objeto matemático "transformações lineares", dada a importância de que se reveste este tema na resolução de problemas de Computação Gráfica.

Com base nos pressupostos teóricos de Duval (1995, 2000, 2003), relacionando aprendizagem matemática e representação semiótica, nosso estudo teve por objetivo investigar em que medida situações que envolvem a exploração de diversas representações influenciam na conceitualização do conceito de transformação linear por parte de estudantes universitários. Para tanto, o trabalho consistiu na elaboração, aplicação e avaliação de uma abordagem de ensino do objeto matemático "transformações lineares planas", incorporando diversidade de representações, principalmente a gráfica, com o auxílio do ambiente de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre*. A escolha deste *software* deu-se pelo fato de o mesmo possibilitar um trabalho dinâmico e interativo entre várias representações, relacionando-as e evidenciando diferentes propriedades dos objetos envolvidos. Assim, tivemos, ainda, interesse em analisar o papel desempenhado por este ambiente.

A pesquisa foi desenvolvida em várias etapas, segundo a metodologia do *Design Experiment* (COBB et al., 2003). Inicialmente, além da análise de pesquisas que tratam desta temática, realizamos dois estudos preliminares. Do ponto de vista institucional, elaboramos uma análise de livros didáticos de Álgebra Linear e de Computação Gráfica, tendo em vista o fato de a primeira disciplina ser considerada como pré-requisito da segunda na maioria dos currículos de cursos da área de Computação. Do ponto de vista da aprendizagem, foram avaliadas as produções escritas de oitenta e seis estudantes universitários, a partir de um questionário sobre transformações lineares planas, visando o levantamento de suas concepções em relação a este conteúdo. Em seguida, com base em pesquisas de mesma temática, principalmente as de Sierpinska et al. (1999a; 1999b) e a de Pavlopoulou (1993), e nos resultados destes dois estudos preliminares, elaboramos o experimento principal composto de onze atividades sobre transformações planas, as quais foram aplicadas em duas fases a seis estudantes de um curso de Engenharia da Computação. A primeira fase objetivou verificar o conhecimento prévio dos sujeitos com relação ao objeto matemático em questão. Já a segunda fase procurou explorar situações inovadoras, desenvolvidas com base na avaliação das áreas de compreensão dos estudantes que mereciam maior atenção, as quais foram detectadas nos estudos anteriores.

Neste artigo, optamos por apresentar uma descrição sucinta dos dois estudos preliminares mencionados, uma vez que nosso interesse consiste em trazer à discussão os resultados obtidos em algumas das situações do experimento de ensino do estudo principal. No que segue, apresentamos os elementos teóricos que embasaram a pesquisa.

Principais elementos da fundamentação teórica

Tanto para os estudos preliminares quanto para a elaboração das situações de aprendizagem do estudo principal, a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003) constituiu a base principal. Considerando que o acesso a qualquer objeto matemático é intermediado pela utilização de sistemas semióticos, este pesquisador defende que, para a aprendizagem de um conceito, é necessário tratá-lo explorando as relações entre suas diversas representações, visando que um objeto não seja confundido com uma delas.

Esse autor destaca dois tipos de operação possíveis entre representações: o tratamento e a conversão. Enquanto o tratamento é a operação realizada no interior de um mesmo registro semiótico, a conversão envolve uma transformação entre representações provenientes de registros distintos. Para Duval, é a atividade de conversão que traz ganhos cognitivos, principalmente aquela em que a transformação de uma representação para outra não é próxima de uma "tradução direta", o que ele classifica como *conversão não-congruente*. Isto porque, neste tipo de operação, cabe ao sujeito identificar as variáveis inerentes a cada registro, para que, posteriormente, seja estabelecida a coordenação entre eles. O quadro a seguir apresenta exemplos de conversão.

QUADRO 1: EXEMPLOS DE CONVERSÃO		
Tipo de Conversão	**Sistema ou Registro da Escrita Natural**	**Sistema Simbólico-algébrico**
Conversão congruente	Conjunto de pontos cujas ordenadas são maiores que as abscissas	$y>x$
Conversão não congruente	Conjunto de pontos cujas ordenadas e abscissas têm o mesmo sinal	$x.y>0$
FONTE: DUVAL (2000, p. 63) [1]		

Vários pesquisadores utilizaram-se desta teoria em seus estudos, dentre eles Sierpinska et al. (1999a; 1999b), evidenciando resultados que apontam tanto a dificuldade dos estudantes no estabelecimento de conversões, como a necessidade de melhor explorar este tipo de operação entre registros no ensino de conteúdos da Álgebra Linear. Esses autores investigaram situações sobre vetores e transformações lineares planas, evidenciando as dificuldades dos alunos na interpretação geométrica das condições de linearidade no *Cabri*. O nosso estudo procurou acrescentar outras explorações das transformações planas neste ambiente, tais como as relações entre as representações (gráfica, algébrica, tabular) de transformações aplicadas a diversos objetos geométricos (quadriláteros, triângulo, circunferências) e realização de construções para composição de transformações lineares planas.

Na próxima seção, apresentamos uma breve descrição dos estudos preliminares de nossa pesquisa, constituídos pela análise de livros didáticos e pela aplicação do questionário sobre transformações lineares planas a um grupo de estudantes universitários. Na seqüência, abordamos o estudo principal, foco deste artigo.

Desenvolvimento dos estudos preliminares

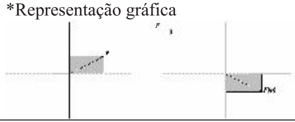
Com base principalmente nos pressupostos da teoria de Duval (2000), foi realizada uma análise dos quatro livros didáticos de Álgebra Linear mais citados nas referências bibliográficas dos cursos da área computacional de doze instituições nacionais de ensino superior. Foram analisadas as obras: Callioli et al. (1995), Boldrini et al. (1980), Anton e Rorres (2001) e Lay (1997). Tais obras são identificadas neste texto por Livros 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

O objetivo desta análise constituiu em evidenciar os registros mais presentes e as conversões mais exploradas na abordagem das transformações lineares dessas obras. A análise foi dividida em duas partes: análise do que denominamos "parte teórica" e análise dos exercícios propostos. A parte teórica refere-se ao texto de apresentação dos conceitos, incluindo definições, propriedades,

[1] Traduzido por nós do original em Inglês.

exemplos, exercícios resolvidos e demais tópicos, com exceção das atividades ou exercícios propostos.

Para esta análise, os registros e as representações foram devidamente identificados e definidos. O quadro seguinte contém exemplos da classificação realizada.

<table>
<tr><td colspan="3">QUADRO 2: CLASSIFICAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES</td></tr>
<tr><th>Tipo de registro</th><th colspan="2">Representações</th></tr>
<tr><td>Registro simbólico</td><td>*Representação simbólico-algébrica
$T(x_1, x_2) = (-x_1+x_2, x_2)$
(Livro 3, p. 146)</td><td>*Representação simbólico-matricial
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (Livro 2, p. 148)</td></tr>
<tr><td>Registro gráfico</td><td colspan="2">*Representação gráfica
 (Livro 2, p. 148)</td></tr>
<tr><td>Registro numérico</td><td>*Representação de n-uplas
Ex: F(1, 2) = (3, -1)
(Livro 1, p. 108)</td><td>*Representação tabular
Ex: $\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix}$ (Livro 1, p. 140)</td></tr>
<tr><td>Registro da língua natural</td><td>*Representação da língua natural de emprego comum (analisada em situações-problema)

Ex: Ache a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $x=y$. (Livro 2, p. 171)</td><td>*Representação da língua natural de emprego especializado
Ex: Seja F: U→V uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1), ...F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora. (Livro 1, p. 111)</td></tr>
<tr><td colspan="3">FONTE: JAHN & KARRER (2004, p. 18)</td></tr>
</table>

Como a intenção foi a de explorar a “introdução” às transformações lineares, a análise foi limitada aos seguintes tópicos: transformações lineares (introdução, definição e exemplos), transformações geométricas no plano e no espaço e matriz de uma transformação linear. Dos conteúdos selecionados, foram analisados os registros de representação semiótica presentes e as eventuais relações estabelecidas entre as diversas representações. Na seção de exercícios propostos, foi realizado, também, um levantamento quantitativo da presença de representações e de conversões explicitamente indicadas nos seus enunciados.

Além desta análise, verificamos se os recursos computacionais eram mencionados ou referenciados no desenvolvimento dos conteúdos nos livros didáticos mais atuais, identificando o papel por eles assumido. Ainda que não constituam a única fonte de trabalho da prática docente, partimos da premissa de que os livros didáticos assumem um papel de referência na atividade do professor. Sendo assim, sem ter a pretensão de esgotar as inúmeras variáveis que possam interferir nos processos de ensino e de aprendizagem, a análise das obras didáticas de Álgebra

2 Para mais detalhes, ver Jahn & Karrer (2004) e Karrer (2006).

Linear mais citadas em cursos da área de Computação representou uma opção para esta pesquisa, a fim de se obter um referencial para a elaboração de conjecturas a respeito do tipo de ensino que pode estar sendo desenvolvido no nível universitário.

Os resultados dessa análise indicaram que, na parte dos exercícios propostos das obras analisadas, as relações entre os registros gráfico, simbólico-matricial e numérico-tabular são pouco enfatizadas, principalmente as conversões que têm o gráfico como registro de partida. Ainda, foi observado que os Livros 3 e 4 mencionam o uso de *software*, porém, de forma pontual, com um papel direcionado à minimização do trabalho com cálculos algébricos e numéricos e não para questões exploratórias ou envolvendo gráficos.

Com relação à avaliação das obras de Computação Gráfica, adotamos o mesmo critério mencionado anteriormente e selecionamos, assim, os dois livros mais citados nos cursos da área computacional das mesmas doze instituições nacionais de ensino superior. Foram analisadas as obras: Angel (1997) e Foley et al. (1990).

Novamente com base na teoria de Duval (1995, 2000, 2003), a análise destes livros indicou que, na disciplina de Computação Gráfica, é necessário estabelecer constantemente relações envolvendo os registros gráfico, simbólico-matricial e numérico-tabular. Tal fato apontou um descompasso entre o que é valorizado em Álgebra Linear e o que é enfatizado em Computação Gráfica, em termos de explorações de registros e de conversões. De fato, as relações entre estes registros são primordiais no desenvolvimento de questões da área de Computação Gráfica, entretanto, são pouco exploradas nos livros de Álgebra Linear considerados.

Esta constatação suscitou o nosso interesse em analisar as concepções de estudantes de cursos de Ciência da Computação e/ou de Engenharia da Computação com relação às transformações lineares planas e identificar como os mesmos lidam com as diversas representações desse objeto. Desta forma, um questionário contendo cinco atividades sobre este conteúdo foi aplicado a oitenta e seis estudantes provenientes de quatro instituições particulares de Ensino Superior da cidade de São Paulo. A seleção das instituições ocorreu principalmente em função da possibilidade de acesso e da disponibilidade de professores voluntários que se dispuseram a aplicar o questionário. A seleção dos estudantes levou em conta o fato de os mesmos já terem cursado a disciplina de Álgebra Linear no semestre anterior à aplicação e serem sujeitos provenientes de cursos da área de Computação.

As questões procuraram explorar, relativamente ao conteúdo específico das transformações lineares planas, as diversas representações e conversões, tanto congruentes como não congruentes. Tendo em vista nossa intenção de privilegiar a apresentação do estudo principal e melhor situar o leitor na problemática delimitada, relatamos aqui apenas os principais resultados da aplicação do questionário[3], os quais subsidiaram a elaboração do experimento de ensino.

Os resultados evidenciaram pouco conhecimento dos estudantes em relação às diversas representações, grande dificuldade no estabelecimento de conversões e uma constante associação do objeto matemático "transformação linear plana" exclusivamente com sua representação algébrica. Quando o enunciado não especificava um tipo de registro a ser utilizado, observou-se que os estudantes pouco diversificaram as representações. De fato, nestas situações, a maioria das resoluções foi apresentada na língua natural de emprego comum e de forma insatisfatória. O menor sucesso ocorreu na questão que envolvia conversão do registro gráfico para o numérico-tabular, o que talvez possa ser explicado pelo fato de este tipo de operação ser um dos menos explorados nos livros de Álgebra Linear analisados. Na questão que solicitava a análise da linearidade de um cisalhamento horizontal, somente dois alunos responderam corretamente e, para os demais, as condições de linearidade sequer foram citadas. Contatou-se ainda que deficiências no conceito de função, tais como confusão entre função linear e função polinomial de primeiro grau (com $b \neq 0$) e dificuldades na identificação do domínio e do contradomínio de uma dada aplicação, interferiram na resolução de certas tarefas para aproximadamente 65% dos estudantes. Uma parcela dos estudantes – mais precisamente 24 alunos do total de 86 sujeitos, provenientes de instituições distintas – entendia que a transformação linear aplicada a um objeto geométrico não o "deformava". Tal fato os levou a negar a linearidade de um cisalhamento horizontal e a justificar que um quadrado não poderia ser transformado em um segmento por meio de uma aplicação linear. Por fim, observou-se que várias resoluções foram desenvolvidas com base na percepção e não na análise consciente das conversões inerentes ao problema.

Esses resultados colocaram-nos na perspectiva de elaboração de um experimento de ensino sobre transformações lineares, o qual denominamos estudo principal, englobando diversas representações, bem como atividades de conversão, principalmente as que envolviam os registros gráfico e numérico-tabular. Partimos da hipótese de que um trabalho com foco na diversidade de representações semióticas e na atividade de conversão envolvendo principalmente o registro gráfico, aliado ao uso de um recurso computacional, poderia auxiliar os estudantes na (re)construção de significados para a noção de transformação linear.

A seguir, apresentamos considerações sobre este estudo principal, descrevendo a concepção e o desenvolvimento de algumas situações do experimento.

---

3 Para mais detalhes, ver Karrer (2006).

Desenvolvimento do estudo principal

Diante das evidências obtidas nos estudos preliminares, foi elaborado um conjunto de tarefas sobre transformações lineares planas. Para isso, optamos por adotar a metodologia de pesquisa denominada *Design Experiments* (COBB et al., 2003), a qual parte de um conjunto de atividades sobre determinado conteúdo, com o objetivo de analisar as estratégias de resolução adotadas pelos estudantes quando estes se deparam com uma abordagem diferente da que já vivenciaram.

Esta metodologia possui a característica de representar o ponto de partida para futuras inovações, tendo por base a análise de dados já existentes. Em geral, ela foca no desenvolvimento que ocorre no interior de um ambiente conceitualmente rico, explicitamente desenhado para otimizar as chances de ocorrerem desenvolvimentos relevantes de forma observável.

Outra característica fundamental desta metodologia é sua natureza flexível, uma vez que o desenho inicial é reformulado de acordo com as trajetórias e necessidades apresentadas pelos sujeitos. Esta flexibilidade garante o caráter cíclico do experimento, no sentido de possibilitar o retorno às atividades propostas inicialmente, com inserção de situações e questionamentos não previstos, mas que se mostrem necessários durante o processo. Conseqüentemente, o professor-pesquisador, o qual adota uma participação ativa no processo, deve estabelecer constantes reflexões sobre seu papel, procurando compreender e interpretar as construções dos estudantes.

Em nosso estudo, o próprio pesquisador assumiu o papel de professor, o que constitui uma das modalidades de trabalho neste tipo de metodologia. As interações do professor-pesquisador com os estudantes restringiram-se ao estabelecimento de questionamentos, reflexões e propostas de atividades, uma vez que o foco se encontra na análise do raciocínio dos sujeitos e nas adaptações às suas trajetórias de aprendizagem.

Com o intuito de explorar diversas conversões, optamos por utilizar o *software Cabri-Géomètre*. Com isso, pretendíamos observar o papel desempenhado por este ambiente de geometria dinâmica na aplicação do experimento. A seleção deste recurso deu-se, sobretudo, pelo fato de o mesmo possibilitar uma abordagem por meio de diferentes registros, em particular, do gráfico. Cabe salientar que, com este *software*, foi possível elaborar atividades que relacionam as representações algébrica, numérico-tabular e gráfica de forma dinâmica. Neste sentido, qualquer alteração em uma dessas representações provoca mudanças, em tempo real, nas demais. Como veremos na seqüência, o desenvolvimento de certas situações não seria possível no ambiente convencional do *papel&lápis*, tanto em relação aos recursos disponíveis quanto ao tipo de problema a ser tratado.

O experimento deste estudo foi desenvolvido em duas fases, as quais foram aplicadas a seis sujeitos, que foram identificados neste contexto por estudantes A, B, C, D, E e F. Todos eram estudantes de uma turma do sétimo semestre do curso de graduação em Engenharia da Computação de uma instituição de ensino particular da cidade de São Paulo[4], os quais já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear, mas não a de Computação Gráfica, principal critério de seleção dos sujeitos. Como os sujeitos não conheciam o *Cabri*, eles participaram de duas sessões, de sessenta minutos cada, para a familiarização com este *software*, desenvolvendo atividades de construções geométricas e explorando diversas ferramentas. Ressaltamos que o objetivo desta etapa não consistiu em introduzir conceitos de Álgebra Linear, mas sim em iniciar os estudantes na geometria dinâmica, enfatizando seu caráter dinâmico e o papel do deslocamento.

Com relação ao conteúdo de transformações lineares, a intenção foi fornecer uma abordagem diferenciada com foco na exploração da diversidade de registros e conversões, incluindo situações construídas com base na problemática levantada pelos estudos preliminares. Desta forma, procuramos desenvolver tarefas envolvendo relações entre os registros numérico-tabular, gráfico e algébrico, situações de interpretação gráfica das condições de linearidade, exploração de transformações lineares aplicadas em objetos gráficos não usuais, tais como circunferências e elipses, dentre outras explorações.

Os seis estudantes participaram de duas fases do experimento. Na primeira fase, composta de uma atividade, foram propostas quatro tarefas desenvolvidas no ambiente papel&lápis, com o objetivo de verificar o conhecimento prévio dos sujeitos com relação ao conteúdo de transformações lineares planas, evidenciando se os mesmos apresentariam dificuldades semelhantes às encontradas nas produções dos estudantes que participaram do questionário do estudo preliminar. Esta fase compreendeu uma sessão com duração de noventa minutos, sendo realizada de forma extracurricular, individualmente e sem qualquer interferência do professor-pesquisador.

Na segunda fase, foram propostas dez atividades desenvolvidas nos ambientes *Cabri-Géomètre* e papel&lápis, com possibilidades de interferência da parte do professor-pesquisador. Nesta etapa, os estudantes foram organizados em duplas e realizaram tais atividades na sala de Informática em dez encontros, perfazendo um total de quinze horas. Na seqüência deste texto, as duplas serão identificadas por D1 (formada pelos estudantes A e B), D2 (composta pelos sujeitos C e D) e D3 (relativa aos estudantes E e F).

Na seqüência, apresentamos os principais resultados das duas fases do experimento.

Discussão dos resultados do estudo principal

A análise dos resultados da aplicação principal foi realizada com base na evolução apresentada pelos estudantes da primeira para a segunda fase do *Design*. Para isso, foram coletados, analisados e comparados quatro tipos de dados: os registros escritos das atividades propostas, as transcrições de audiogravações, as quais permitiram observar os diálogos presentes nas interações dos estudantes de cada dupla; as notas do observador relativas às interações entre o professor-pesquisador e os estudantes ao final de cada seção e as telas capturadas dos computadores utilizados por estes sujeitos[5]. Salienta-se que as atividades do *Design* limitaram-se às transformações lineares planas, com a representação dos vetores no plano euclidiano usual.

Na primeira fase (Fase 1), realizada individualmente, todos os estudantes demonstraram desconhecimento da representação numérico-tabular, uma vez que nenhum deles forneceu corretamente a matriz, em relação à base canônica, da reflexão no plano $x0y$ em relação ao eixo y. Quando solicitamos a lei algébrica desta mesma transformação, somente dois apresentaram respostas corretas. Quanto aos demais sujeitos, dois não responderam a questão, e os outros dois apresentaram respostas com inadequações notacionais, tais como "F(x,y)F'(-x,y)" e "F(-x,y)" (estudantes D e F respectivamente, na Atividade 1c da Fase 1).

Ao solicitarmos a análise das condições de linearidade desta mesma transformação, as resoluções não foram expressas com clareza e correção nas produções dos estudantes. Apenas um sujeito apresentou a condição relativa à adição, e ainda assim, descrita para casos particulares e com problemas de representação, conforme reproduzido a seguir.

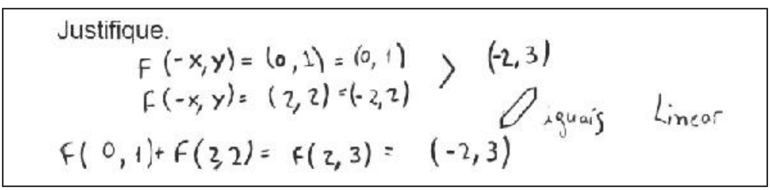


Figura 1: Resolução do Estudante D – Atividade 1b da Fase 1 do *Design*

De acordo com a análise preliminar, havíamos previsto que os sujeitos poderiam apresentar dificuldades na justificação da linearidade, pois o trabalho com o registro da língua de emprego especializado não é algo simples para o estudante, conforme observado nas pesquisas de Sierpinska et al. (1999a; 1999b) e na análise

[5] A captura de telas foi realizada a partir da utilização do programa IrfanView32, disponível em: www.irfanview.com.

dos dados do questionário que compôs o nosso estudo preliminar. Por outro lado, cinco estudantes demonstraram dominar o processo de determinação da lei algébrica de uma transformação linear no plano, partindo de um enunciado que oferecia as imagens, na representação de n-uplas, dos elementos de uma base do R^2. A tarefa proposta é apresentada na figura abaixo.

Seja F uma transformação linear tal que F: $R^2 \rightarrow R^3$ / F(1,-1)=(0,-2) e F(0,3)=(3,6). Determine F (x,y).

Figura 2: Atividade 2b da Fase 1 do *Design*

Este resultado já era esperado, tendo em vista que este tipo de tarefa é usual nos livros didáticos analisados. Apesar disso, em uma situação similar, na qual as imagens de dois vetores do plano eram fornecidas no registro gráfico, nenhum aluno conseguiu estabelecer a conversão necessária para sua resolução. Tal fato parece indicar que, para estes estudantes, o processo de determinação de uma transformação linear é realizado de maneira mecanizada ou apenas associado ao primeiro tipo de atividade. Nesta primeira fase, também observamos que os estudantes pouco diversificaram as representações. As conversões partindo do gráfico foram aquelas nas quais eles apresentaram maior dificuldade. Por exemplo, nenhum aluno resolveu corretamente a tarefa seguinte.

Determine a lei algébrica da transformação linear T(x,y) do R^2 em R^2, que transforma o quadrado azul de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1) no quadrilátero destacado em vermelho, segundo a condição T(0,1)=(-2,1) [6]

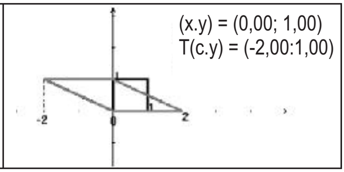


Figura 3: Atividade 3a da Fase 1 do *Design*

Nestas condições, três estudantes não apresentaram resposta e os outros três estabeleceram apenas a correspondência entre os vértices do quadrado e os vértices de sua imagem. Ainda nesta primeira fase, cinco estudantes consideraram equivocadamente a translação como linear, pelo fato de a mesma preservar a forma do objeto. Por fim, cinco sujeitos não aceitaram a circunferência como objeto inicial de uma transformação linear, uma vez que, em suas compreensões, uma transformação linear só poderia ser aplicada a vetores, segmentos ou figuras poligonais.

A seguir, apresentaremos atividades que compuseram a Fase 2 do experimento. Esta fase foi composta de dez atividades, das quais foram selecionadas

[6] As cores azul e vermelha, nas figuras do texto, correspondem às cores preta e cinza, respectivamente.

duas para discussão neste artigo. A atividade que segue teve como objetivo fornecer ao estudante um ambiente favorável para o estabelecimento das relações entre as representações gráfica, tabular e algébrica das transformações lineares no plano. Foram elaboradas, no *Cabri*, construções que possibilitavam alterações dos elementos da representação numérico-tabular (matriz da transformação linear em relação à base canônica), relacionados às representações gráfica e algébrica. Quando os valores da matriz eram alterados, era possível observar, de forma simultânea e dinâmica, as conseqüentes implicações nas outras duas representações, conforme exemplificado na figura abaixo.

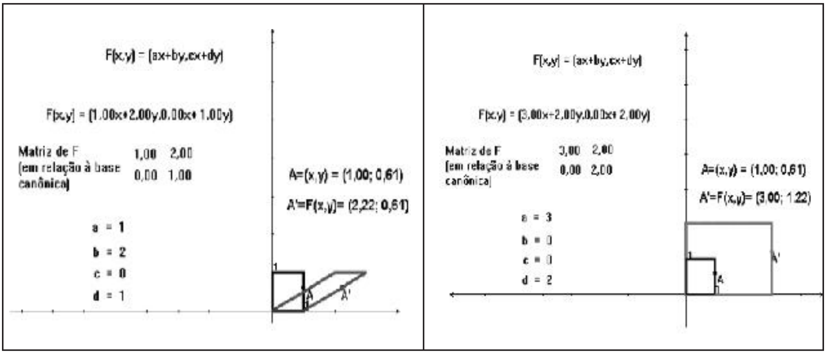
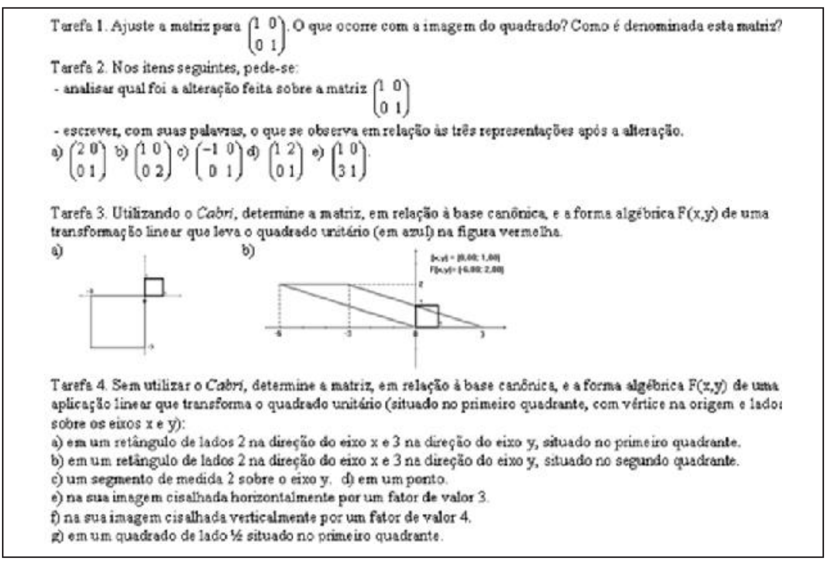


Figura 4: Telas do *Cabri* com as representações de uma transformação linear

Com base nesta atividade, foram propostas diversas tarefas, dentre elas as situações descritas a seguir.



Tarefa 1. Ajuste a matriz para $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. O que ocorre com a imagem do quadrado? Como é denominada esta matriz?

Tarefa 2. Nos itens seguintes, pede-se:
- analisar qual foi a alteração feita sobre a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- escrever, com suas palavras, o que se observa em relação às três representações após a alteração.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Tarefa 3. Utilizando o *Cabri*, determine a matriz, em relação à base canônica, e a forma algébrica F(x,y) de uma transformação linear que leva o quadrado unitário (em azul) na figura vermelha.

a) b)

Tarefa 4. Sem utilizar o *Cabri*, determine a matriz, em relação à base canônica, e a forma algébrica F(x,y) de uma aplicação linear que transforma o quadrado unitário (situado no primeiro quadrante, com vértice na origem e lados sobre os eixos x e y):

a) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no primeiro quadrante.
b) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no segundo quadrante.
c) um segmento de medida 2 sobre o eixo y. d) em um ponto.
e) na sua imagem cisalhada horizontalmente por um fator de valor 3.
f) na sua imagem cisalhada verticalmente por um fator de valor 4.
g) em um quadrado de lado ½ situado no primeiro quadrante.

Figura 5: Atividade 3 da Fase 2 do *Design*

Após o desenvolvimento de tais tarefas, esperava-se que os estudantes generalizassem a implicação de cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nas representações algébrica e gráfica correspondentes. Nesta fase, este objetivo só foi atingido pela Dupla 3, justamente aquela que se ateve a uma descrição mais detalhada da relação entre as representações tabular, gráfica e algébrica desde a primeira tarefa. Já os estudantes das duplas D1 e D2 realizaram a situação no *Cabri* por tentativas, ou seja, nas tarefas iniciais não mostraram preocupação em observar as relações entre as três representações. Desta forma, com o intuito de favorecer uma evolução nestas relações e condizente com a característica da metodologia adotada, que prevê tanto a flexibilidade como o caráter cíclico do *Design*, foram elaboradas e inseridas outras atividades no ambiente computacional, realizando a mesma dinâmica, mas com objetos iniciais diferentes do quadrado, tais como retângulo e triângulo. Com esta inclusão, os estudantes puderam analisar outros casos e, dada a facilidade de observação das relações entre as representações, o objetivo proposto foi atingido.

Este conjunto de tarefas proporcionou a todos os estudantes do experimento uma evolução quanto ao domínio das representações tabular e algébrica, bem como das relações entre estas representações e a representação gráfica. Para esta constatação, comparamos seus desempenhos nas duas fases do *Design*. Na primeira, detectamos, pela análise das produções dos sujeitos, várias dificuldades na resolução de situações que envolviam estas representações. Por exemplo, na Fase 1, quando solicitamos a matriz (em relação à base canônica) da reflexão em relação ao eixo y no plano $x0y$ partindo de sua representação algébrica, o estudante A deixou a tarefa sem resolução (resposta em branco), os estudantes B e C apresentaram a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, o estudante C a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o estudante D a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e o estudante F apresentou a resposta (1,1). Ainda nesta fase, nenhum estudante resolveu um problema que requeria a lei algébrica de uma aplicação linear no plano, partindo de sua representação gráfica. Após esta atividade da segunda fase, tais dificuldades foram amenizadas, tendo em vista que os sujeitos demonstraram domínio em relacionar e operar nas representações algébrica, gráfica e tabular, efetuando as conversões necessárias, inicialmente no ambiente *Cabri* e, posteriormente, sem necessitar do auxílio deste *software*. Concluímos que um trabalho de exploração das relações entre as diversas representações, com foco na análise do impacto que uma mudança em uma representação ocasiona em outras, favoreceu esta evolução. Cabe salientar que esta dinâmica só foi possível porque o *software* utilizado permitiu a manipulação conjunta das representações, possibilitando a visualização simultânea destas relações e configurando um ambiente propício à experimentação, uma vez que os estudantes não se prenderam às atividades propostas, testando freqüentemente valores não presentes nos enunciados.

Após o desenvolvimento da referida atividade do experimento (Atividade 3), notou-se que os alunos passaram a diversificar as representações nas resoluções das tarefas. Como ilustração, apresenta-se a resolução dada pela Dupla 2, composta pelos estudantes C e D, a uma tarefa posterior ao conjunto de situações acima citado. Na Fase 1, estes estudantes apresentaram dificuldades na determinação da matriz canônica de uma transformação linear, bem como no estabelecimento de conversões partindo do registro gráfico. Em uma dada tarefa da Fase 2, desenvolvida somente no ambiente papel&lápis, a dupla respondeu pronta e satisfatoriamente à solicitação de fornecer as representações algébrica e tabular (matriz em relação à base canônica) de uma transformação linear que aplicada à figura azul resultaria na figura vermelha, segundo a condição inicial apresentada na tela.

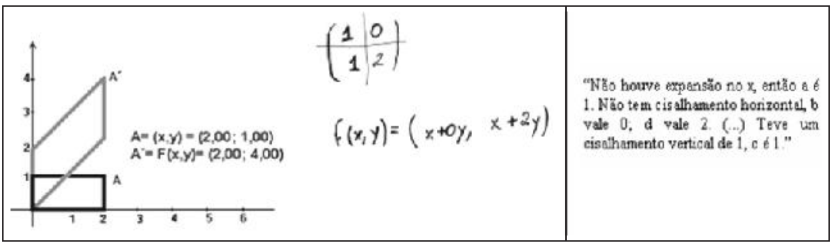


Figura 6: Resolução da Dupla 2 – Atividade 4c da Fase 2 do *Design*

A seguir, apresentamos outra atividade da segunda fase do experimento (Atividade 6), também desenvolvida em duplas, cujo objetivo era analisar como o estudante determinaria a lei algébrica de uma transformação linear partindo das representações gráficas de uma circunferência e de sua imagem. Não seria possível recorrer à estratégia utilizada até então, cuja análise partia do reconhecimento das possíveis transformações geométricas, culminando com a construção da matriz canônica correspondente. Aos estudantes, foi proposta a situação reproduzida no quadro seguinte.

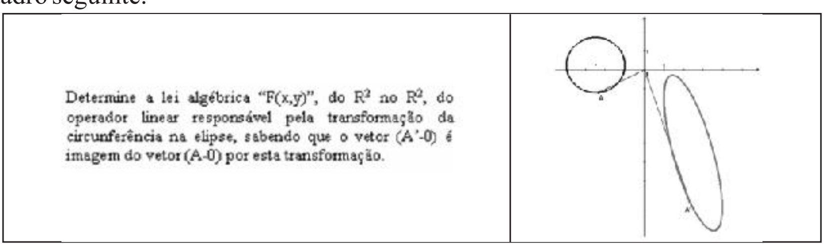


Figura 7: Atividade 6 da Fase 2 do *Design*

Cabe observar que, em atividades anteriores, os alunos já haviam se familiarizado com a possibilidade de aplicar uma transformação a objetos não poligonais. Isto porque, no *Cabri*, é possível transferir a programação referente à relação entre as representações algébrica, gráfica e tabular (cf. macro-construção utilizada na Atividade 3 da Fase 2) para qualquer objeto do plano. Desta forma, os estudantes puderam "experimentar" o programa aplicado a triângulos, retângulos e circunferências. Ressalta-se que, na Fase 1, cinco dos seis estudantes não aceitaram a aplicação de uma transformação linear a uma circunferência. As respostas das duplas na Fase 2 mostram que o contato com essa possibilidade, proporcionada pelo *software*, permitiu evoluções na compreensão deste aspecto por parte dos estudantes.

Na atividade reproduzida na Figura 7, o ponto A da circunferência, extremidade do vetor (A-O), pode ser movimentado sobre ela e o ponto A', extremidade do vetor (A'-O), representa a imagem de A por uma transformação linear. Nesta situação, esperava-se que o estudante detectasse as condições necessárias para a determinação da transformação linear, ou seja, as imagens de dois vetores de uma base do plano, utilizando, para isso, o comando "Coordenadas e Equações" do *Cabri* e a variação do ponto A por meio do deslocamento. Em seguida, bastaria aplicar o procedimento de determinação de uma transformação linear, o qual a maior parte dos alunos demonstrou dominar na primeira fase do experimento.

Inicialmente, as três duplas utilizaram a tentativa e erro como estratégia de resolução. A maior parte dos estudantes observou que, movimentando a extremidade A do vetor (A-O), era alterado apenas o sinal da abscissa do vetor imagem (A'-O). Com isso, os alunos tentaram determinar, da mesma forma, a ordenada de (A'-O), o que não era viável por tentativa e erro. Como não conseguiam definir a lei por essa estratégia, eles procuraram, no software, a existência de comandos que a oferecessem diretamente. Uma dupla (D3) ainda tentou comparar a situação com uma transformação usual. No caso, buscou o comando "Rotação" do *Cabri*, porém, experimentalmente, decidiu que este caminho não era o mais adequado. Esta dupla também determinou a equação da circunferência, mas a transcrição da discussão entre os estudantes mostrou que não tinham um plano de ação para resolver aquela situação. Sendo assim, eles a abandonaram.

Após cerca de quarenta minutos nestes procedimentos, o processo sofreu um bloqueio, ou seja, os estudantes não sabiam como prosseguir e, conseqüentemente, dispersaram-se do problema. Diante desse impasse, o professor-pesquisador lançou o seguinte questionamento para cada dupla: *"o que é necessário para determinar a lei algébrica de uma transformação linear no plano?"*.

A seguir, são apresentados os diálogos estabelecidos entre o professor-pesquisador (PP) e os estudantes das Duplas 1 e 2, identificados por A, B e C, D, após este questionamento.

QUADRO 3: DIÁLOGO ENTRE PROFESSOR-PESQUISADOR E AS DUPLAS 1 E 2	
Dupla 1	Dupla 2
B: Acho que dois pontos... *PP: Por quê?* *B: Porque está no* R^2. *PP: E podem ser dois quaisquer?* *B: Penso em pegar dois pontos fáceis de trabalhar* *A: Não pode ser o zero...* *PP: Por quê?* *A: Porque com ele eu não acho nada.* *B: Bom, já sabemos que são dois pontos, agora precisamos achar T(x,y).* *[...]* *A: Ah, será que é para aplicar aquela técnica de Álgebra Linear? Então eles têm que ser independentes, eles não podem estar numa mesma linha, senão eu não vou conseguir. Ah, deu cai naquele exercício, agora eu vi uma aplicação para ele.*	[A partir da observação no *Cabri*, esta dupla já havia registrado na folha as coordenadas de dois pontos e de suas imagens.] *PP: Por que vocês anotaram dois elementos e suas imagens?* *D: Acho que tem que ser no mínimo dois pontos. Não, acho que dois, porque está no* R^2. *PP: E podem ser dois pontos quaisquer?* *C: Acho que sim.* *D: Mas, e agora?* *PP: Procurem pensar nesta situação...* *Após alguns minutos, a dupla solicitou novamente a presença do professor-pesquisador.* *D: A' é o mesmo que F de A, né?* *PP: Sim.* *D: Então podemos escrever que F de A é igual a (-2,5, 1,5) e F de B é igual a (4, -7,8).*

Analisando os diálogos do quadro anterior, pôde-se verificar que inicialmente as duplas observaram a necessidade de conhecer as imagens de dois vetores no plano, porém somente a Dupla 1 indicou a necessidade de os dois vetores serem linearmente independentes. Para a Dupla 2, a resolução não foi tão imediata. Nota-se que somente quando escreveram as imagens de dois vetores na representação numérica, ou seja, quando estabeleceram a conversão do gráfico-numérico, os estudantes dessa dupla mostraram domínio no processo de obtenção da lei da transformação linear. Acreditamos que isto ocorreu porque, ao efetuar esta conversão, a situação ficou semelhante às questões de determinação da lei usualmente exploradas nos livros de Álgebra Linear. Vale a pena acrescentar que foram observados problemas de escrita no desenvolvimento da tarefa no ambiente papel&lápis, como falta de parênteses e deficiências na notação de função.

Como a Dupla 2 não deixou evidente, em sua resolução, a condição de que os vetores iniciais deveriam ser linearmente independentes, tal fato levou o professor-pesquisador a questionar se a transformação linear poderia ser determinada partindo-se de dois vetores colineares. Os estudantes responderam afirmativamente e, a partir disto, o professor-pesquisador solicitou a esses alunos que determinassem a lei da transformação linear considerando este caso. Repetindo o processo, os sujeitos viram que não era possível, mas inicialmente não verbalizaram a questão da independência linear dos vetores. Depois de algum tempo, o estudante D relatou que os vetores geométricos iniciais deveriam ter direções diferentes, o que foi confirmado pelo professor-pesquisador.

A Dupla 3 apresentou muita dificuldade na resolução desta tarefa. Inicialmente, relatou que seria possível determinar as coordenadas de apenas um vetor e sua imagem, pois na tela só eram dados (A-O) e (A'-O). Os estudantes não observaram o caráter dinâmico do *Cabri* e a possível variação do ponto A sobre a circunferência. O professor-pesquisador procurou alertá-los de que era possível movimentar o ponto A da circunferência. Apesar disso, o problema não residia somente nesta consideração, mas sim, na interpretação das condições necessárias para a determinação de uma transformação linear no plano. Durante praticamente toda a sessão, esta dupla permaneceu na busca de um comando do *Cabri* que pudesse realizar esta transformação. Ainda assim, concluímos que esta atividade proporcionou, à maioria dos sujeitos, uma visão aplicada do processo de determinação da lei de uma transformação linear no plano, ressaltando aspectos e estratégias não usuais no ensino deste conteúdo, relacionando elementos do gráfico às suas representações algébricas.

Com base no desenvolvimento do experimento e nos resultados coletados e analisados destas duas atividades, podemos afirmar que elas proporcionaram um contato diferenciado com o objeto matemático em questão, com foco nas suas explorações gráficas, permitindo um progresso dos estudantes com relação ao domínio das diversas representações de uma transformação linear plana, bem como das conversões envolvendo representações do registro gráfico. A próxima seção, de caráter conclusivo, traz algumas considerações sobre essa evolução e sobre o papel do ambiente *Cabri* no processo investigado.

Considerações finais

Com relação às atividades apresentadas neste artigo, partindo das evidências já relatadas anteriormente na descrição dos resultados da primeira fase do *Design*, verificou-se uma evolução nos conhecimentos dos estudantes, tanto no que se refere à compreensão das características intrínsecas das representações tabular e algébrica, como nas conversões que envolviam estas duas representações e o registro gráfico. Com relação à determinação da lei algébrica de uma transformação linear F, procedimento aplicado pela maior parte dos estudantes quando a mesma era solicitada a partir da representação numérica das imagens de dois vetores de uma base do domínio de F, observou-se que os sujeitos estabeleceram novas reflexões, ampliando suas estratégias. Dentre elas, podemos citar a análise das condições necessárias para determiná-la partindo de uma situação gráfica. De fato, neste tipo de questão, conforme observado na análise dos livros didáticos, normalmente não aparece esta necessidade, uma vez que o enunciado já fornece, na representação de *n-uplas*, as imagens dos vetores de uma base do domínio. De acordo com a fala do estudante A da Dupla 1, reproduzida no Quadro 3, tal situação representou uma aplicação do processo de determinação de um operador linear, usualmente estudado na forma algébrica e não como transformações de figuras.

É certo que, em um primeiro momento, o ambiente *Cabri* acabou por favorecer o estabelecimento de estratégias por tentativa e erro, o que, por sua vez, dificultou a resolução de algumas tarefas. Referimo-nos, particularmente, às tarefas iniciais da segunda fase apresentadas neste artigo (Atividade 3 do *Design*), nas quais a maioria dos estudantes não se ateve a uma análise consciente das relações entre as representações algébrica, gráfica e tabular.

Ao mesmo tempo, na progressão das atividades subseqüentes, este software trouxe vários benefícios para a compreensão de aspectos conceituais das transformações planas. Por exemplo, na análise das telas capturadas durante a segunda fase do *Design*, observou-se que os estudantes freqüentemente testavam valores não presentes nos enunciados. Nas discussões estabelecidas ao final dos encontros entre os estudantes e o professor, foi detectado que este procedimento objetivava a verificação de conjecturas, principalmente com relação à influência dos fatores de cisalhamento e à análise da possível transformação linear em jogo. Desta forma, os recursos e *feedbacks* do *Cabri* – a manipulação dinâmica dos objetos e a visualização simultânea das relações entre as representações gráfica, tabular e algébrica – trouxeram a possibilidade de novas construções por parte dos estudantes e permitiram a exploração de aspectos não usuais no ensino das transformações, como a exploração de conversões que partem do registro gráfico. Estes aspectos, por sua vez, modificaram algumas das concepções iniciais dos estudantes. Afirma-se isso com base principalmente nas seguintes evidências: os sujeitos passaram a conceber a aplicação de uma transformação linear a objetos não poligonais; a observar que há aplicações lineares que não conservam a forma do objeto inicial e a interpretar características de uma transformação linear a partir do relacionamento de elementos envolvidos em suas diferentes representações.

Para a elaboração das atividades do experimento, tivemos a preocupação de integrar elementos geométricos com representações gráficas e fornecer uma abordagem que contivesse subsídios para refletir sobre a reorganização de práticas existentes no domínio do ensino e da aprendizagem da Álgebra Linear. Com a discussão de alguns dos principais resultados do experimento na seção anterior, esperamos ter mostrado a pertinência de nossas escolhas e, talvez assim, trazido uma contribuição para o *design* de cenários de aprendizagem no contexto da formação continuada de professores que atuam no Ensino Superior.

Referências

ANGEL, E. **Interactive Computer Graphics**: a top-down approach with OpenGL. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1997.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.; WETZLER, H.G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H.; COSTA, R.C.F. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 1995.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. **Educational Researcher**, Washington, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

DORIER, J.L. **L'algèbre linéaire en question**. Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditeur, 1997.

DORIER, J.L. État de l'Art de la recherche en didactique. A propos de l'enseignement de l'Algèbre Linéaire à l'université. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.18, n. 2, p. 191-230, 1998.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. **Proceedings of the 24th PME**. Hiroshima: Department of Mathematics Education, Hiroshima University, v.1, 2000, p. 55-69.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

FOLEY, J.D. et al. **Computer Graphics**: Principles and Practice. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

JAHN, A. P.; KARRER, M. Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v.1, n.17, p. 16-28, 2004.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. São Paulo, 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1997.

PAVLOPOULOU, K. Un problème décisif pour l´apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v.1, n. 5, p. 67-93, 1993.

SIERPINSKA, A.; DREYFUS, T.; HILLEL, J. Evaluation of a design: Linear transformations. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 1, p. 9-39, 1999a.

SIERPINSKA, A.; TRGALOVÁ, J.; HILLEL, J.; DREYFUS, T. Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23, 1999, Israel. **Proceedings of the 23th PME**. Haifa, Israel, v.1, 1999b, p. 119-134.

Submetido em dezembro de 2008.
Aprovado em junho de 2009.

Combina ou não combina? Um estudo de caso com alunos bilíngues e não bilíngues, nos EUA

Sumaia Cury Vazquez
Membro do Grupo de Pesquisa eMath
Rutgers University (NJ, USA)
Sumaia_ns@yahoo.com

Resumo
Essa pesquisa foi desenvolvida em duas escolas públicas em zonas urbanas do Estado de New Jersey (USA) com crianças de origem hispânica, entre 8 e 11 anos, alunos de 3ª série, cujos pais são imigrantes que vivem nos EUA. Observamos, em salas de aulas de matemática, dois grupos de crianças, um bilíngue e o outro em processo de aquisição da língua inglesa, enquanto realizavam problemas de análise combinatória. Analisamos algumas representações matemáticas dos dois grupos para tentar entender se o pensar em língua diferente da língua de ensino dificulta a construção de representações em matemática. Os resultados mostraram que as crianças bilíngues construíram representações mais sofisticadas do que o grupo ainda não bilíngüe. Assim como a análise dos discursos revelou maior habilidade entre os bilíngues para resolver problemas e conflitos surgidos durante a resolução deles.[1]

Palavras-chave: Representações Matemática, Bilinguismo, Vídeo.

Does it match or doesn't it match? A case study with bilingual and not bilingual students in the United States

Abstract
This research was developed in two Public Schools, located in urban zones, in State of New Jersey, with Hispanic students, between the ages 8 and 11, in Third grade, whose parents emigrated from their countries for to live in EUA. We observed two groups of children, one bilingual and the other in process to acquire the English language, while they are solving combinatorial problem task. We analyzed some mathematical representation of both groups trying to understand whether to think in different language from the teaching language difficult the representation's construction and the Mathematical thinking. The results showed that bilingual children built more sophisticated representations than the children not bilingual. As well as the discourses revealed that the bilingual students has more skill to solve problems and conflicts arose during problems solving.

Keywords: Mathematical representation, Bilingualism, Vídeo.

1 Esse artigo faz parte da dissertação de mestrado defendida em 2004 sob o título: A construção de representações matemáticas por alunos de séries iniciais em idiomas diferenciados.

Introdução

Esta pesquisa evidencia reflexões a respeito da problemática de projetos desenvolvidos na educação em países nos quais o multiculturalismo[2] é resultante de intenso movimento imigratório. Nessa nova perspectiva multicultural, ocasionada pelo intenso movimento migratório dos países em desenvolvimento para os países desenvolvidos, há um investimento em prol da possibilidade de usar a aquisição lingüística diferenciada da língua materna para propiciar o desenvolvimento cognitivo e a comunicação social, isto amenizaria o choque cultural e lingüístico com o qual as crianças tem se defrontado quando se instalam em um novo espaço geográfico, com cultura e língua diferentes das suas. Essa pesquisa originou-se em tres principais campos de naturezas diferenciadas. O primeiro de base sociocultural – a questão do bilingüismo e do multiculturalismo presentes em países desenvolvidos que recebem imigrantes. O segundo pertinente ao campo de estudos cognitivos, em torno das representações matemáticas por crianças durante a resolução de problemas. O terceiro de natureza metodológica, direcionada à metodologia de gravação em vídeo [denominada usualmente por metodologia de vídeo], usada há quase duas décadas pela *Rutgers University(EUA)*.

Nossa pesquisa de campo partiu da observação e análise de crianças de mesma língua materna [espanhol] divididas em dois grupos, sendo que um deles estava submetido a diferente língua de ensino [inglês]. As observações e análises foram feitas a partir da resolução de problemas usando análise combinatória. Escolhemos crianças hispânicas por constituírem um grande contingente nos EUA. Nosso objetivo geral era investigar e analisar diferenciações relevantes no processo de construção das representações matemáticas de crianças de mesma língua materna, quando submetidas a diferentes línguas de ensino Assim para chegarmos a esse nosso objetivo, partimos de algumas reflexões a respeito do tema investigado. A primeira questão que investigamos requeria observar se houve, ou não, mudança na construção das representações matemáticas dos sujeitos da pesquisa. Como segunda questão tivemos o fato da língua materna ser diferente da língua de ensino dificulta o processo de elaboração das representações matemáticas. A terceira solicitava analisar se o intercâmbio entre as crianças, a partir dos diálogos durante o processo de resolução dos problemas, provocava mudança na construção das suas representações matemáticas. Para chegarmos aos resultados observamos e analisamos as diferentes representações elaboradas pelas crianças, bilíngues e não bilíngues, nos seus discursos, gestos e escritas ao resolverem um dos problemas de

[2] Quando falamos de multiculturalismo, dentro de sua abrangência conceitual, estamos nos referindo à coexistência de grupos de pessoas com diferentes crenças e costumes numa mesma sociedade.

análise combinatória que propusemos. Isso foi conseguido pelas gravações em vídeo, as quais foram exaustivamente visitadas e revisitadas para analisarmos minuciosamente o processo de construção das soluções dos problemas e as representações matemáticas elaboradas pelos dois grupos de crianças. Nas descrições e transcrições dos vídeos observamos e analisamos se o intercâmbio feito pelas crianças durante o processo de resolução de problemas, por meio de diálogos, provocou mudanças na construção das suas representações matemáticas.

Considerando os Sistemas Representativos e o Bilinguismo

A fim de entender o que são sistemas representativos, estudamos Gerald Goldin (1998), Robert B. Davis (1984, 1992), e Robert B. Davis e Carolyn Maher (1993). Quanto ao bilinguismo nos baseamos em François Grojean *Life with two languages*.(1982) e Claude Hagége (1996) que entre outras obras escreveu *Lénfant aux deux langues*. Para analisarmos os discursos das crianças sujeitos da pesquisa durante as construções de representações, usamos alguns conceitos Vygotskianos. Um deles o processo de representação mental, e o outro, mediação.

Goldin (1998) analisa o papel das representações em seus diferentes estágios de desenvolvimento, desde a complexidade de sua estrutura teórica bem como seus resultados empíricos na prática da Educação Matemática. Nessa análise ele aponta a importância do pensamento imaginário, bem como das estratégias e heurísticas, nos *sistemas de representações*. Segundo ele, esse sistema consiste inicialmente de *caracteres ou signos*, que podem ser também descritos como lógica simbólica, palavras faladas, letras de um alfabeto, marcas de pontuação, numerais, símbolos de operação aritmética, componentes de um circuito lógico, ou bases de uma molécula de DNA, Matemática abstrata, ou entidades físicas como números, vetores, matrizes,velocidades ou forças (GOLDIN, 1998, p.143).

Para entendermos a representação matemática é necessário que se faça a distinção entre sistema interno e externo de representação. Fundamental para o ensino e aprendizagem da Matemática é: entender a interação entre esses dois sistemas de representação na conexão entre eles, como por exemplo, o uso de metáforas, imagens e analogias. Quanto à representação interna ela não é só um objeto proveniente da atividade introspectiva, mas também resultante do que o observador pode construir a partir de comportamentos observáveis, como comportamento matemático e também verbal. Davis e Maher (1993) pontuam que as representações mentais não podem ser observadas diretamente, e que as observáveis se referem a representações usando material concreto, representações com desenhos a mão livre, representações em palavras e representações com símbolos matemáticos, por exemplo. Para Davis (1984), todo conceito matemático, técnica ou estratégia que envolvem informações de significados, que são processados e estão presentes em nossas mentes, constituem as representações que em algum momento podem ser externalizadas e apresentadas.

A necessidade de entendermos a construção das representações construídas num ambiente multicultural, nos conduziu a estudar o bilínguismo e sua influência no pensar matemático das crianças envolvidas nessa pesquisa. O bilingüismo está presente em praticamente todos os países do mundo abrangendo diferentes idades e classes sociais. Não é um fenômeno recente, e Grosjean (1982) considera que ele existe desde o começo da história da linguagem humana, pois a necessidade de comunicação entre os diferentes grupos lingüísticos, os quais se encontravam próximos uns dos outros, propiciou a aprendizagem de ambas as línguas ou de uma terceira língua com a qual poderiam se comunicar, dando origem assim a um estado de bilingüismo. Sobre o uso da língua como instrumento para realizar operações matemáticas citamos Grosjean (1982, p. 275). Segundo esse autor a resposta à questão, ”Em que língua você conta?”, 62 por cento dos bilíngües disseram pensar na primeira língua. Kolers (1978) relata que os bilíngües que ele entrevistou tenderam a fazer matemática na língua que eles a aprenderam. Portanto, se eles aprenderam aritmética em uma língua, eles continuariam usando aquela lingua, e se eles tinham aprendido cálculo em outra, eles trocariam para a outra lingua sempre que fizessem cálculo[3]. Constatou-se que os bilíngües possuem uma elasticidade cognitiva superior a dos unilíngües. Este fato tem-se mostrado presente nos resultados obtidos nas provas de inteligência verbal, nas descobertas de regras para soluções de problemas, na formação de conceitos, bem como na capacidade de refletir, pois, por serem habilidades adquiridas, são beneficiadas pela aprendizagem de outra língua que favorece o desenvolvimento cognitivo acima mencionado (HAGÉGE, 1996).

Vindo ao encontro do postulado de Hagége, foi constatado em uma pesquisa, realizada em Londres, que a aprendizagem de uma segunda língua aumenta a densidade da massa cinzenta. Na pesquisa foram observados 83 nativos de fala inglesa, monolíngues e bilíngues. A pesquisa visava testar as diferenças na densidade da massa cinzenta e branca entre esses dois grupos. Recrutaram 25 monolíngues com pouca exposição à uma segunda língua, 25 bilíngues que aprenderam a segunda língua antes dos 5 anos de idade e que a praticavam com frequência, 33 que aprenderam a segunda língua entre 10 e 15 anose que a praticaram

[3] Pudemos constatar esse fato com nossos sujeitos de pesquisa, quando questionadas sobre o uso que elas fazem das línguas (espanhol e inglês) quando resolvem problemas matemáticos.

pelo menos por 5 anos. O resultado revela que a massa cinzenta era maior nos indivíduos que aprenderam a segunda língua até os 5 anos. Estes resultados levam a considerar, dizem os autores da pesquisa, que o cérebro humano sofre mudanças estruturais, em resposta a demanda do meio ambiente como a aprendizagem de outras línguas. (Revista "Nature", 2004). Em nossos resultados, as crianças bilíngues mostraram maior facilidade na elaboração dos argumentos e demonstrações na resolução de problemas em relação as crianças unilíngues. Assim, consideramos importante fazer menção à essa pesquisa realizada na Inglaterra, que veio a confirmar o postulado de Hagége (1996) sobre a elasticidade cognitiva dos bilíngues em relação aos unilíngues, e aos resultados de nossa pesquisa.

Grosjean (1982) postula que a criança bilíngue adquire as duas línguas simultâneas ou quase simultaneamente. A maioria adquire a primeira língua em casa e a outra quando vai para a escola. No caso estudado nessa pesquisa, as crianças de origem hispânica, vivendo nos Estados Unidos da América, receberam aulas de Inglês como segunda língua, ou aprenderam por meio da interação com professores, crianças ou outros membros da comunidade. Algumas dessas crianças já se tornaram bilíngües porque seus pais emigraram para os Estados Unidos da América, antes delas nascerem e, portanto elas falam uma língua em casa [espanhol] com os familiares e outra na escola. Essas crianças revelaram maior desenvoltura nos discursos e nas representações matemáticas. Assim parte das minorias imigrantes tem-se tornado bilíngue até que estejam aptas às classes regulares. Porém, de acordo com Grosjean (1982), no início do século XX as crianças eram mergulhadas em classes de inglês sem nenhum conhecimento da língua e, de maneira geralmente estressante, tornavam-se bilíngües. Segundo ele, esse processo de "mergulhar" a criança em salas de aulas, têm caracterizado muitos programas educacionais no mundo e assim transformado o papel da escola, em uma experiência desagradável infringindo os objetivos educacionais que respeite as diferenças.

Além de investigarmos sobre os sistemas representacionais e sobre certas questões do bilinguismo, fundamentamo-nos em Vygotsky, o qual nos auxiliou na análise dos discursos. Seus pressupostos teóricos foram utilizados para entendermos as relações entre o pensamento e a linguagem na aprendizagem das crianças, e usadas nas observações das diferenças que poderiam ocorrer no processo de construções das representações delas ao resolverem problemas que envolvem raciocínios matemáticos combinatórios. Procedemos nossa pesquisa com dois grupos culturais sendo um bilíngüe [espanhol e inglês] e outro unilíngüe [espanhol], porém em contato com a língua inglesa, nos quais as crianças se desenvolvem, percebem e organizam o real, adquirindo elementos que fazem a mediação entre o indivíduo e seus pares num ambiente de relações interculturais. Inserimos, apoiados na teoria de Vygotsky, como uma das problematizações estudadas, o intercâmbio social. Para Vygotsky (1993, p.30), o homem se relaciona com o mundo pela mediação dos sistemas simbólicos, portanto, estes intermediam a relação do homem com o mundo. De acordo com a sua teoria, *o homem como sujeito do conhecimento não tem acesso direto aos objetos, esse acesso é mediado por meio dos recortes do real operados pelos sistemas simbólicos de que ele dispõe*. Essa idéia de mediação está presente em nossa pesquisa por envolver dois aspectos que constituem eixos básicos no desenvolvimento desse trabalho. Um deles é o processo de representação mental, e o outro é que: os sistemas simbólicos na mediação entre sujeito e objeto de conhecimento, têm origem social. Assim é a cultura, que fornece ao indivíduo os sistemas simbólicos de representação do vivido. Desse modo consideramos importante a idéia de mediação para entendermos e analisarmos as construções das representações matemáticas de crianças de origem hispânica, imersas num contexto cultural diferente do seu.

Outro importante aspecto discutido por Vygotsky e que nos auxiliou na compreensão das construções das representações matemáticas, nos diálogos presentes e desenvolvidos pelos sujeitos dessa pesquisa durante as filmagens envolvendo a resolução de problemas matemáticos, foi a distinção entre diálogo e monólogo e a função auditiva na compreensão dos significados das palavras. O monólogo é representado pela escrita e fala interior enquanto que a fala oral comunicativa, na maioria dos casos, representa o diálogo. Segundo ele, para ocorrer o diálogo é necessário que os interlocutores tenham conhecimento suficiente do assunto, que visualizem as expressões faciais, os gestos e ouçam o tom de suas vozes. Assim Vygotsky (1993, p.123-124) pontua que a entonação da voz pode sutilmente influenciar a compreensão diferenciada do significado de uma palavra, sendo possível a *transmissão de todos os pensamentos, sentimentos e até mesmo uma seqüência de raciocínios em uma só palavra*.

Vygotsky também dá subsídios a esta pesquisa quando se refere a aprendizagem de uma língua estrangeira. Ele considera que o grau de maturidade que a criança apresenta na língua materna auxilia na aquisição da nova língua, pois ela transfere os significados que já possui para o desenvolvimento da nova língua: “A criança aprende a ver a sua língua como um sistema específico entre muitos, a conceber os seus fenômenos à luz de categorias mais gerais, e isso leva à consciência das suas operações lingüísticas” (VYGOTSKY, 1993, p.94).

O campo de pesquisa

Para realizarmos a coleta dos dados escolhemos duas escolas em New Jersey, nos EUA. Uma delas– Livingston School – é bilingue e na sua composição apresenta alunos que são na sua maioria hispânicos, onde os idiomas falados na sala de aula são castelhano e inglês. A outra escola – Woodrom Wilson School - apresenta-se composta de alunos hispânicos, africanos, filipinos, americanos, além de outras nacionalidades, onde o idioma predominante na sala de aula é o inglês, tendo em vista que a escola é unilíngüe; porém ela oferece aulas de Inglês como segunda língua (ESL), para preparar as crianças que ainda apresentam dificuldades no entendimento do idioma.

Na turma de alunos da Woodrow Wilson School participavam quatro alunos de origem hispânica [Parniery, Kayla, Ciara e Eric], os quais foram sujeitos de pesquisa, já que o problema de investigação solicitava sujeitos submetidos a processo de aprendizagem com aulas em idioma diferente [inglês] da língua materna [espanhol]. Na Livingston School, como a escola é bilingue, todos os alunos da classe que participaram da pesquisa recebiam aulas no mesmo idioma [espanhol], intermediado com o inglês. A professora, na maioria das vezes falava em espanhol, o material usado pelas crianças era em espanhol, mas ela e também os alunos já mesclavam a fala entre o espanhol e o inglês. Nessa escola, como todos usavam mais o espanhol que o inglês, solicitamos à professora que escolhesse os alunos. As alunas escolhidas por ela foram: Levy, Vianey, Gissel e Eunice. Estaremos assim apresentando as representações elaboradas em falas, desenhos e escrita desses dois grupos de criança, permitindo-nos um contato mais próximo com a produção delas.
Para procedermos a coleta de dados desses sujeitos usamos como instrumentos as gravações em vídeo envolvendo a resolução de três problemas de análise combinatória. Esses problemas foram aplicados em espanhol para o grupo com aulas em espanhol, e em inglês para o grupo com aulas em inglês.

Foram usadas nas gravações duas potentes câmeras digitais de vídeo que permitiram captar os gestos, falas e intercâmbios desenvolvidos pelo grupo focalizado. Uma das câmeras foi colocada num tripé e manteve-se fixa filmando as crianças discutindo e interagindo. A outra câmera movia-se focalizando e filmando o trabalho que estava sendo feito por cada uma das crianças dos grupos participantes da pesquisa. Essa filmagem permitiu-nos, quando assistimos aos vídeos, visualizar a maioria dos passos do trabalho escrito realizado por eles. Um microfone móvel, potente, foi usado para captar as falas, sendo, portanto movido de acordo com o locutor em questão. A gravação em vídeo como instrumento de pesquisa, embora requeira uma análise especial e refinada, que exige um tratamento mais demorado, tem sido considerado uma ferramenta importante para a Educação Matemática. Ela permite captar e registrar cada momento da coleta de dados. Além disso, permite revê-los ilimitadas vezes, nos reportando ao campo.Tal procedimento favorece a refinação pontual , de modo flexível e de acordo com o interesse do pesquisador, possibilitando ainda colocar o material coletado para reflexão e discussão a outros pesquisadores interessados. (POWELL, FRANCISCO e MAHER, 2004).

Apesar de termos usado 3 problemas de análise combinatória, durante as filmagens escolhemos apenas um para a nossa análise mais refinada; o qual citamos abaixo:

Calças e camisas

Estevão tem uma camisa branca, uma azul e uma amarela. Ele tem uma calça de jeans azul e uma calça de jeans branco. Quantas combinações diferentes ele pode fazer? Quais são as combinações? Encontre uma maneira de convencer que você tem todas as combinações possíveis.

Durante a atividade fizemos várias interferências, sempre que percebíamos situações que nos permitiam explorar melhor como as crianças estavam construindo suas representações, incentivando-as a expressar suas idéias e a resolver os conflitos promovidos durante a interação do grupo.

Na primeira classificação e análise dos dados usamos o seguinte roteiro e codificação:

ROTEIRO PARA CODIFICAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Representações	Escrita	Discurso	Gestos
Simbólicas	Uso de letras ou símbolos matemáticos abstratos e grafismos indicando quantidade	Comparam modelos Conexão significativa entre dois problemas	Interesse em negociar usando símbolos Associações entre objetos exteriores e os símbolos
Peculiares	Uso de palavras - língua materna e outras Gravuras-desenhos de formas e objetos	Descritivos com linguagem coloquial Sem uso de símbolos matemáticos Argumentos intuitivos	Comuns a ssociados a linguagem coloquial
Estratégicas	Uso de diagramas	Argumentos indutivos e estratégicos argumentativos	Interesse em buscar modelos para solucionar problemas

Fonte: Tabela elaborada durante a análise dos dados desta pesquisa.

Para procedermos à codificação revisitamos novamente os vídeos, focalizando nossa atenção naqueles eventos que consideramos críticos de acordo com nossas questões de pesquisa.Assim criamos códigos que nos auxiliaram na interpretação dos dados. Da combinação dos aspectos gerais e específicos trabalhamos com os seguintes códigos:

RSE - Representação simbólica no trabalho escrito; RSD - Representação simbólica no discurso; RSG - Representação simbólica nos gestos; RPE - Representação peculiar no trabalho escrito.; RPD - Representação peculiar no discurso; RPG - Representação peculiar nos gestos; REE - Representação estratégica no trabalho escrito.; RED - Representação estratégica no discurso.;REG - Representação estratégica nos gestos.

Abaixo mostramos uma vinheta com a descrição de 5 minutos do filme 28 à 33min.

28 à 33min	Ciara desenhou um par de camisas e calça e disse que poderia combinar a calça branca com a camisa branca e a camisa azul com a calça branca e escreveu WS [white shirt - camisa branca] e W J [white jeans - calça branca]. Ciara colocou para o grupo como fariam para combinar a camisa amarela. Eric respondeu que poderiam colocar com a calça amarela; Parniery disse com a calça azul, e kayla respondeu que ficaria bem com a calça branca e com calça azul. Ciara chamou o pesquisador e em voz baixa, quase inaudível, perguntou se ela poderia desenhar uma calça amarela. Perguntamos por quê? Ela respondeu que eles não tinham calça para combinar com a camisa amarela. Kayla propôs que colocassem a calça branca com a camisa amarela. Ciara em voz alta falava que poderia combinar a calça branca com a camisa branca e a calça jeans azul com a camisa azul. Perguntamos a Kayla se ela concordava com Ciara. Ela respondeu que não, pois poderiam combinar a camisa amarela com a calça branca. Ciara disse que não combinava e Kayla respondeu que tudo combinava com tudo. Ciara afirmou que não concordava, "não mesmo". Parniery explicou para Ciara que era como um pedaço de papel, que você pinta de amarelo. Eric disse que branco e preto combinavam com tudo e Kayla confirmou o argumento de Eric dizendo que branco e preto combinavam com tudo, mas se pusessem a camisa amarela com a calça branca ficaria bem, mas com a calça azul não ficaria bem. Eric e Parniery discordaram e a professora que passava por perto interrompeu e falou em voz alta para Kayla não se preocupar muito com as cores.

Fonte: Tabela elaborada durante a análise dos dados desta pesquisa.

Após as descrições dos vídeos, selecionamos os *eventos críticos*. Segundo Powell (2003),os eventos críticos são contextuais. A criticidade de um evento depende dos olhos do pesquisador. Um evento pode ser considerado crítico para um observador e não crítico para outro observador. Para Powell, Francisco e Maher (2004 p. 104 e105), um evento é chamado *crítico* quando demonstra uma significativa ou contrastante mudança em relação a uma compreensão prévia, um "salto conceitual em relação a uma concepção anterior". Para eles, os *eventos críticos* vão além do vídeo, podendo também ser encontrados nos diferentes tipos de registros escritos dos estudantes, O vídeo nos permitiu buscar os *eventos críticos* em vários momentos, nos quais pudemos descartar alguns eventos selecionados, previamente, que não nos interessavam, e incluir outros que julgamos mais significativos, de acordo com as questões de pesquisa. Nesta etapa olhamos em especial a questão das representações das crianças na resolução de problemas matemáticos, envolvendo a lógica das combinações, contagem e operações básicas. Transcrevemos, no quadro abaixo , alguns eventos que selecionamos durante a pesquisa.

31:00	RSE RED RSD	Ciara: Nós podemos por azul com azul,... azul com azul, você pode pôr branco ... Parniery: Não importa as cores... Ciara: você pode pôr branco com branco, branco com azul, amarelo com azul e azul e com azul... Parniery: Esse é um...[contando] Ciara: [Também contando usando a caneta para fazer os grafismos indicando quantidade] Essa é uma combinação, essa é outra combinação, essa é outra combinação ... essa é uma combinação, essa é uma combinação, essa é uma combinação, essa é uma combinação, essa é uma combinação...então um, dois, três, quatro. Quatro Kayla intervém, marcando no diagrama de Ciara: Kayla: você pode pôr o amarelo e o azul... [a aluna enfatizou esta palavra].
31:44	REE	Ciara foi escrevendo as combinações no seu diagrama, e, conectando-as com linhas estratégicas, ela contou e encontrou 4 combinações. Kayla interveio e conectou para ela o amarelo e azul. Kayla agora fazia as conexões no diagrama de Ciara para que ela acompanhasse. (Figura 7). Kayla: você pode por azul, branco, amarelo e azul, branco e amarelo. 3 de cada são 6. Parniery: Somente seis maneiras. Kayla: Há seis maneiras de combinar Ciara: Como?
32:10	REE RSD RED	Kayla foi mostrando para ela no diagrama, conectando as calças e camisas: "você pode pôr amarelo, azul e branco com a calça azul... " Ciara interrompendo disse: Ciara: Ok amarelo com branco, amarelo com azul e azul com azul... Kayla: Veja...[Foi apontando no diagrama de Ciara] branco com amarelo, amarelo e azul, e azul e azul e branco e branco, amarelo e branco e azul e branco(...) todas cores com cada calça , cada grupo. Todos ajudavam a Ciara nesse momento Eric: Você pode pôr branco e branco. Parniery: Três aqui e três ali (...) três e três seis... apontando no diagrama de Ciara (...) três camisas com a calça branca e três camisas com a calça azul... faz sentido. Ciara: um, dois, três, quatro, cinco e põe o azul com branco!
32:39	REE RSD REE	Ciara ainda tentava encontrar as seis combinações. Ela foi contando em seu diagrama, e percebeu que tinha cinco combinações, então descobriu que não havia ligado o azul e branco.
32:56		Ciara: um, dois, três, quatro, cinco, seis...nós temos seis maneiras para combinar. Parniery: É o que eu estava dizendo três camisas com cada calça.
33:20	REE RSD REE	Depois desse evento o grupo levou tempo negociando como responderiam a questão: Como convenceriam um ao outro de que haviam encontrado todas as combinações. Depois de muita negociação concluíram que se convenceram ajudando um ao outro.

34:00	RSE	Pedimos para Ciara explicar como o grupo a havia convencido e ela justificou dizendo: “que se convenceu, pois Parniery e Kayla tinham grandes idéias e que mostraram a ela que as cores não precisavam combinar e que ela havia concordado com eles”. Não sabemos se ela realmente abstraiu a idéia de combinação conforme o diálogo abaixo: Pesquisadora: Quantas combinações você fez? Ciara: seis. Pesquisador: Você pode explicar para nós como ficaram estas seis? Ela foi novamente reforçando as linhas estratégicas e traçando grafismos indicando a quantidade e repetiu para nós as seis combinações de calças e camisas que fizera.
37:31	RSD	Pesquisadora: Ciara você acha que fez todas as combinações? Ciara: Sim

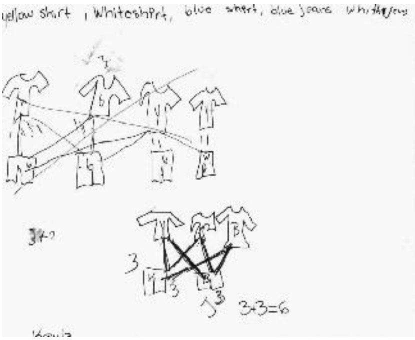


Figura 1– Kayla
Fonte: Pesquisa de campo.

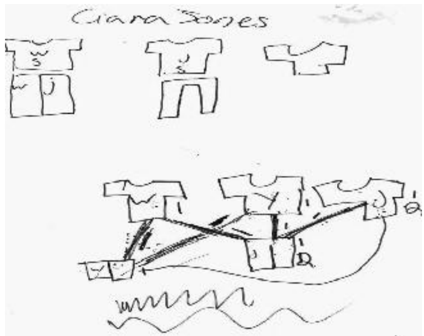


Figura 2 – Ciara
Fonte: Pesquisa de campo.

Comparamos esse evento ao grupo de crianças que tem as aulas no mesmo idioma que o materno [espanhol], e notamos que o grupo bilingue com, aulas em inglês, apresentou representações mais refinadas e mais abstratas. As quatro crianças usaram diagramas com linhas estratégicas, que ligavam as calças às camisas. Parniery, Kayla e Ciara usaram símbolos e operações matemáticas, quer seja no discurso ou na escrita, e Kayla chegou à operação 3+3=6, após concluir as seis combinações.

> Kayla: Você pode por azul, branco, amarelo e azul, branco e amarelo: 3 de cada são 6.
> Parniery: Três aqui e três ali (...) três e três seis.
> Ciara: Nós temos seis maneiras para combinar.
> Parniery: É o que eu estava dizendo três camisas com cada calça. Faz sentido (...)

No grupo de crianças bilíngües o intercâmbio auxiliou Ciara a mudar sua representação inicial do problema, contribuindo para que ela alcançasse representações mais abstratas confessando inclusive que seus pares a convenceram com os argumentos desenvolvidos durante a resolução. Pois, ela podia compreender que as cores não precisavam estar em harmonia, mudando assim a sua primeira representação, refinando-a e mostrando seu modo de encontrar a sexta combinação, ligando a camisa amarela com a calça branca.

Segundo Maher, Martino e Alston (1993) a interação entre as crianças no grupo, possibilita a reorganização das representações iniciais, permitindo um refinamento das mesmas. Nesse episódio também encontramos respaldo na teoria vygotskyana por meio do ZDP [zona de Desenvolvimento Proximal] quando a interferência do mais experiente contribui para o amadurecimento do outro, pois o intercâmbio no grupo possibilitou a mudança de significado. Sem a ajuda do grupo Ciara possivelmente não chegaria a esse resultado, apresentado em seu diagrama [figura 1], além de que o contato com os pares que se encontravam num estágio mais abstrato possibilitou o refinamento da representação inicial dela.

Na Livingston School, com o grupo de alunas que tem as aulas no mesmo idioma [espanhol]_Vianey, Levy, Gissel e Eunice_ Vianey direcionou as argumentações que levaram ao desfecho do problema, interferindo no processo de construção das representações do grupo. Apresentamos abaixo os primeiros momentos da interação no grupo.

> Vianey: Ok. Vamos discutir o problema. Vamos começar agora. Ela lê o problema para o grupo.
> Gissel: Amarelo e (...) branco com o branco!
> Levy: Branco com azul (...) branco com o jeans branco
> Eunice: jeans azul e camisa azul!
> Levy: Assim vai parecer um morto.
> Vianey: Quantas combinações diferentes podemos fazer?
> Gissel: Branca com azul !
> Eunice: Uma (...) uma.
> Gissel: Azul com ...
> Vianey: Quais são as combinações?
> Gissel: (...) branco... azul com branco!
> Vianey: As combinações são...olhem (...)
> Vianey: Temos que fazer as roupas que ficam bem ou seja como...[lendo para ela mesma] diferentes pode fazer oh! quantas combinações diferentes pode fazer: por exemplo a branca e azul essa não fica bem, o jeans fica bem com uma camisa azul.
>
> Gissel: camisa azul...

Vianey: e jeans azul ...
Levy : jeans branco e a camisa azul...
Vianey: Não
Eunice: jeans azul e camisa branca
Gissel: Podemos fazer duas combinações
Vianey: Sim podemos fazer duas combinações diferentes porque o jeans não fica bem com a camisa branca

O grupo, no entanto, decidiu escrever que azul e branco faziam uma combinação e Vianey acatou e passou para a segunda questão: "Quais são as combinações?"

Após fazerem a nova leitura do problema e antes de reiniciar as discussões entre os pares,Vianey, que estava prevalecendo sobre o grupo, por estar usando um timbre de voz superior e por estar, como já dissemos acima, parecendo querer assumir a posição de liderança, leu a pergunta: "quantas combinações diferentes podiam fazer", e focalizou sua atenção na palavra "diferente" e mostrou que entendia a expressão " cores diferentes".

Gissel: As combinações são a camisa azul e (...)
Vianey: E a calça jeans azul.

Quando o grupo continuou a leitura e discussão do problema, vimos uma nova postura e produção de significado diante da combinação das cores diferentes.

Vianey: Quantas combinações diferentes podem fazer...podemos fazer mil ou seja a roupa que fica bem relendo para ela mesma (...) quantas diferentes pode fazer...ahã mostrando gestualmente que estava em dúvida sobre o que lera e ela retrocede em sua representação inicial após essa leitura; lendo para o grupo (...) quantas combinações diferentes podem fazer.
Vianey: Podemos fazer, por exemplo, branca e azul. Essa não fica bem, o jeans fica bem com a camisa azul.
Gissel: Quais são as combinações (...)
Levy: Não (...) e faz uma combinação. Veja jeans azul e a camisa branca!

O grupo iniciou a discussão do problema com o conflito em torno da cor amarela, porém com uma polêmica diferente do conflito que mencionamos para o grupo da Woodrow Wilson School, quando analisamos os questionamentos de Ciara em torno dessa mesma cor. Embora os alunos dos dois grupos tenham iniciado considerando que cores diferentes não combinavam, o processo de condução e da modificação dessa afirmação foi argumentado pelo grupo das crianças unilíngües de forma diferente. Mesmo após esse início no qual Vianey considerou que a combinação só seria possível entre cores iguais.

> Gissel: Podemos fazer duas combinações.
> Levy: jeans branco e a camisa azul!
> Gissel: Podemos fazer duas combinações. Quase inaudível: Nós temos duas calças. Ela chama a pesquisadora e pergunta se está certo.
> Vianey: Podemos fazer duas diferentes porque o jeans azul não fica bem com a camisa branca.
> Gissel: Sim pode, veja eu estou usando jeans azul com camisa branca.

Vianey releu a primeira pergunta respondida, na qual estava escrito camisa branca e jeans azul fazem uma combinação e disse que deveriam colocar essa combinação na segunda resposta, referindo-se a pergunta: "Quantas combinações diferentes podem fazer?" pois não combinavam, já que eram cores diferentes.

> Vianey: Jeans azul camisa branca fazem uma combinação [relendo a primeira resposta] Temos diferentes... o jeans azul e a camisa amarela fazem uma, são diferentes. Jeans azul e camisa branca fazem uma combinação [relendo novamente a segunda resposta] se você diz que camisa branca e calça azul fazem uma combinação, então não vai aí, vai na segunda [referindo-se à segunda resposta].

Quando terminou nos disse que colocou:

> Gissel: amarela e branca e amarela e azul.
> Vianey: (...) quais são as combinações ...combinações quer dizer com o que fica bem com a calça, e a primeira é diferente, que quer dizer o que não fica bem, não fica bem com o amarelo com o jeans, então essa é uma.

No outro episódio:

> Vianey: escutem-me, a número um [questão] diz quantas combinações diferentes como, por exemplo, o amarelo não pode combinar com o jeans azul, porque não combinam.
> Levy: Pode combinar com branco, o jeans branco...
> Pesquisador: Por quê?
> Vianey: Porque estamos fazendo assim, jeans azul combina...é

> combina, tem que fazer assim jeans azul e amarelo não combinam porque aqui está dizendo não combina.

O conflito iniciou-se com essa última argumentação de Vianey a respeito da combinação diferente e estendeu-se por todo o tempo restante de trabalho. Depois da leitura da palavra diferente, feita por Vianey, o grupo parou por um tempo nessas combinações, enquanto negociavam o conflito, que se estendeu por longas argumentações em torno das diversas tonalidades de amarelo e azul, que por fim não combinavam, segundo Levy e Vianey.

Porém, após esses momentos de discussão, Vianey concordou com o grupo de que a camisa branca combinava com o jeans azul construindo um outro significado para a palavra "combina" uma vez que admitia juntar algumas cores diferentes. O que segundo a nossa opinião, era devido ao fato de considerarem uma certa harmonia (visual) entre si.

Quanto a Gissel notamos que desde o princípio parecia não estar de acordo com o argumento que Vianey construiu. Ela inicialmente desenvolveu o argumento de que "diferente" significava "não combina" e Gissel, que discordava desse posicionamento de Vianey, mas não conseguindo mecanismo de contestação pela oralidade, começou a representar por desenhos de calças e camisas, identificando as cores. Abaixo podemos visualizar a representação elaborada por Gissel.

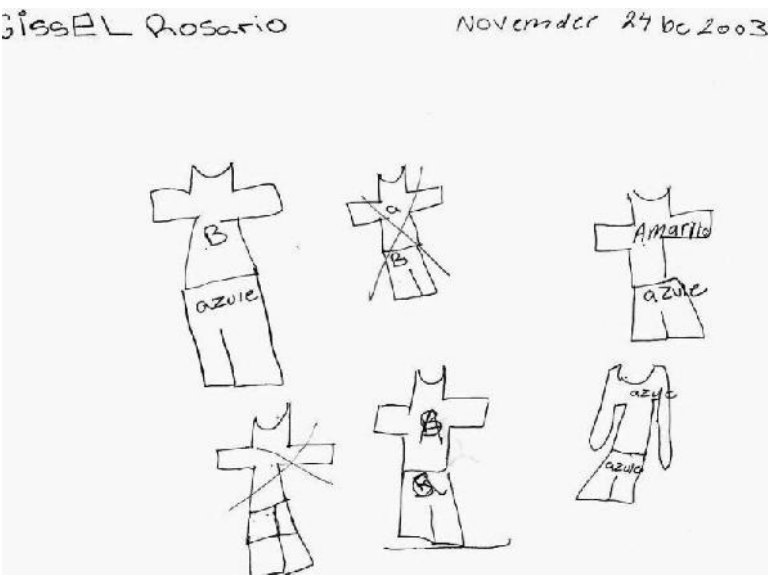


Figura 3– Gissel
Fonte: Pesquisa de campo.

Assim a leitura que Vianey fez da palavra diferente provocou uma desestabilização no grupo, pois Gissel não concordava com ela, porém não construiu argumentos para se contrapor, enquanto Eunice e Levy apoiaram a Vianey, mas também não construíram respostas que condiziam com os argumentos e justificativas dela.

O grupo, que até esse momento havia escrito as combinações possíveis começou também a desenhar acompanhando Gissel na representação. Vianey desenhou duas calças e duas camisas, escreveu o nome das cores, branco e branco e azul e azul, ligou-as com linhas estratégicas para caracterizar que as cores poderiam ser invertidas: calça branca com camisa azul e camisa azul com calça branca. Ao reler a primeira questão que perguntava quantas combinações diferentes poderiam fazer, continuou a discursar sobre as cores e as que ela considerava que combinavam e que não combinavam.

Vemos no diálogo abaixo a construção e desenvolvimento dos argumentos de Vianey acompanhado do apoio de Levy, que reforçava a idéia das cores como sendo a que direcionava as respostas às questões do problema. Para elas o amarelo não combinava com azul porque eram cores fortes.

Segundo Davis (1984) as estruturas de representação de um novo conhecimento são criadas por combinação, modificando e estendendo estruturas previamente criadas. Assim quando Vianey atribuiu o significado "diferente", como "não combina", ela traz possivelmente esse significado de sua vivência cultural, que foi incorporado anteriormente por outros significados, estendendo-os e combinando-os para a formação dessa nova representação.

Durante a atividade de resolução do problema em cada um dos dois grupos analisados, duas crianças conduziram o desenvolvimento dos argumentos, e, uma foi o elemento discordante em relação às combinações, influenciando a performance de ambos os grupos. No bilíngue Parniery e Kayla conduziram as discussões e Ciara foi a discordante. Ciara sendo discordante foi conduzida pelas estratégias que o grupo usou para representar o problema, chegando às seis combinações. Nesse grupo predominou o uso de representações simbólicas e estratégicas, tanto nos discursos como nos trabalhos escritos e nos gestos.

No grupo ainda não bilíngue, com aula em espanhol, Vianey e Levy, conduziram os argumentos enquanto Gissel discordava.

> Pesquisadora: Gissel diz para elas por que você não concorda? Você tem o direito de não concordar.
> Gissel: Eu sim concordo. Falando sem convicção.
> Vianey: Já? Bom, obrigada. Ela concorda agora.

> Pesquisadora: Por que você agora concordou? Gissel não nos respondeu.
> Pesquisadora: Então se vocês tiverem uma camisa amarela no guarda roupa, não podem usar?
> Vianey: Sim pode depende se a pessoa gosta, mas não estamos falando do que as pessoas gostam.

Esse grupo não conduziu Gissel a mudar sua representação e notamos pelo seu trabalho escrito [figura 3] e pelo vídeo, que a interação constituiu um obstáculo para que ela chegasse às seis combinações.

Nesse caso não negociaram o conflito em torno da questão da cor amarela, com a imposição, Gissel abandonou a representação inicial que fizera, considerando que todas as cores poderiam ser usadas na composição das combinações. Consideramos que, se ela tivesse persistido possivelmente teria chegado às seis combinações, o que não aconteceu.

Consideramos que Gissel abstraíra a noção das possibilidades combinatórias, mas não alcançou o resultado finalizando o problema, porque não concordou com os argumentos de Vianey e, por ter menos facilidade na oralidade, não os revidou. De acordo com nosso olhar ela tinha construído essa representação interna, que não foi exteriorizada no trabalho escrito, nem nos discursos, apenas na representação gestual.

Isso vem reforçar nossa crença de que atingimos um resultado diferente do que esperávamos. Em outras palavras, nossa idéia inicial partia da pressuposição de que a língua de ensino diferente da língua materna poderia ser um fator dificultador na aprendizagem da matemática. Não podemos afirmar categoricamente que sim, porém nossos resultados indicam que, nas classes pesquisadas, as crianças já bilíngues que participaram na pesquisa apresentaram maior facilidade e rapidez na resolução de problemas, construindo representações mais refinadas.

Durante a resolução do problema das calças e camisas também observamos que o argumento desenvolvido por esse grupo ainda não bilíngue, de que as cores fortes não combinavam, esteve presente no discurso a maior parte do tempo. Vianey e Levy foram encontrando justificativas para esta idéia, usando várias estratégias.

Nesse grupo predominaram argumentos com representações peculiares e também estratégicos [porém em menor intensidade que no grupo bilíngue] não usaram símbolos matemáticos no trabalho escrito e nos discursos. Nesse grupo ficou evidenciado a preocupação com a harmonia das cores, atribuímos isso à uma questão cultural. Abaixo mostramos essa evidência.

> Levy: Também se o amarelo é uma cor clara e se o azul não for muito escuro um jeans claro pode combinar, mas uma camisa alaranjada (...)

> Gissel: Sim combina.
> Vianey: Então temos que colocar camisa amarela e jeans azul não combinam.
> Em outra situação o argumento volta a se repetir:
> Levy: A cor azul é como se não combina e como é muito forte, mas também o amarelo é também muito forte.
> Vianey: Então não pode combinar...
> Pesquisadora: Então cores fortes não combinam?
> Levy: O amarelo é uma cor mais rara que o azul.
>
> **Ainda tentando convencer Gissel:**
> Vianey: Olha Gissel o que passa é que não combina o amarelo com azul sabe por que? Porque jeans é azul e claro e jeans tem azul e o amarelo é assim muito amarelo e não há nenhum amarelo que seja claro, se fosse uma camisa clara então ficaria bem com o jeans.

Vemos pelo diálogo acima que tanto Vianey como Levy inventavam justificativas para fazer sobrepor a idéia de que as cores, amarela e azul, não combinavam. De acordo com Maher, 1998 as crianças naturalmente inventam justificativas para as suas soluções quando constroem suas representações na resolução de problemas.

Entendemos que, nessa polêmica, uma questão cultural parece ter permeado a correlação de forças e o desencadeamento de outros fatores psicológicos no relacionamento deles. Nesse episódio, lembramos novamente Vygotsky (1993) quando se refere aos significados que os indivíduos carregam e que vão sofrendo acréscimos transmitidos pelos conceitos do grupo cultural.

Segundo Miura (2001), a construção das representações internas e externas são influenciadas por fatores culturais, incluindo as características da linguagem usada no domínio da Matemática. Goldin e Kaput (1992, 1996) afirmam que as representações externas ocorrem num sistema e Kaput (1998) considera que esses sistemas podem ser idiossincráticos e pessoais sob certas circunstâncias e que na verdade são artefatos culturais que não podem ser separados do conteúdo da matemática.

Conclusões

Nossas análises mostraram que na resolução do problema “camisas e calças” o grupo bilíngue com aulas em inglês, apresentou maior facilidade na comunicação e na construção de representações matemáticas em relação ao grupo ainda unilíngue. No início desta pesquisa pressupúnhamos que o fato do idioma de sala de aula ser diferente do falado em casa, dificultava a relação dos alunos com a matemática, interferindo na aprendizagem, constituindo-se num fator dificultador.

Porém, nossos resultados evidenciaram um maior refinamento nas representações elaboradas pelo grupo bilíngue com aulas no idioma diferente do materno, pois estes usaram diagramas com linhas estratégicas, fizeram uso de operações matemáticas e, por meio do intercâmbio, o grupo conduziu Ciara a modificar sua representação inicial e chegar às seis combinações. Isso revela que a interação permitiu que os seus pares, que pareciam estar em estágio mais avançado, a auxiliaram no alcance do resultado do problema, usando todas as possibilidades combinatórias. Além disso, esse grupo na interação adotou uma postura de desafio que contribuiu para a construção de argumentos e justificativas importantes para as idéias matemáticas.

O fato da maioria das crianças ter nascido nos Estados Unidos e já terem um maior contato com a língua [e serem bilíngües], mostrando facilidade na elaboração dos argumentos e demonstrações do problema, bem como na interação em grupo, não nos garante que o único fator ou mesmo que o fator predominante possa ser o bilingüismo.

Contudo, após a nossa pesquisa podemos realçar o quanto o grupo bilíngue se destacou em relação ao unilíngue, principalmente no que diz respeito à rapidez de interação e representação mais homogênea de concordância nos argumentos e representações utilizadas.

Cabe ressaltar que essa pesquisa também reforçou nossa posição sobre a importância metodológica adotada ao permitir que o professor implemente o aproveitamento do potencial que cada criança já traz como bagagem para a sala de aula, encorajando situações de interação e troca de informações e estratégias em atividades desenvolvidas em grupos.

A análise por meio de metodologia do vídeo propicia um movimento dialético fundamental para uma reflexão mais minuciosa das abstrações, das representações, argumentações, intercâmbios e modificações, as quais as crianças elaboram e vivenciam usando matemática para a resolução de problemas.

A matemática não pode ser vista hoje como conjuntos de regras estabelecidas, mas sim como uma ferramenta que permite aos alunos construir uma base analítica, que consideramos deva transcender aos limites da sala de aula, possibilitando uma aplicabilidade prática na vida diária. Isso só se torna possível se os professores se despojarem dos procedimentos inflexíveis e permitirem uma liberdade para os alunos pensarem, reorganizarem os conhecimentos prévios e as representações, usando o potencial e a vivência que fazem parte de suas representações internas e os auxiliam na resolução de problemas.

Referências

DAVIS, R. B. **Learning mathematics**: The cognitive science approach to mathematics Education. New Jersey: Ablex Publishing Corporation,1984.

DAVIS, R. B. Understanding "Understanding". **Journal of Mathematical Behavior** 11, 225-241, 1992.

DAVIS, R. B. & MAHER, C. A. School, Mathematics, and the World of Reality: **Paper presented at a conference in 1990**, N. Brunswick, NJ, 1993.

GOLDIN. Gerald A. Representational System, Learning, and Problem Solving. **Journal of Mathematical Behavior** 17 (2) p.137-165, 1998

GROSJEAN, F. **Life with Two Languages**: An Introduction to Bilingualism. United States, University Press, 1982.

HAGÉGE, C. **L'Enfant aux deux langues**. Janvier: Editions Odile Jacob, 1996.

MAHER, C. A. **Professores podem ajudar seus alunos a construir argumentos convincentes?** Um breve exame deste processo. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998, v. 5.

MIURA. I. T. The influence of Language on Mathematical Representation.In F.R. Curcio (Ed.) **The Roles of Representation in School Mathematics**. Reston NCTM, Year Book, 2001.

NATURE. **International Weekly Journal of Science**, 431, 732-882, 14 October 2004 p.757. www.nature.com/ nature N.7010

POWELL, A. B. (2003). "So let's prove it!": Emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task. **Unpublished doctoral dissertation**. Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick, 2003

POWELL, A. B; FRANCISCO, J. M; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise dos Dados de Vídeo para investigar o Desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Bolema**, Ano 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

VAZQUEZ, S. A construção de representações matemáticas por alunos de séries iniciais em idiomas diferenciados. **Dissertação de Mestrado em Educação**. Vitória, UFES/PPGE, 2004.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes: 1993.

Submetido em março de 2009.
Aprovado em junho de 2009.

Sobre a identidade do Centro de Educação Matemática (CEM): Configurações de uma leitura sociológica

Heloisa da Silva
Professora, Fac. Claretianas de Rio Claro, SP
helo_da_silva@terra.com.br

Antonio Vicente Marafioti Garnica
Professor, UNESP/Rio Claro e Bauru/SP
vgarnica@fc.unesp.br

Resumo
O artigo apresenta alguns resultados da investigação realizada sobre a identidade do Centro de Educação Matemática (CEM), um grupo de educadores matemáticos da cidade de São Paulo atuante principalmente entre os anos de 1984 e 1997. Para configurar uma posição sobre a(s) identidade(s) do CEM são trazidos à cena o método da História Oral e o Modelo dos Campos Semânticos. No ensaio, acompanhado por um exercício de constituir a identidade do CEM a partir de lentes sociológicas, assume-se que o processo de constituição dessas identidades não é algo estático, fixo, não se referindo, portanto, ao que o CEM é ou foi, mas a um conjunto de possibilidades de apreendê-o a partir de estratégias e iniciativas desenvolvidas em determinadas condições e tempo históricos.

Palavras-chave: CEM, Identidade, Leitura Sociológica, Configurações, Educação Matemática, História Oral, Modelo dos Campos Semânticos.

On the identity of CEM (Centro de Educação Matemática): a reading based on some sociological configurations

Abstract
In this paper we present results of research conducted on the constitution of the identity of CEM (Centro de Educação Matemática), a group of mathematics teacher educators from the city of São Paulo, Brazil (1984-1997). We emphasize the processes of constitution of CEM's identities, on the perspective of both Oral History in Mathematics Education and the Model of Semantic Fields. In the essay we argue, pointing out an exercise based on Sociology, that these processes do not refer to what the group is (was) but rather to what it became on the face of modes of meaning production determined by strategies and initiatives taken in specific historical places.

Keywords: CEM, Identity, Sociology, configurations, Mathematics Education, Oral History, Model of Semantic Fields.

O conceito "identidade", além de recente[1], é bastante flexível, podendo ser adaptado a várias situações para significar coisas diferentes ao freqüentar estudos de áreas muito diversas. Utilizado pela Psicanálise e pelos Estudos Culturais, tal conceito tornou-se, mais notadamente a partir da década de 1980, objeto de interesse das pesquisas sobre formação de professores, mobilizado a partir de questões voltadas a compreender como ocorre o processo de formação da identidade profissional do professor; qual o efeito da formação inicial e continuada do professor sobre o desenvolvimento de sua identidade profissional; como o processo formativo "dá forma" e reestrutura a identidade profissional desse professor; quais os aspectos da identidade cultural do professor do final do século XX (e.g. WALSHAW, 2004; SILVA, 2004; PONTE et al, 2002, CARMONA, 1993). O interesse pela identidade do professor, ou pela identidade de sua profissão, está vinculado ao interesse pelas experiências sócio-culturais (WREN, 2001), julgando-se que estudar a identidade – vista como um amalgamado de elementos provenientes das experiências vividas pelo indivíduo –, possibilita tanto uma compreensão dos motivos pelos quais um profissional trabalha da forma como trabalha quanto uma determinação de situações e fatores que devem fundamentalmente participar de sua formação para que atue de tal e tal forma.

Quando nos propusemos uma pesquisa cujo tema era a identidade de grupos com atuação diferenciada em Educação Matemática, não estávamos distantes dessa concepção. Tendo optado por focar o Centro de Educação Matemática (CEM) – um grupo reconhecidamente atuante em relação à formação de professores de Matemática, principalmente nas décadas de 1980 e 1990 na Grande São Paulo – gravitávamos em torno de questionamentos sobre as características que tornavam o CEM legitimamente satisfatório para os professores; sobre qual era sua estrutura em termos de posições de trabalho; de que forma suas reuniões eram encaminhadas; quais possibilidades surgiam para o professor que participava de um grupo como aquele; de que forma pertencer àquele grupo influenciava o desenvolvimento profissional desse professor... Nessa órbita, pretendíamos compreender não só como ocorria o processo de formação da identidade de um grupo, mas também avaliar o significado desse processo para a atuação dos professores de Matemática.

No entanto, nossos estudos sobre História Oral e a busca de referências sobre o tema "identidade" nos mostraram que, para evitar o determinismo de cunhar, para o CEM, uma identidade, deveríamos ampliar nossas perspectivas.

Larrosa (2004) alerta que as lógicas da identidade e da identificação são apenas capazes de reconhecer algo ou alguém ao preço de construí-lo como algo ou

[1] De acordo com Niethammer (1997), que trata de estabelecer a história semântica da palavra "identidade", essa palavra insere-se na mídia e nos estudos culturais, de forma enfática, somente a partir dos anos 50.

alguém já conhecido. Com isso, referia-se a um desdobramento "natural" dessa perspectiva reducionista e determinista: em algumas pesquisas, pessoas singulares e, por isso, incompreensíveis, inidentificáveis, irrepresentáveis e imprevisíveis, são convertidas como representantes de uma categoria genérica de um tipo humano (como, por exemplo, "o professor") que, à procura de reconhecimento, converte-se em uma personagem que não é outra coisa senão a encarnação de um estereótipo.

Ao problematizar a relação entre relato e identidade, Larrosa (2004) afirma que as histórias pessoais são o lugar, simultaneamente, da solidificação e da dissolução da identidade. Isso porque a experiência é aquilo que se passa com cada um de nós e o relato é uma das formas privilegiadas de darmos sentido àquilo que se passa conosco, assim como o sujeito da experiência, ao ser convertido em sujeito do relato, é autor, narrador e personagem principal dessa trama de sentido (ou sem-sentido) que construímos com nossa vida e que, ao mesmo tempo, nos constrói.

Ao considerar as narrativas pessoais como referência dos acontecimentos e dos processos de constituição de identidades, o uso da História Oral como método de pesquisa qualitativa favorece a dissociação de abordagens freqüentes na pesquisa tradicional que usam o discurso científico clássico como forma de autenticar verdades geralmente centralizadoras; ao mesmo tempo em que afasta o tema "identidade" de um sujeito denso, centrado, objetivo, aproximando-o da discussão acerca de processos de produção de significados sob a forma de narrativas.

Interessados tanto pela investigação acerca dos significados que pesquisas sobre "identidade" podem trazer para o âmbito da Educação e da Educação Matemática; quanto pela análise do Centro de Educação Matemática como uma entidade significativa para a história da Educação Matemática brasileira, nosso objetivo foi o de caracterizar a formação da identidade do CEM tal como acreditamos dar-se esse processo, atentando para os modos como, na constituição dessa identidade, construímos uma dada realidade (a identidade do CEM).

A identidade como tema de pesquisa

Os depoimentos coletados para nossa pesquisa[2], ainda que resultantes de seções individuais de entrevistas, revelam como os integrantes do CEM, num

[2] Para esta nossa pesquisa foram coletados depoimentos de dez integrantes do CEM: Antonio José Lopes (Bigode), Anna Franchi, Anna Regina Lanner de Moura, Arlete de Jesus Brito, Dione Lucchesi de Carvalho, Dulce Satiko Onaga, Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Libermann, Paulo Sérgio de Oliveira Neves e Regina Maria Pavanello. O critério para a seleção desse conjunto de depoentes – constituído por membros fundadores e/ou presidentes e/ou coordenadores de projeto e/ou cursistas – apostou na possibilidade de obter discursos diferenciados sobre o grupo, dada a diversidade de "papéis" desempenhados por cada um. A "análise" desses depoimentos – da qual a leitura sociológica aqui apresentada é uma das faces – considera também outras fontes (por exemplo, fontes escritas como atas de reunião, projetos, legislação específica, materiais didáticos produzidos pelo grupo, teses e dissertações sobre temas e situações surgidas nas situações de entrevista).

processo comum de experiência em grupo, construíram um discurso com algumas faces comuns, ou seja, um tipo de representação para "o que foi o CEM". São exemplos do modo como acreditamos serem constituídas as *identidades*: como processos de produção de significados – ou invenções, avesso de "expressões do real" – para atores pessoais, coletivos ou coisas, que se constituem em meio a discursos com base em um atributo cultural ou um conjunto de atributos culturais inter-relacionados que prevalecem sobre outras fontes de significado. Nesse sentido, para uma determinada pessoa, ou um ator coletivo, ou uma coisa, pode haver identidades múltiplas. As identidades, segundo Hall (2003),

> *surgem da narrativização do eu, mas a natureza necessariamente ficcional desse processo não diminui, de forma alguma, sua eficácia discursiva, material ou política, mesmo que a sensação de pertencimento, ou seja, a "suturação à história" por meio da qual as identidades surgem, esteja, em parte, no imaginário (assim como no simbólico) e, portanto, sempre, em parte, construída na fantasia ou, ao menos, no interior de um campo fantasmático [...] É precisamente porque as identidades são construídas dentro e não fora do discurso que nós precisamos compreendê-las como produzidas em locais históricos e institucionais específicos, no interior de formações e práticas discursivas específicas, por estratégias e iniciativas específicas* (p.109).

Parametrizados por essas perspectivas, constituímos em nossa pesquisa sobre o CEM um panorama de exposições – inacabadas e fragmentárias – em que constituímos "identidades" do CEM. São narrativas sobre o CEM, elaboradas a partir de lentes distintas, o que permite ao leitor "identificar-se" com uma – ou com várias ou com nenhuma – dessas identidades, podendo constituir outras, posto que a identidade não é algo fixo, "em si", mas atribuída a algo ou a alguém a partir de certos modos de ver o mundo. Com nossa proposta pudemos obter um conjunto de "identidades" do CEM, distintas "invenções"[3] do CEM, num processo decididamente lacunar, cujo resultado "final" foi o de um trabalho incompleto e sempre (in)concluído por nós, leitores dos discursos sobre o CEM, ou por nossos

[3] Por acreditarmos ser impossível a separação entre a descrição simbólica da realidade – a teoria – e seus "efeitos de realidade", para nós, a teoria não se limita a descobrir, a descrever, a explicar a realidade: a teoria está irremediavelmente implicada em sua produção. Ao descrever um 'objeto', a teoria, de certo modo, inventa-o. O objeto que a teoria supostamente descreve é, efetivamente, um produto de sua criação. Por isso, ao se teorizar sobre identidade está se inventando um modo de se falar sobre essa noção, ou um modo de se produzir significado para essa noção. Assim, podemos dizer que teorizar significa assumir uma perspectiva (visão de mundo) para, a partir dela, constituir aquilo que se pensa ser um problema de investigação e, então, investigá-lo.

leitores. Para apresentar distintos processos de produção de significados para o CEM, ou seja, diferentes identidades do CEM, nos dedicamos tanto a ouvir e textualizar depoimentos de pessoas que foram integrantes do grupo, como também a elaborar novas narrativas sobre o CEM por meio de diferentes e sucessivas lentes teóricas.

A idéia, portanto, foi escolher perspectivas teóricas (visões de mundo) diferentes visando a uma variedade de discursos a partir dos quais fossem constituídas identidades do CEM nitidamente distintas umas das outras. Levando em conta a complexidade e diversidade das perspectivas teóricas possíveis para o tratamento da noção de identidade, consideramos razoável abarcar, de início, três abordagens que diferem, principalmente, pelo lugar a partir do qual o sujeito é formado no mundo (no seu 'interior' – perspectiva cartesiana –, na mistura do seu 'interior' com o mundo cultural 'exterior' – perspectiva sociológica –, ou pelas formas como é representado e interpelado no mundo cultural – perspectiva pós-moderna[4]). Neste artigo apresentamos a narrativa que nos foi possível a partir da mobilização de lentes sociológicas.

Tanto para o tratamento dos depoimentos coletados com os membros do CEM quanto para a elaboração das narrativas que mobilizam as distintas lentes, nos reportamos ao procedimento da *textualização* – comumente utilizado nas pesquisas em História Oral – e à noção de *leitura plausível* proposta por Lins no Modelo dos Campos Semânticos (MCS).

Uma *textualização* é a edição de um dado depoimento, e para textualizar estabelecemos coerências (uma *leitura plausível*, de acordo com Lins, 1999) para as falas dos entrevistados. Neste processo, a produção de significados ocorre de modo a tornar coerentes os textos, *"ao invés de nos atermos, por exemplo, a significados dicionarizados ou senso comum, e nos contentarmos em identificar, por exemplo, contradições e acertos"* (LINARDI, 2006: 35). O método usado para estabelecer essas coerências é, assim, caracterizado por seus autores como uma *leitura plausível*:

> *Toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível, e é aqui que devemos prestar atenção às definições que um autor propõe.* (LINS, 1999: 93)

[4] No pensamento filosófico pós-moderno, o sujeito não é o centro da ação social como no ponto de vista sociológico e, sobretudo, cartesiano. Ele não pensa, fala e produz: ele é pensado, falado e produzido. É, portanto, uma ficção.

A textualização[5] elaborada pelo pesquisador-entrevistador ainda deve passar por um momento de legitimação (pelo entrevistado) da produção de significados ("imposta" pelo pesquisador), um processo interativo entre aquele que pretende se fazer entendido e aquele que almeja produzir um texto a partir do que um outro disse ou pretendeu dizer.

Um ponto de vista sociológico

Para pensar "identidade de um grupo social", nos aproximamos de expressões como "fato social" e "fenômeno social" como trabalhadas por autores como Durkheim, Berger & Luckmann e Norbert Elias. Para Descartes, assim como para a filosofia escolástica, é *acidente* tudo o que pertence a um ser sem pertencer à sua essência. Por exemplo, sociólogo é um *acidente* em relação a Norbert Elias, na medida em que Norbert Elias permanece Norbert Elias sendo ou não sociólogo. Os *acidentes*, portanto, não exercem qualquer influência sobre a identidade pessoal e esta se confunde com o "eu" próprio dessa pessoa. Para os autores da Sociologia, porém, o "eu" é formado a partir da interação que se estabelece com o mundo exterior e as identidades que este lhe oferece ou possibilita. Logo, para eles, a identidade é um fenômeno objetivo ao mesmo tempo em que é subjetivo: objetivo porque é aprovisionado a ele pela sociedade, e subjetivo porque o indivíduo intervém sobre ele, transformando-o. Com isso, torna-se possível compreender a influência da interação entre indivíduos e "fatos sociais" sobre a formação e manutenção de determinado "tipo de identidade" em uma sociedade.

> *As sociedades têm histórias no curso das quais emergem particulares identidades. Essas histórias, porém, são feitas por homens com identidades específicas. Se tivermos em mente essa dialética podemos evitar a noção equivocada de "identidade coletiva", sem precisar recorrer à unicidade /.../ da existência individual. As estruturas históricas particulares engendram tipos de identidade que são reconhecíveis em casos individuais* (BERGER & LUCKMANN, 1991: 228-29)

Se para esses autores a identidade "é um fenômeno que deriva da dialética entre um indivíduo e a sociedade" pode-se dizer que ela se trata de um *papel*

---

5 Dada a extensão dos textos finais e as limitações impostas pelas normas de publicação, nem as textualizações nem recortes desse material estão presentes neste artigo. Entretanto, segundo as disposições metodológicas da História Oral que seguimos (GARNICA, 2005), todos os documentos provenientes de fontes orais, conferidos e aprovados pelos depoentes, devem ser tornados públicos e, sendo assim, as textualizações geradas para esta pesquisa encontram-se, na íntegra, em Silva (2006), tese de doutorado também disponibilizada integral e gratuitamente em www.ghoem.com.

interiorizado e *exteriorizado* sucessivamente em determinado contexto social e, portanto, é o que identifica o indivíduo socialmente.

Na busca por um método de análise do fenômeno social, Durkheim separa o que é social do que é individual, com a intenção de diferenciar os objetos da sociologia daqueles das ciências naturais e psíquicas. Tanto é que ele toma emprestado de Descartes a teoria da dúvida metódica e estuda os fatos sociais como coisas que podem ser consideradas do exterior e explicadas da mesma forma que, para os fenômenos naturais, fazem as ciências naturais.

Segundo Berger & Luckmann, a identidade é um elemento-chave da realidade subjetiva, mas esta se encontra em dialética com a sociedade e, portanto, é foco tanto das teorias psíquicas quanto da teoria social, pois para esta estudar os fenômenos sociais deve-se, necessariamente, analisá-los em relação aos fenômenos individuais.

> *A identidade é formada por processos sociais. Uma vez cristalizada, é mantida, modificada ou mesmo remodelada pelas relações sociais. Os processos sociais implicados na formação e conservação da identidade são determinados pela estrutura social. Inversamente, as identidades produzidas pela interação do organismo, da consciência individual e da estrutura social reagem sobre a estrutura social dada, mantendo-a, modificando-a ou mesmo remodelando-a.* (BERGER & LUCKMANN, 1991: 228)

Assim, para esses autores, é equivocado postular por uma "identidade coletiva". A identidade já é, ela própria, um fenômeno resultante dos processos coletivos (sociais), e seria redundante acrescentar o adjetivo "coletiva" a ela. Em outras palavras, o indivíduo, em determinado contexto social, exerce determinado papel, identifica-se com ele, fazendo dele sua identidade, a qual, no decorrer de seu uso, poderá ser pelo indivíduo transformada. Também por isso o significado de "identidade" diferencia-se do significado de "papéis", apesar da proximidade. A identidade seria um papel absorvido e assumido pelo indivíduo como seu. Ele identifica-se com o papel instituído em determinado contexto social e o toma como subjetivamente significativo para si.

Em ***A sociedade dos Indivíduos***, Elias (1994) pretendeu sugerir que examinar a relação entre indivíduo e sociedade tendo como foco apenas a situação atual e, portanto, subordinado a questões e ideais da atualidade, trata-se de uma condução unilateral e estéril. Assim, propõe que as ciências sociais se emancipem da maneira de colocar os problemas que é própria das ciências naturais e trabalhem com a "sociologia dos processos". Essa foi uma idéia interessante para o nosso trabalho: "a abordagem sociológico-processual fundamenta-se no reconhecimento de que, no plano dos grupos humanos, das relações entre as pessoas, não se pode proceder com a ajuda de conceitos, ou de um processo de conceituação, do mesmo tipo dos empregados no nível dos átomos ou moléculas e de suas relações recíprocas" (p. 144). O que significa que não se aplicam, como nas ciências naturais, leis clássicas no estudo da estrutura e dinâmica dos grupos formados por seres humanos – nem da linguagem, acrescenta ele – pois mudam com o tempo e lugar. "A tarefa que esse nível de integração impõe aos seres humanos em busca de orientação consiste em descobrir a ordem da mudança no correr do tempo, a ordem dos eventos sucessivos, e em buscar conceitos com os quais as pessoas possam comunicar-se acerca dos aspectos individuais dessa ordem" (ibid).

Com esse tipo de investigação Elias analisa os padrões da identidade nas diferentes sociedades – das primitivas às mais complexas. A identidade a que ele se refere é também relativa ao indivíduo, mas para ele o conceito de identidade humana está relacionado a um processo. Argumenta que, apesar das pessoas terem a impressão de que são sempre as mesmas, na verdade elas provêm de um processo específico de desenvolvimento que faz com que sejam pessoas diferentes em momentos distintos de sua vida.

Segundo esses pressupostos, uma pessoa pode possuir distintas identidades no decorrer de sua vida.

O interesse de Elias centra-se nas mudanças ocorridas nas sociedades com relação à balança entre a "identidade-eu" que, segundo ele, é tudo aquilo que diferencia uma pessoa da outra, e a "identidade-nós", ou seja, aquilo que as pessoas têm em comum. Com uma análise processual, Elias avalia os fatores inerentes às sociedades que fazem com que a balança da identidade pessoal penda mais para o "eu" ou mais para o "nós". Mas, diferentemente da linha de Durkheim e Berger & Luckmann, Elias quebra a oposição entre indivíduo e sociedade para falar em termos de relações e funções.

> *Por paradoxal que pareça, no estágio atual do desenvolvimento dos hábitos mentais, não apenas a individualidade e a inter-relação social das pessoas não são antitéticas como também a moldagem e a diferenciação especiais das funções mentais a que nos referimos como "individualidade" só são*

> *possíveis para a pessoa que cresce num grupo, numa sociedade. Sem dúvida, as pessoas também se diferem em suas constituições naturais. Mas a constituição que cada um traz consigo ao mundo, e particularmente a constituição de suas funções psíquicas, é maleável.* (ELIAS, 1994: 28)

Segundo Elias, a resposta mais elementar para a questão "Quem é você?" é o "nome-símbolo" com que a pessoa é registrada ao nascer e que dá a ela sua singularidade no mundo, ou seja, sua identidade-eu. No entanto, e ao mesmo tempo, o nome da pessoa (dado o sobrenome) indica seu pertencimento a uma família, servindo, em alguns casos, como "cartão de visita" – uma "identidade-nós" desse indivíduo. Isso mostra como o nome dá, à pergunta sobre quem é a pessoa, tanto uma resposta a seus próprios olhos, como também indica quem se é aos olhos dos outros. Além disso, comprova o quanto a existência de uma pessoa como ser individual é indissociável de sua existência como ser social.

Logo, a identidade-eu não existe sem a identidade-nós, e se o autor trabalha com esses dois termos (*eu* e *nós*) é porque trabalha com símbolos lingüísticos para identificar os processos de desenvolvimento e, portanto, a formação da identidade pessoal e suas características em termos da balança "eu-nós". O padrão da relação eu-nós, de acordo com Elias, irá depender do que está em voga na sociedade referida, isto é, se o valor recai sobre as diferenças entre as pessoas, sua *identidade-eu*, ou sobre o que elas têm em comum, sua *identidade-nós*. O autor trabalha com a noção de *habitus* (de Bourdieu), ou seja, a composição social dos indivíduos, como solo de investigação a partir do qual "brotam as características pessoais mediante as quais um indivíduo difere dos outros membros de sua sociedade" (p. 150). Segundo ele, o número de camadas interligadas no *habitus* social de uma pessoa depende do número de planos interligados de sua sociedade, mas existirá sempre uma certa camada de especial proeminência.

> *Os condicionamentos associados a uma classe particular de condições de existência produzem habitus, sistemas de disposição duradouros e transponíveis, estruturas estruturadas pré-dispostas a funcionar como estruturas estruturantes, isto é, como princípios geradores e organizadores de práticas e representações que podem ser objetivamente adaptadas ao seu objetivo sem supor a visada consciente de fins e o controle expresso das operações necessárias para atingí-los, objetivamente 'reguladas' e 'regulares', sem ser em nada o produto da obediência a regras, e, sendo tudo isso, coletivamente orquestradas sem ser o produto da ação organizadora de um maestro.* (BOURDIEU, 1989: 88)

Segundo Elias, na época em que vivemos, as sociedades mais complexas possuem uma relação com o indivíduo que difere da existente nas sociedades mais simples: nas primeiras é mais forte a ênfase com relação à *identidade-eu*, enquanto nas segundas ela recai sobre a *identidade-nós*, seja essa a família, a aldeia nativa ou a tribo. O autor alerta que com a modernização, relativamente recente, essa relação tem se modificado a partir das gerações mais novas (ainda que com poucas mudanças no que tange ao apego emocional à família) e isso tem demonstrado vantagens expressivas para sua competitividade [6].

Podemos falar em individualização do *habitus* de um grupo, segundo Elias. O autor comenta sobre o *habitus* social de tribos nigerianas, cujas características, segundo ele, são facilmente percebidas, atualmente, entre os indivíduos daquele país. Isso nos faz compreender que a identidade de um grupo, segundo esses parâmetros sociológicos, deve ter, como referência de análise, o *habitus* que se desenvolve a partir do momento em que seus membros decidem reunir-se.

"A" identidade do CEM

Elias nos indica alguns parâmetros para uma análise sociológico-processual do grupo. Aceitando tais parâmetros, julgamos que os depoimentos coletados com os integrantes do CEM nos permitem traçar algumas **configurações** do grupo. Elias define configurações como sendo sistemas de interações ou situações concretas de interdependência entre os indivíduos do grupo.

Assim, para realizarmos uma sociologia do processo a fim de analisar a constituição da identidade do CEM, julgamos ser necessário não somente compreender as causas do fracasso do **MOVIMENTO MATEMÁTICA MODERNA** (MMM) (sendo esse movimento nossa primeira configuração) nas escolas brasileiras – momento histórico da Educação Matemática em que o CEM foi fundado – como também o processo de sua introdução, afinal, as integrantes com mais tempo de experiência no ensino de matemática – como as professoras Anna Franchi, Manhúcia Líbermann e Lucília Bechara – vivenciaram o início do MMM e seu fracasso.

Essas "fundadoras" do grupo merecem uma análise atenta. Nota-se em todos os depoimentos alguma referência a elas, sempre com um grau acentuado de

[6] O autor cita como exemplo o caso do Japão, onde até mesmo o apego familiar já foi reduzido substancialmente nas últimas gerações.

respeito. O professor Antonio Lopes Bigode, principalmente, emociona-se ao falar das "velhas" (como se refere carinhosamente a elas).

Elias e Scotson (2000) analisam esse termo "velho" (ou "antigo") dentre as configurações da comunidade que foi tema do seu livro Os Estabelecidos e os Outsiders, e observam que esse termo é encarado como um "grande trunfo social", como motivo de orgulho e satisfação, e como uma qualidade inerente ao grupo "estabelecido" da comunidade. Segundo os autores, o termo "velho", nesse contexto, é uma categoria estritamente sociológica, não biológica – "um grupo velho de pessoas não precisa ser um grupo de pessoas velhas". Seu significado no contexto analisado expressou uma pretensão de distinção e superioridade sociais, além de uma conotação normativa. Era das "famílias velhas" que se esperava a manutenção dos padrões e compromissos elevados de seu grupo.

O termo "velhas", utilizado por Bigode, e esse respeito geral para com as professoras citadas, estão relacionados à distinção do (e no) grupo. Talvez a manutenção de padrões que foram por elas inicialmente impostos ao grupo implique em valor (e, portanto, poder) para o grupo. Tê-las como fundadoras significa apropriar-se de uma legitimidade de ação já inicialmente dada, posto que são, as "velhas", portadoras de uma experiência inequívoca em relação ao ensino de matemática, reconhecidas por essa experiência e, ainda que mais "velhas" biologicamente que os demais componentes, são tão (ou mais) atuantes quanto eles. Talvez a herança importante dessas "velhas" seja essa disposição de enfrentamento das causas educacionais e o conhecimento que têm dessas causas e suas cercanias: tê-las por perto ou trabalhar como trabalharam implicaria ter o mesmo reconhecimento que elas têm. De todo modo,

> *"seja qual for a forma específica assumida pela herança sociológica nesses casos, todas essas possibilidades de transmissão têm em comum o fato de representarem chances hereditárias de exercício do poder em relação a outras pessoas que, como grupo, só têm a elas um acesso limitado, quando não ficam diretamente excluídas"* (ELIAS & SCOTSON, 2000: 169).

O respeito do grupo para com a geração mais antiga demonstra o papel decisivo que a dimensão temporal (o desenvolvimento de um grupo) desempenha, impondo-se como determinante de sua estrutura e de algumas de suas características. O grupo da geração mais antiga do CEM (Anna Franchi, Manhúcia, Lucília e Antonieta – incluídos Dione, Anna Regina, Regina Pavanello, Dulce e

Bigode para a geração mais nova, a terceira) possuía um passado comum, do qual a geração mais nova ansiava apropriar-se. Isso pesava na constituição interna do grupo, que possuía membros de três gerações – inclusive o termo 'geração' teve dois sentidos: o tempo de atuação dos membros como professores e o tempo em que foram membros do grupo. A geração mais antiga (em qualquer dos dois sentidos) compunha-se de pessoas que haviam atravessado juntas um processo grupal que lhes dava um acervo de lembranças, experiências e trabalhos comuns. Somente levando em conta essa dimensão grupal diacrônica (geração mais antiga e mais nova) é que se torna possível compreender a lógica e o sentido do pronome pessoal “elas”, utilizado pelas gerações mais novas.

“Elas” (Manhúcia, Anna Franchi, Lucília, Dione e Anna Regina) presenciaram mudanças políticas e educacionais de grandes repercussões. Foram professoras na época da Ditadura Militar e em uma cidade como São Paulo (e Rio de Janeiro, no caso da Manhúcia), onde ocorreram algumas das maiores manifestações de estudantes universitários do país contra a repressão. Apesar de terem sido mínimas, nos depoimentos, as alusões ao sistema político da época – talvez por conta do caráter de suas entrevistas – é notória a postura política desse grupo que, em discussão, precaviam-se contra o colonialismo dos Estados Unidos, tão influente nas conjunturas políticas das décadas de 1950 e 1960 por conta da Guerra Fria, discutindo até mesmo se aceitariam trabalhar com verba do Banco Mundial.

Entendemos também não ser casual a opção do CEM pela escola pública. Sua primeira geração vivenciou as condições do ensino no país em período anterior à década de 1960[7]; trabalhou em colégios vocacionais e experimentais durante toda a década de 1960; e participou da tentativa de renovação do currículo escolar pelo MMM, como integrantes do GEEM. Essas senhoras do grupo mais antigo já atuavam como professoras primárias quando o ensino público teve alguns indícios de investimento efetivo do governo. Entre os anos de 1961 e 1964, o presidente Jango conseguiu desenvolver medidas importantes para o avanço nas áreas sociais. Em 1962, veio à público o Plano Nacional da Educação (PNE) que instituía um investimento em Educação de no mínimo 12% dos impostos arrecadados. No entanto, o plano foi extinto logo após o golpe de 1964.

A expansão do ensino superior deu-se, de fato, somente na Ditadura Militar (após 1968). A reforma universitária promovida pela lei 5.540/68 implantada pela

7 Apesar dos esforços de grupos defensores da escola pública desde o Manifesto de 1932, liderado por Fernando de Azevedo em relação à “renovação da educação” e defesa do ensino público, a década de 1960 refletia as conseqüências do ensino elitista e antidemocrático dos governos anteriores.

Ditadura se fez no sentido contrário ao da reforma proposta no período de Jango. As Reformas de Base propostas no período janguista direcionavam-se no sentido de democratização do ensino superior para que se diminuísse a velocidade de queda de níveis de vida de determinados setores que, para se manterem, começaram a precisar de mais anos de escolarização. Já para muitos do governo militar, na prática, a reforma visava a abafar a crise estudantil que se aguçava na época.

Apesar disso, foi notável a influência do avanço tecnológico ocorrido após a II Guerra Mundial sobre a renovação da educação no Brasil. A intensificação dos projetos de inovação curricular nos Estados Unidos para os ensinos elementar e secundário, principalmente no diz respeito à Matemática, interferiu em vários setores sobretudo na década de 1960. Segundo Burigo (1989), foi no período da Ditadura que se multiplicaram os acordos do MEC-Brasil com a USAID (*United States Agency for International Development*) e, com isso, a interferência norte-americana no ensino brasileiro. Expandir o ensino público significou uma propaganda do regime que, à custa de um endividamento acelerado, obteve um crescimento surpreendente na economia. Isso propiciou uma expectativa de ascensão social e de ampliação da oferta de mão-de-obra com qualificação mínima necessária ao atendimento dos setores industrial e de serviços.

De acordo com Burigo (1989), a expressão "Matemática Moderna" adotada para o movimento de renovação do ensino da matemática evidenciava, já no início dos anos 60, uma identidade de esforços em vários países. E o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), principal instrumento de divulgação desse movimento no país, liderado por Osvaldo Sangiorgi, da USP, nunca assumiu um discurso pedagógico mais global ou radical que pudesse ser identificado como ameaçador ao regime, do que resultou uma grande liberdade para divulgá-lo.

De acordo com os estudos de D'Ambrósio (1987) e Burigo (1989), o MMM deu ênfase ao formal, ao lógico e ao axiomático, explicitando uma crítica à ausência de rigor que caracterizava o ensino secundário tradicional. Tinha intenção de trabalhar mais profundamente os conteúdos com o intuito de preparar melhor os alunos para as universidades. Foi influenciado pela estruturação matemática do grupo Bourbaki, na França (iniciada nos anos 30), que considerava como bases da matemática as estruturas algébricas, de ordem e topológicas – claramente formalistas. Já as fundamentações psico-pedagógicas não eram tão explicitadas. Em geral, acreditava-se que o próprio conteúdo disciplinar dava conta das dificuldades de aprendizagem por ter linguagem mais precisa e evidente para promover as necessárias conexões entre tópicos. Pela própria influência nos estudos sobre educação a partir da década de 1960, de um modo geral, e pelos estudos que desenvolveu acerca da construção do conhecimento lógico matemático pela criança, o epistemólogo Jean Piaget (via Zoltan Dienes) contribuiu para "uma preocupação maior com a metodologia, num movimento que, de início, estava centrado nos programas" (BURIGO, 1989: 86).

A geração mais antiga do CEM esteve quase que totalmente envolvida nesse movimento, principalmente a professora Lucília Bechara, que foi integrante do GEEM, grupo responsável pelo movimento no estado de São Paulo, donde tomou forças no Brasil. Lucília e Manhúcia participaram do Curso de Matemática Moderna oferecido, em 1961, pela Secretaria da Educação conveniada com o Instituto Mackenzie e a USP, para professores do ensino secundário e, no mesmo ano, Lucília fez o Curso de formação de professores para os Ginásios Vocacionais, já iniciando seu trabalho no Vocacional "Osvaldo Aranha" do Brooklin. Nesse mesmo ano, Anna Franchi formou-se pela USP e iniciou seu trabalho no Experimental da Lapa, onde acaba sendo nomeada para a coordenação dos experimentos com conteúdos da Matemática Moderna no ensino primário, em parceria com Manhúcia – foi a partir de tais experimentos, não totalmente finalizados, que resultou o livro do GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada). Apesar de não ter sido integrante do GEEM, a professora Dione também deu cursos de Matemática Moderna pela Secretaria da Educação, mas, segundo seu depoimento, isso ocorreu quando Dienes já tinha uma influência maior no trabalho do grupo, devido às suas visitas ao GEEMPA (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de Porto Alegre) e ao GEEM.

Não existe resposta definitiva para a pergunta sobre os motivos que levaram ao final do MMM e do GEEM: há apenas indicativos. Um deles é que os responsáveis por esse movimento em São Paulo e no Brasil vincularam-se a ele de forma um tanto entusiástica e, desconsiderando o contexto, transferiram idéias educacionais de países industrializados para um país em desenvolvimento como o Brasil (D'AMBRÓSIO, 1987). Segundo Burigo (1989), "havia uma necessidade de renovação sentida pelos professores que precedeu um conhecimento mais preciso de qualquer projeto ligado à matemática moderna, e que refletia, sobretudo, a expansão do ensino secundário e a modificação de seu papel social" (p. 133) e, ao lado disso, as universidades de São Paulo (principalmente a USP), que já haviam assimilado o formalismo – sobretudo pela influência de Dieudonné e Weil, membros do grupo

Bourbaki que haviam lecionado na USP por alguns anos – e estavam dispostas a adaptar a proposta da Matemática Moderna (via GEEM) como solução para os problemas do ensino brasileiro.

Consideramos, também, que tratar d"A" Matemática Moderna não significa considerar "uma única" Matemática Moderna. Quando falamos dos fundamentos dessa Matemática Moderna, freqüentemente vêm à cena aqueles que, de alguma forma, "gerenciaram" – ou estiveram muito próximos dos gerenciadores, digamos assim – do movimento. Esse é, certamente, um viés a partir do qual podemos compreender a Matemática Moderna, mas obviamente não é o único. Pensamos que, para compreendê-la, é também necessário estudar os modos pelos quais ela foi divulgada e como os envolvidos no processo (professores, diretores, administradores escolares, autores de livros didáticos etc) se apropriaram desses modos. Alguns dos trabalhos já desenvolvidos em nosso grupo de pesquisa (o Grupo de Pesquisa "História Oral e Educação Matemática" – GHOEM) mostram, por exemplo, que os professores que atuavam em sala de aula nos anos em que vigia a Matemática Moderna, encontraram bastante dificuldade em acompanhar o que o movimento pretendia. Muitos faziam os cursos oferecidos pelo GEEM, mas muitos outros, que em sua formação não tinham tido contato com a linguagem específica da Teoria dos Conjuntos, por exemplo, ou mesmo tinham lacunas sensíveis em relação a uma formação pedagógica e/ou aos conteúdos matemáticos de uma forma geral [8], tendiam a pensar a Matemática Moderna como um modismo passageiro, do qual sequer compreendiam os fundamentos, a utilidade, a proposta. Muitos chegam a afirmar que a Matemática Moderna foi uma "perda de tempo" e que, apresentados em sala de aula aqueles conteúdos "obrigatórios" relativos aos conjuntos, voltavam aos conteúdos e métodos que lhes eram familiares. Os depoimentos que coletamos parecem ser interessantes para o estudo da Matemática Moderna a partir das apropriações que eram feitas pelos vários atores que conviviam na dinâmica escolar da época, mas até onde sabemos, nenhum trabalho específico sobre isso foi feito. E, obviamente, um estudo sobre essa dinâmica de apropriações nos permitiria compreender mais (ou nos permitiria compreender a partir de várias perspectivas) o fracasso da Matemática Moderna.

---

[8] Não deve ser desconsiderado quão recente é, no Brasil, a ampliação do sistema de ensino secundário que só ocorre, efetivamente, na década de 1950, e o modo abrupto como isso ocorreu. Essa situação implicou a criação de programas emergenciais de formação de professores para que os provenientes principalmente das Escolas Normais (voltados, portanto, ao ensino de primeiras letras) pudessem atuar no ensino secundário. Um dos principais programas de formação da época, implantado em 1952, foi a CADES (Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário).

De acordo com os estudos considerados, o esgotamento do movimento no Brasil combinou uma divisão em seu interior (principalmente no interior do GEEM) – entre os professores do secundário que tentavam implementar a metodologia de Dienes e os professores universitários que não trabalhavam com metodologia de ensino –, o fechamento dos colégios vocacionais e o desgaste do movimento em nível internacional.

O fechamento de tais colégios aconteceu pouco antes de instituída a lei 5.692/71, cuja promulgação tornou o segundo grau integralmente profissionalizante. O resultado foi um desastre pois não foram colocados os recursos humanos e materiais necessários para transformar toda uma rede nacional de ensino em "instância profissionalizante", sem contar que foi quebrada a espinha dorsal do ensino profissional existente que, até ali, funcionava bem. Segundo Ghiraldelli Jr. (2006), a Ditadura Militar fracassou em todos os sentidos no seu projeto educacional.

Mediante tal situação, aquelas senhoras continuaram seus estudos sobre Educação Matemática a partir de pesquisas e estudos de professores de fora do país, como Dienes (principalmente), Papi, Tamas Varga e, mais tarde, Claude Gaulin – já que, no Brasil, esse estudo sistematizado sobre o ensino e aprendizagem da Matemática ainda não existia – com o apoio das instituições privadas onde trabalhavam, tais como a Faculdade de Moema, a escola Vera Cruz e a PUC-SP. De acordo com Anna Franchi houve um *"movimento assistemático, informal desse pessoal remanescente do GEEM, que ocorreu desde o seu fechamento, ou da estagnação de suas atividades, até oitenta e três"*, ano em que iniciaram o Grupo Momento (Movimento de Matemáticos por uma Educação Transformadora). As experiências que vivenciaram nos colégios experimentais e no GEEM colaboraram para com o surgimento, nas searas paulistas, de um interesse pela Educação Matemática. Foi, digamos, essa "facção" do GEEM – de professores do primário e secundário – que deu continuidade aos estudos envolvendo o ensino e aprendizagem da matemática para esses níveis de ensino, e não os professores de matemática universitários.

Notamos que essa posição diacrônica (**EDUCADORES MATEMÁTICOS/MATEMÁTICOS**) inerente ao GEEM confere uma outra configuração ao CEM, caracterizando-o como um grupo de professores preocupados com a educação matemática dos ensinos fundamental, médio e superior.

> *Como um elemento da crescente valorização social do ensino secundário de matemática à qual o movimento (MMM) deu uma contribuição decisiva, surgia a figura do educador matemático, que já havia se esboçado nos anos 50: o profissional que se dedica ao ensino de matemática não só como atividade diária, como "fazer", mas como objeto de estudo e reflexão, de divulgação, de debate organizado; e que é reconhecido socialmente, a partir dessa dedicação, como um especialista na área. O papel antes desempenhado por alguns poucos professores universitários e de escolas normais, preocupados com o ensino secundário e elementar – entre os quais se destacavam os organizadores dos Encontros e Congressos e os poucos autores de livros didáticos – ampliava-se para os professores mais ativos do ensino secundário e elementar. /.../* (BURIGO, 1989. pp. 114)

Provavelmente foi durante esse período, entre a finalização das atividades do GEEM e a fundação do grupo Momento (Movimento de Matemáticos por uma Educação transformadora), que tanto aquelas senhoras como outros professores, de algum modo, "compararam" os resultados de suas experiências com a proposta da Matemática Moderna, e não apenas reconheceram a insuficiência centrada na reformulação da abordagem de conteúdos, como questionaram a ênfase nas estruturas matemáticas e na linguagem dos conjuntos, que propiciou, inclusive, a lacuna no ensino quanto à Geometria.

Não foi por acaso que os grupos Momento e, posteriormente, o CEM investiram no ensino da Geometria. De acordo com os depoimentos, a defasagem quanto a esses conteúdos deu-se tanto por conta da ênfase na Álgebra e na Teoria dos Conjuntos, sobrando pouco tempo do ano letivo para trabalhar com Geometria, como também devido à implantação de uma abordagem da Geometria estritamente vinculada às Estruturas Algébricas. Além disso, no Momento, houve a influência dos trabalhos de Claude Gaulin, mais voltados à Geometria, e experimentados e adaptados ao nosso contexto nacional de ensino pelo grupo.

Nessas circunstâncias, detectamos a **<u>GEOMETRIA</u>** (das transformações) como uma outra configuração própria ao grupo, de tal modo que tanto o Momento quanto o CEM chegam a ser caracterizados, pelos nossos depoentes, como "um grupo de estudos e pesquisas voltado para o ensino de Geometria".

As experiências vividas anteriormente por essas senhoras junto ao MMM e aos colégios experimentais, bem como suas iniciativas tiveram influências sobre os estudos, as propostas de projetos e a mentalidade dos grupos subseqüentes (Momento e CEM): uma não adesão imediata às propostas advindas de contextos internacionais; incorporação de conteúdos baseada em experimentos; trabalhos com Geometria valorizando a compreensão do espaço físico em detrimento da seqüência linear (ponto, reta, plano, espaço)...

Como sugere Elias, não devemos analisar os fatos tomando como referência apenas a atualidade, pois eles só têm fundamento e só podem ser compreendidos na esteira de uma ordem de eventos sucessivos. Essa análise sociológica promovida por Elias nos permite uma visão processual do grupo. O "Projeto de cooperação" (convênio) entre a Universidade de Laval, coordenado pelo professor Claude Gaulin, e os professores de São Paulo, coordenados por Lucília Bechara e Anna Franchi, nos auxilia a compreender essa trama de eventos.

Os professores envolvidos foram aqueles que já participavam dos cursos e estudos da época de transição entre o GEEM e o Momento. Como descreveu Anna Franchi sobre os trabalhos do Momento, *"as pessoas foram selecionadas utilizando-se, mais ou menos, o critério de serem professores que estavam exercendo alguma atividade em educação matemática e que mantinham direta ou indiretamente algum contato com os grupos mais diretamente envolvidos na organização das atividades do Projeto"* (SILVA, 2006: 60). Esses estudos, bem como o convênio, previam duas coisas: *"a obrigação dos participantes em fazer e discutir novas experiências na sala de aula sobre temas abordados e, também, produzir novos materiais de acordo com esse trabalho desenvolvido na nossa realidade"* (ibid). As coordenadoras incentivaram a produção de material e promoveram muitos cursos pela Secretaria da Educação logo após a estagnação do MMM. Assim, os conteúdos matemáticos tratados depois do auge desse Movimento foram gradualmente reformulados, ou seja, não ocorreu do grupo reunir-se para pensar prontamente a substituição do conteúdo dos livros didáticos e do currículo, mesmo porque as pessoas que dele faziam parte perceberam de forma gradual as mudanças necessárias – elas comentam, inclusive, que os livros subseqüentes ainda possuíam resquícios da Matemática Moderna.

Em termos dos conteúdos e da metodologia de ensino propostos no projeto desse convênio entre o Momento e a Universidade de Laval [9], encontramos muito da influência das "fundadoras" e, no que tange aos aspectos gerais das atividades do CEM, observa-se uma vinculação entre os objetivos de seus **PROJETOS** – outra configuração – e os interesses do Subprograma Educação para Ciência/SPEC-PADCT-CAPES, desenvolvido entre 1983 e 1997.

[9] Universidade canadense, do Quebéc, à qual Claude Gaulin estava vinculado.

Pode-se dizer que o grupo CEM foi a continuidade do Momento com a diferença de que o CEM funcionou o tempo todo a partir de projetos. Segundo nossos depoentes e alguns documentos, um dos subgrupos do Momento – o Madri Alix, do Bairro dos Jardins[10]-, submeteu projeto a esse Subprograma. O projeto foi aprovado, mas por tratar-se de um grupo sem vínculo institucional específico, foi necessário, antes, institucionalizá-lo como um grupo, o SEM (Sociedade de Educação Matemática). Posteriormente, para não haver confusão com o nome da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) (fundada três anos depois – em 1987), tornou-se CEM. Como muitos dos integrantes do Momento participaram das atividades do CEM, a geração mais antiga, com exceção da Anna Franchi (uma das responsáveis pela fundação do CEM), encara o Momento e o CEM como um único grupo. A professora Manhúcia, inclusive, não distinguiu os grupos em seu depoimento.

Segundo Gurgel (1995), as propostas de ensino dos grupos vinculados ao SPEC eram muito semelhantes e, acreditamos, isso pode tanto estar vinculado à mentalidade da comunidade acadêmica da época – à qual o CEM tinha acesso e compartilhava – como também ao processo educativo vigente, cujas condições eram precárias. O SPEC foi desenvolvido em três fases (1983-89, 1990-95 e 1995-97): iniciou-se na gestão de José Sarney – época do "Plano Cruzado" –; resistiu às investidas de Fernando Collor contra setores de fomento à investigação científica; e sobreviveu até o governo de Itamar Franco, que tentou "reorganizar" a vida estatal do país e recriar uma série de instâncias extintas por Fernando Collor (GHIRALDELI Jr., 2006).

Como assinala Gurgel (1995), um dos interesses do SPEC foi estimular a comunidade acadêmica em torno de questões próprias e particulares do processo de ensino-aprendizagem das Ciências, um aspecto definidor dos interesses e ações do CEM, inclusive, contrariamente ao que ocorreu no GEEM. Nesse aspecto, Gurgel observa que o ideal comum dos projetos aprovados pelo SPEC incluia o questionamento sobre a eficácia do ensino por transmissão e sobre as visões simplistas de ensino e aprendizagem das Ciências, e sugeria procedimentos pedagógicos que levassem em consideração "pré-concepções alternativas ou concepções espontâneas dos aprendizes", acatando, então, projetos "cuja natureza política se voltasse para o exercício soberano das cidadanias". A perspectiva sobre o

[10] O grupo Momento reunia-se mensalmente, em sábados, e era formado por cinco subgrupos cujas atividades ocorriam durante a semana. Os subgrupos eram nomeados de acordo com sua localização na grande São Paulo: Madri Alix (Jardins), Santo André, Moema, Vera Cruz e Experimental da Lapa

ensino das Ciências era a da superação do reducionismo conceitual por procedimentos e atitudes que favorecessem a efetividade das propostas voltadas para a "construção do conhecimento", além de um consenso crescente em torno do modelo de "aprendizagem como investigação".

Outro interesse do SPEC foi a formação inicial e continuada do professor e, de acordo com essa mesma autora, um consenso em relação aos pesquisadores dos projetos do SPEC foi a necessidade de uma capacitação permanente para atender às novas reivindicações do ensino, dado que a aprendizagem inicial não era suficiente para tanto. A autora frisa que, devido a esses limites e dificuldades detectados, a formação do professor em todos os níveis (licenciatura, magistério e educação continuada) foi um quesito fundamental para a avaliação dos projetos. Ciente dessas necessidades, o CEM focou sua atenção em projetos de formação contínua de longa duração.

Além disso, o CEM avaliou a importância da autonomia na gestão, administração orçamentária e condições materiais de trabalho nas escolas para o planejamento e execução de atividades de pesquisa em ensino que foram elementos tidos como essenciais para a descentralização de programas de capacitação docente e a implementação efetiva de inovações curriculares. Bigode comenta que muitos dos que faziam os cursos do CEM dirigiam-se à pesquisa acadêmica e/ou tornavam-se "professores militantes", coordenadores ou diretores de escolas.

A iniciativa do SPEC em efetivar, a partir de 1990, uma rede de professores multiplicadores – no caso do CEM, o "Projeto de Disseminação e Aperfeiçoamento de Estratégias de Formação de Multiplicadores em Educação Matemática", sub-projeto do RIPEC, SPEC/PADCT/CAPES – foi reconhecida pelos vários grupos participantes como uma sinalização de "oportunidades de extensão e de formação de núcleos e redes de disseminação de ensino e pesquisa desejáveis, e que, portanto, não deveria ser interrompido", apesar das muitas irregularidades na liberação de seus recursos e nas formas de assessoria. Vinculados a um programa que visou à integração, as propostas dos grupos estavam inter-relacionadas. O grupo de Brasília, por exemplo, desenvolvia ações muito semelhantes às do CEM, disso decorrendo a influência na formação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Como mostra o depoimento da Dulce Onaga, o CEM também continuou suas atividades após o encerramento do SPEC, mas, diferentemente desse grupo da UnB que teve apoio da universidade, o CEM não recebeu mais apoio financeiro algum e, como todos crêem, essa foi uma das causas para seu esvaziamento. Juntamse a isso as iniciativas do Governo Federal, à época, de investir em cursos de pós-graduação e de promover a incorporação dos projetos do SPEC pelas Universidades.

Apesar de ser natural, para alguns depoentes, que os professores do CEM que ingressaram na carreira universitária concentrassem suas ações a partir das novas instituições das quais passaram a fazer parte, isso não foi visto com tanta naturalidade entre os professores não-universitários integrantes do grupo. Inclusive parece haver um consenso entre estes de que o esvaziamento do grupo tenha se dado não apenas pela falta de financiamento para levar adiante novos projetos, mas como também pelo não interesse dos professores universitários vinculados ao CEM em continuar as atividades no grupo – o depoimento do Paulo Neves frisa bem essa idéia. **A RELAÇÃO ENTRE ENSINO E PESQUISA** é, para nós, uma outra configuração do CEM.

Com essas configurações – que não são únicas nem definitivas – pensamos ter esboçado uma idéia da análise processual de coletividades de Elias e, com isso, ilustrar o processo de constituição da identidade do CEM sob um ponto de vista sociológico.

Considerações finais

Este artigo é, por sua própria natureza e intenção, insuficiente. Aqui tentamos explicitar a "dês"-concepção de identidade que defendemos em nossa pesquisa. Outros mil estudos seriam insuficientes, mas um conjunto de outras tentativas – além da sociológica – talvez pudesse dar um quadro mais geral à nossa proposta. Entretanto, há as limitações impostas para um artigo e, dadas essas limitações, optamos por apresentar um em meio a outros tantos possíveis fragmentos de identidade do CEM. Nenhum dos fragmentos possíveis definiriam uma constituição (interna) do CEM. Entretanto, cada um e todos os fragmentos por nós desenvolvidos (mais todos os que poderão vir a ser constituídos pelo leitor) permitem que um grupo apareça, sobrepondo-o às relações entre uns e outros, situando-o em relação aos uns e aos outros, definindo sua diferença, sua irredutibilidade e sua desigualdade, criando como que um campo de exterioridade.

Além disso, com a explicitação dessas formas distintas de apresentar a identidade do CEM procuramos deslocar a questão da identidade da discussão sobre as teorias do sujeito, buscando abordar os processos de produção de significados que possibilitam a emergência de significados outros e distintos daqueles confinados em tais teorias.

Podemos dizer que o pensamento pós-moderno apóia-se sobre nenhum absoluto, operando uma mudança, uma reversão em relação às condições anteriores, próprias do pensamento moderno, enfraquecendo as tentativas de totalização, de forma que a própria noção de totalidade é abandonada. O pós-moderno adere, portanto, à existência de uma série de *interpretações* no devir da humanidade com relação à "realidade" e, inclusive, à compreensão de si mesma, ou seja, do sujeito e, por conseguinte, da identidade. Hall (2000) chamou esse sujeito a que se dirigem os pensadores pós-modernos de "sujeito fragmentado" por ser possuidor de diferentes identidades, constituindo-se a partir de elementos advindos de sua representação no meio social em que vive. Não obstante, apesar de afastar-se da noção de sujeito uno e centrado, o uso da expressão "sujeito fragmentado" ainda dá margem à possibilidade de acesso a um sujeito, na medida em que afirma que este sujeito *é* fluido e constituído de diferentes elementos e identidades dependentes do mundo cultural em que vive.

Alguns pensadores pós-modernos ultrapassam esse problema rejeitando a própria consideração do sujeito sobre o qual se pode verificar a existência de elementos característicos. Se não é possível ter acesso a esse sujeito singular e, portanto, incompreensível, inidentificável, irrepresentável e imprevisível, é inútil elaborar articulações (pesquisar, analisar) sobre ele: afirmar que o sujeito possui identidades e elementos variados e contraditórios é falar de um sujeito "denso" (de elementos e identidades). Por isso, há de se concordar com Larrosa (2004) quanto ao que se tem feito nas pesquisas sobre a identidade de pessoas e comunidades serem falsificações, violências, exclusões, delimitações, estereótipos.

Se as teorias do sujeito perderam sua legitimidade, o que devemos considerar ao tratar desse tema de modo que não sejamos reducionistas como elas próprias foram? Se considerarmos Foucault (cf. SILVA, 2006), compreenderemos que as "identidades" são resultados de processos discursivos. Mas então poderemos nos questionar sobre quais desses processos devem ser considerados e como devemos tratá-los ao desenvolver uma pesquisa acadêmico-científica. Toda essa crítica ao pensamento moderno é construída de modo a deslegitimar o discurso científico nele defendido. Se pretendemos continuar trabalhando com políticas da identidade estaremos "fazendo justiça" dando continuidade à constituição e transformação das identidades históricas. Mas se temos "consciência" disso, uma importante atitude (e, talvez, um encaminhamento operacional) é tentar revelar essas constituições a partir dos próprios grupos e comunidades pesquisados. E quanto a isso, acreditamos, o movimento da História Oral na educação matemática tem importante papel a desempenhar.

Registrar a história do CEM foi também concretizar o desejo de um grupo – ao menos no que diz respeito aos depoentes que se manifestaram claramente entusiasmados com o projeto quando aceitaram nosso convite para participar dessa empreitada – o que acreditamos ter sido uma das mais importantes dentre as motivações que resultaram nessa pesquisa. Dentre nossos objetivos para estudar "a identidade" do CEM sempre esteve a possibilidade de compreender – e constituir projetos outros – para a formação continuada de formação de professores. Como resultado temos as *narrativas* – tais como as definiu Walter Benjamin (1994) – de e sobre um grupo de professores formadores e educadores matemáticos, histórias *de quem sabe dar conselhos* sobre a formação do professor de matemática.

Referências

BENJAMIN, W. **Magia e Técnica, Arte e Política**: ensaios sobre Literatura e História. São Paulo: Brasiliense, 1994.

BERGER, P.I & LUCKMANN, T. **A construção social da realidade**. Petrópolis: Vozes, 1991.

BOURDIEU, P. **Le Sens Pratique**. Paris: Minuit, 1989.

BURIGO, E.Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: Estudo da ação e do Pensamento de Educadores Matemáticos nos anos 80. Dissertação. UFRGS. Porto Alegre, 1989.

CARMONA, D. R. **Identidade profissional dos Professores de Matemática** – Processos de Formação. Tese. FCT. Lisboa, Portugal, 1993.

D'AMBRÓSIO, B. S. **The Dynamics and Consequences of the Modern Mathematics Reform Movement for Brazilian Mathematics Education**. Dissertation: Ph.D. Indiana University 1987.

DURKHEIM, E. **As Regras do Método Sociológico**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1974.

ELIAS, N. **A sociedade dos indivíduos**. Rio de Janeiro: Zahar, 1994.

ELIAS, N. & SCOTSON, J. L. **Os estabelecidos e os outsiders**. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

GARNICA, A.V.M. **Um Tema, Dois Ensaios**: método, História Oral, concepções e Educação Matemática. Tese de Livre Docência. Departamento de Matemática. Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2005.

GHIRALDELLI Jr., P. **História da Educação Brasileira**. São Paulo: Cortez, 2006.

GURGEL, C.M.A. **Em busca da melhoria da qualidade de ensino de Ciências e Matemática**: ações e revelações. Tese. FE/UNICAMP. Campinas, 1995.

HALL, S. Quem precisa da Identidade? In Silva (org.). **Identidade e Diferença**: a perspectiva dos estudos culturais. Petrópolis: Vozes, 2003. p.103-133.

HALL, S. **A Identidade Cultural na Pós Modernidade**. Rio de Janeiro: DP & A, 2000.

LARROSA, J. 20 minutos em la fila. Sobre experiencia, relato y subjetividad em Imre Kertész. **ANAIS** do I Congresso Internacional sobre Pesquisa (auto)biográfica. Porto Alegre, 2004.

LINARDI, P. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática**. Tese. UNESP, Rio Claro, 2006.

LINS, R.C. Porque Discutir Teoria do Conhecimento é Relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999. p. 75-94.

NIETHAMMER, L. Conjunturas de identidade coletiva. **Revista Projeto História**, n. 15. São Paulo: EDUC, 1997. p. 119-144.

PONTE, P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J.M., Development of Pré-service

Mathematics Teachers' Professional Knowledge and Identity in Working with Information and Communication Technology. **Journal of Mathematics Teacher Education** 5, 2002. p. 93-115,.

SILVA, H. Nos Rastros das Identidades de um Grupo de Formadores em Educação Matemática: Sobre Método e Procedimentos. **ANAIS** do VIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2004.

SILVA, H. **Centro de Educação Matemática (CEM)**: Fragmentos de Identidade. Tese (Doutorado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 2006.

WALSHAW, M. Pré-service mathematics teaching in the context of schools: an exploration into the constitution of identity. **Journal of Mathematics Teacher Education** 7, 2004. p. 63-86

WREN, T. Cultural Identity and Personal Identity – Philosophical Reflections on the Identity Discourse of Social Psychology. In: Musschunga, B. (ed.). **Personal and Moral Identity**. Amsterdam: Kluwer, 2001.

Submetido em dezembro de 2008.
Aprovado em março de 2009.

A Desigualdade Triangular: Cenários para investigação numa sala de aula de 6ª série

Mirian Tomazetto
Professora da Educação Básica
mtomazetto@bol.com.br

Adair Mendes Nacarato
Professora, USF/Itatiba/SP
adamn@terra.com.br

Resumo
A presente pesquisa foi realizada com alunos de uma 6ª série de uma escola municipal de Itatiba/SP e teve como objetivo analisar os conhecimentos matemáticos produzidos e mobilizados por alunos e professor. O recorte aqui apresentado analisa uma tarefa relacionada à desigualdade triangular. Discutem-se a natureza e as potencialidades das tarefas que possibilitam a investigação matemática do aluno. A análise da tarefa realizada destaca a importância da criação de um cenário para investigação cuja dinâmica valoriza os processos de discussão, diálogo e comunicação nas aulas de matemática, bem como o papel da escrita por parte do aluno. Destaca também como o ambiente de aprendizagem instaurado rompe com o "paradigma do exercício" e cria uma outra cultura de aula de matemática.

Palavras-chave: cenário para investigação; desigualdade triangular; investigações matemáticas; comunicação nas aulas de Matemática.

Triangular Inequality: Scenarios for investigation in a 6th-grade classroom

Abstract
The present research was carried out with 6th-grade students of a public municipal school in Itatiba, SP. It was aimed at analyzing mathematical knowledge produced and rearranged by students and their teacher. The situation presented here brings the analysis of a task related to triangular inequality. The kinds of tasks that allow students' mathematical investigation, as well as their potentialities, are discussed. The task analyzed shows the importance of creating an investigation scenario whose strategies focus on the processes of discussion, dialogue and communication in mathematics classes, as well as the role of writing tasks developed by students. It also points out to how the learning atmosphere can break the "exercise paradigm" to create another culture for mathematics classes.

Keywords: investigation scenario; triangular inequality; mathematical investigation; communication in mathematics classes.

Introdução

Muito se tem discutido sobre a forma como a matemática deveria ser trabalhada em sala de aula da educação básica. Têm sido apontadas, para o ensino de matemática, novas abordagens que, de certa forma, rompem com a visão tecnicista e mecanicista ali ainda tão presente. Tais abordagens — denominadas por Alrø e Skovmose (2006, p. 52) de "abordagens investigativas" — buscam romper com o "paradigma do exercício" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 52), o qual tem influenciado a organização das aulas e limitado a comunicação entre professor e alunos.

Documentos produzidos a partir da década de 1980, como os Standards (publicados pelo NCTM e traduzidos pela APM) e os PCN (BRASIL, 1998), destacam a resolução de problemas e os processos de comunicação em sala de aula como elementos centrais nas novas abordagens de ensino. Nesse processo de repensar a aula, uma modalidade de exploração da matemática escolar vem ganhando valorização. Trata-se das aulas investigativas ou investigações matemáticas, em que o aluno é colocado diante de tarefas que requerem a predisposição e a aptidão para raciocinar, desencadeando a investigação matemática. Nessas tarefas, como nos dizem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), o aluno formula questões e conjecturas, realiza provas e refutações, discute e argumenta com os colegas e com o professor e busca validar seus argumentos.

O Brasil conta com vários pesquisadores[1] que trabalham na perspectiva da resolução de problemas e há várias produções já publicadas. No entanto, talvez pela influência dos pesquisadores portugueses, a abordagem metodológica de investigações matemáticas na sala de aula vem ganhando destaque, com algumas pesquisas já produzidas e publicações em periódicos e livros[2].

Esse movimento influenciou-nos para a realização da presente pesquisa, em 2005, numa 6ª série do ensino fundamental da rede municipal de Itatiba/SP.

Abordagens investigativas: algumas aproximações teóricas

Investigar é pesquisar, procurar conhecer o que não se conhece, buscar respostas para as questões que se quer conhecer e, como qualquer pesquisa, resulta

[1] Destaca-se o grupo de pesquisa coordenado pela Profa. Dra. Lourdes Onuchic, da Unesp/Rio Claro.
[2] Destacam-se as produções do Grupo de Sábado (GdS), da FE/Unicamp.

em produção de conhecimento. Explorar a investigação em sala de aula é possibilitar ao aluno o fazer matemático, aproximando-o da genuína atividade matemática: identificar propriedades dos objetos estudados, estabelecer relações, levantar conjecturas e buscar sua validação.

Nesse processo, alguns tipos de pensamento estão envolvidos: o indutivo, o abdutivo e o dedutivo. O indutivo parte de casos particulares e procura uma generalização; é quando são feitas as analogias, por exemplo, das estruturas matemáticas. No pensamento abdutivo, os dados de uma questão já foram explorados e chega-se apenas a uma conclusão plausível, por eliminação das outras hipóteses. A dedução, antônimo da indução, do caso geral vai para o particular; é um pensamento que já está pronto, é lógico, tem como função a validação de um conhecimento já produzido pelos outros tipos de pensamento.

A investigação matemática em sala de aula propõe que o aluno se aproxime da prática social de produção matemática. Segundo Oliveira (2003, p. 257), "é importante que o aluno tenha oportunidade de fazer inferências abdutivas (pelo seu valor criativo e explicativo), indutivas (porque envolve o pensamento analógico, tão caro aos matemáticos) [...] no período da investigação". Ainda, segundo esse autor:

> Numa perspectiva epistemológica, o estilo investigativo tem a sua expressão mais alta quando há produção de conhecimento novo por parte do aluno. [...]. Contudo, uma vez que o objectivo último do processo de ensino-aprendizagem não é o incremento de conhecimento, a vertente epistemológica tem que ser perspectivada em contexto, ou seja, não pode analisar-se o conhecimento produzido pelos alunos em absoluto, i.e., à parte da sua idade, da sua maturidade matemática, do seu progresso relativamente a experiências investigativas anteriores, etc. (OLIVEIRA, 2003, p. 255-256)

Embora na literatura existam diferentes publicações estabelecendo distinções entre problemas, exercícios e tarefas de investigação, entendemos que mais importante que fazer essas distinções é a dinâmica que se estabelece na sala de aula e nas interações entre professor e alunos e entre os alunos entre si[3]. É esse ambiente criado em sala de aula que dará a conotação de um "cenário para investigação". Nesse sentido, apropriamo-nos das idéias de Alrø e Skovsmose (2006), que denominam essas abordagens de investigativas e chamam o ambiente que se cria em sala de aula, apropriado às mesmas, de "cenários para investigação". Tais cenários, segundo eles:

[3] Neste trabalho não temos intenção de diferenciar tarefa de atividade. Utilizaremos ambas as denominações.

> são, por natureza, abertos. Cenários podem substituir exercícios. Os alunos podem formular questões e planejar linhas de investigação de forma diversificada. Eles podem participar de processo de investigação. Num cenário para investigação, a fala "O que acontece se...?" deixa de pertencer apenas ao professor e passa a poder ser dita pelo aluno também. E outra fala do professor, "Por que é dessa forma...?", pode desencadear a fala do aluno "Sim, por que é dessa forma...?". (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p.55-56)

Assim, num contexto de investigação a proposta é de que o aluno se torne um investigador; a curiosidade é despertada, promovendo a autonomia intelectual do aluno.

Numa tarefa que se propõe ser investigativa, por ser aberta, conhece-se o ponto de partida, a questão a ser desvendada, mas o caminho que se percorrerá e o seu final não são conhecidos. "No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.17), o que é desafiante, pois o aluno é mobilizado a utilizar suas estratégias e testar suas conjecturas.

Nesse contexto, novas formas de organização de aulas e de processos comunicativos fazem-se necessários.

> Os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem. [...] Tanto o professor quanto os alunos podem ser cometidos por dúvidas quando chegam para trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de "regras" de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p.58)

Ainda, segundo esses autores, o envolvimento dos alunos nesse tipo de tarefa gera o que eles denominam de "aprendizagem como ação" e "aprendizagem como investigação", que estão diretamente relacionadas à concepção de "cooperação investigativa" (Ibidem, p.59). Segundo o modelo por eles proposto, na "cooperação investigativa" há a forte presença de elementos como: "estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar" (Ibidem, p. 69), tanto por parte do aluno quanto do professor.

Embora com terminologias diferenciadas, entendemos uma aproximação entre o modelo proposto por Alrø e Skovsmose (2006) e as sistematizações feitas pelos pesquisadores portugueses, a partir de uma série de pesquisas e estudos sobre tarefas de investigação. Nesse sentido, julgamos que a dinâmica proposta por esses pesquisadores pode contribuir para esse cenário para investigação. Dessa forma, concordamos com tal dinâmica, a qual temos experienciado em nossas aulas e que pressupõe, necessariamente, a organização da classe em grupos, para que os alunos possam trabalhar de forma cooperativa e colaborativa. O grupo possibilita a reflexão, a reflexão na ação e a reflexão distanciada. Segundo Oliveira e Serrazina (2002, p. 32):

> As conversações reflexivas podem ser colaborativas e em muitos casos contribuem para a tomada de decisões, a compreensão e troca de conhecimento e de experiência.
>
> A ideia de reflexão surge associada ao modo como se lida com problemas da prática profissional, à possibilidade da pessoa aceitar um estado de incerteza e estar aberta a novas hipóteses dando, assim, forma a esses problemas, descobrindo novos caminhos, construindo e concretizando soluções.

Para essa dinâmica são necessários três momentos. No primeiro deles, o professor prepara a tarefa a propor aos alunos. No segundo, os alunos, preferencialmente em grupos, trabalham na tarefa. Para isso fazem explorações, levantam conjecturas e buscam suas validações, registrando suas descobertas. No terceiro momento há a socialização das produções dos diferentes grupos. Cada um deles expõe ao restante da classe seus resultados, oralmente ou em cartazes, transparências, etc. Nesse momento de socialização e confronto de idéias, os alunos aprendem a comunicar-se matematicamente e a buscar a sistematização, ou seja, a conclusão desses diversos trabalhos — o que gera novos conhecimentos. É um importante momento para demonstrar e justificar suas conjecturas, dependendo da série em que se está trabalhando. Como em qualquer atividade, também nas tarefas investigativas se deve proceder à avaliação, que permite ao professor verificar o progresso, ou não, do aluno. Um dos procedimentos indicados, o primeiro deles, é a observação constante do trabalho no decorrer da atividade. Assim, o professor poderá interferir, verificar o raciocínio e perceber quais conhecimentos estão sendo mobilizados. A segunda maneira de avaliar são as apresentações orais, nas quais o aluno desenvolve a capacidade de comunicação e argumentação. Por fim, é recomendável a entrega, pelos alunos, de um relatório — individual ou coletivo —

que deve conter todo o processo de raciocínio utilizado: as conjecturas, os testes, as conclusões a que chegaram (o que aprenderam); representações que indicam as estratégias utilizadas: descrição do trabalho realizado, desenhos, tabelas, esquemas, entre outras; e um comentário sobre o que acharam, os aspectos em que tiveram mais dificuldades. Esses relatórios podem seguir um roteiro organizado pelo professor.

Na produção dos relatórios exige-se a escrita do aluno. Concordamos com Powell e Bairral (2006) que a escrita possibilita a emergência do conhecimento matemático produzido pelos alunos. É uma forma de matematizar. "Matematizar é um processo natural, inerente a todo ser humano, que deve ser desenvolvido à medida que este tome consciência de um evento ou acontecimento matemático e construa para ele diferentes formas de convencimento." (p.15).

Outro momento importante desse processo de escrita é o retorno que o professor dá aos seus alunos, possibilitando que estes tomem consciência de seus avanços e de suas lacunas conceituais e possam analisar possíveis falhas a serem melhoradas. "A escrita é um meio estável que permite a alunos e docentes examinarem colaborativamente o desenvolvimento do pensamento matemático." (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 27-28). Trata-se da valorização do trabalho dos alunos, a qual possibilita "confiança e motivação para fazer e entender matemática" (Ibidem, p.28).

Constata-se, assim, que tanto nas etapas do trabalho em grupo quanto na da socialização dos resultados, os processos de comunicação de idéias são centrais. Nesses processos, a linguagem — oral, gestual ou escrita — não pode ser desconsiderada. Como nos diz Santos (2005, p. 119), "os aspectos lingüísticos precisam ser considerados inseparáveis dos aspectos conceituais para que a comunicação e, por extensão, a aprendizagem aconteçam". Isso pressupõe compreender a aprendizagem como um processo de socialização por meio da comunicação.

Nesse cenário, as aulas são diferentes das aulas tradicionais pautadas no "paradigma do exercício"; portanto, o papel do professor também se diferencia. Como diz Skovsmose (2008, p. 37), "Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor" e, portanto, significa entrar numa "zona de risco". Muitos professores preferem não se arriscar, permanecendo na "zona de conforto", no paradigma do exercício. Num cenário para investigação, professor e alunos precisam arriscar-se, de forma cooperativa, numa atividade produtiva. No entanto, cabe aos alunos percorrerem esse cenário. O professor tem papel fundamental na preparação das tarefas a serem propostas, de forma que estas sejam desafiadoras para os alunos. Via de regra, quando o professor inicia a prática de aulas investigativas, utiliza tarefas produzidas por outros; somente depois de várias experiências é que ele, provavelmente, começa a criar as suas próprias e passa a ser também um investigador matemático escolar. Às vezes, pode ocorrer de um simples exercício desencadear um cenário para investigação. Isso depende das questões que são postas pelos alunos e pelo professor e, também, de quanto os alunos e o professor estão envolvidos nesse tipo de atividade.

Concordamos com Oliveira (2003, p. 255) que

> um modelo de ensino que integre de modo consistente, coerente e permanente a dimensão investigativa cria condições para que o aluno expresse e desenvolva a sua curiosidade, formule questões intrigantes e lhes dê resposta adequada segundo a sua capacidade matemática, interesse e desenvolvimento cognitivo. [...] a abordagem investigativa ao ensino da matemática dará mais possibilidades ao aluno de enfrentar um mundo em que predominam a incerteza, a instabilidade, a mudança constante, a imprevisibilidade e a necessidade de adaptação a, e exploração de, situações sempre novas.

No entanto, há que ressaltar que, mesmo com toda a preparação prévia do professor, pode ocorrer que uma tarefa planejada visando criar esse cenário para investigação fique apenas no plano da exploração. Daí nossa opção pela denominação de tarefas exploratório-investigativas. Uma delas será destacada no presente artigo.

O contexto da pesquisa: sujeitos, documentação e tarefa selecionada

A pesquisa aqui apresentada — de abordagem qualitativa — objetivou analisar os conhecimentos matemáticos produzidos e mobilizados por alunos e professor em cenários para investigação. Para tal, foram trabalhadas três tarefas de natureza exploratório-investigativa com alunos (com idades de 12-13 anos) de uma turma de 6ª série do Ensino Fundamental, numa escola pública municipal de Itatiba/SP, num total de dez horas-aulas. Contamos com a colaboração do professor da turma que, além de ceder sua classe para a realização do trabalho, colaborou na escolha das tarefas a serem realizadas.

A documentação foi constituída por: registros escritos dos alunos, audiogravação das discussões nos grupos e no coletivo da classe, diário de campo da pesquisadora e conversas informais com o professor responsável pela turma.

Para este artigo selecionamos uma das tarefas — propriedade da desigualdade triangular —, que consistia em resolver uma situação-problema envolvendo conceitos geométricos com vistas a uma generalização. Para essa tarefa são necessários três dados convencionais e um conjunto de palitos cortados em comprimentos que variam de uma a seis unidades de comprimento. Lançam-se os três dados e apanham-se os três palitos com as unidades de medida correspondentes aos números de pontos obtidos nas três faces dos dados. Verifica-se se os três palitos formam ou não um triângulo. As conclusões são registradas, e o objetivo é que os alunos observem as regularidades nesses registros, buscando uma conjectura para o fato e, em seguida, tentem concluir qual é a condição para que três palitos formem ou não um triângulo; ou seja, o objetivo da tarefa é que seja anunciada a propriedade da desigualdade triangular.

O que é um triângulo? De uma indagação inicial à mobilização de saberes

Nossa expectativa inicial na tarefa proposta era de que os alunos buscassem uma generalização da desigualdade triangular. No entanto, as surpresas são inevitáveis quando se entra num cenário de investigação.

Uma das primeiras questões de um grupo — no qual estava o gravador, pois a cada aula este ficava em um grupo diferente da classe — foi identificar quando uma figura formada pelos três palitos era ou não triângulo, ou seja, o foco não estava na condição de existência do triângulo, mas no seu próprio conceito. Dois alunos defendiam que três palitos de medidas diferentes para os lados não poderiam formar um triângulo (no caso, um triângulo escaleno); outro aluno ainda argumentava que apenas a figura com três lados com a mesma medida seria triângulo (triângulo eqüilátero). Defrontavam-se, assim, com o problema do objeto-prototípico. "O fenômeno protótipo" (HERSHKOWITZ apud NACARATO; PASSOS, 2003) discute os obstáculos que figuras estereotipadas provocam no processo de elaboração conceitual em geometria. Segundo essas autoras (2003, p. 108), o objeto-prototípico ou figura prototípica, sem dúvida, tem sido considerado como um dos grandes obstáculos — tanto didático como epistemológico — para o ensino e a aprendizagem da geometria. No caso, para estes alunos, as imagens mentais que possuíam era do triângulo na posição convencional (um dos lados paralelo à margem do caderno) e do triângulo de lados congruentes (dois ou três lados congruentes).

Constatou-se que, para eles, o triângulo escaleno não existia. O fragmento de diálogo a seguir ilustra tais constatações:

> **PP[4]:** *Bom! Você acha que não é (triângulo) por quê? Vamos ver.*
> **A1:** *Acho que por que uma parte está assim e a outra está assim, olha!!!Uma está reta e a outra está inclinada.*
> **A2:** *Tem três partes, é igualzinho a um triângulo, só pode ser um triângulo.*
> **A3:** *Não importa o tamanho, importa que tem três lados.*
> **PP:** *Fala, J. É triângulo, J., para você aquilo ali?*
> **A4:** *É um triângulo mais ou menos.*
> **PP:** *O que é um triângulo mais ou menos, A4?*
> **A2:** *Esse triângulo aqui, professor, ele tem três partes certa, esse aqui não, olha, que número você tirou mesmo?*
> **A1:** *5, 4 e 3.*
> **A2:** *Três partes certas são as que, tipo assim, uma parte tem 5 centímetros, a outra tem 5 cm e a outra tem 6, assim, cm, por que duas partes têm que ser iguais, ou um ou dois números diferentes só, com 4 não dá. Com o 5 dá.*

Constatamos que esse tipo de concepção de triângulo também se fazia presente nos demais grupos. Isso nos intrigou. Após algumas conversas informais com alguns alunos, ficamos sabendo que eles conheciam uma régua que contém figuras para se desenhar — que eles denominavam de “régua geométrica”. Como essa régua existia na escola, pedimos para que a pegassem. Verificamos que nas figuras que representavam triângulos, a palavra triângulo sempre aparecia abreviada, apenas com a letra T. Não sabemos se essa definição de triângulo passou de um grupo para outro no momento da discussão ou se todos se lembraram da “régua geométrica”. Também não há como descartar que a figura do triângulo — tanto nas aulas de matemática quanto nos livros didáticos — é apresentada na forma estereotipada, sendo na maioria das vezes, o triângulo eqüilátero ou o escaleno.

Uma das características do trabalho investigativo é que a própria investigação pode ser redirecionada em relação à proposta inicial. Como dizem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 17): “para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original”. Pode-se considerar, pela discussão acima, que para esses alunos houve a “descoberta” do conceito de triângulo.

---

[4] A sigla PP indica o professor da turma; A1, A2, ... os alunos; e M, a pesquisadora Mirian. Como não éramos professoras da classe, não conseguimos associar as falas com os respectivos alunos. Assim, em cada diálogo a ser apresentado, sempre utilizaremos as siglas de acordo com o número de alunos que dele participam.

Ainda, segundo esses autores, "é mesmo impossível antever todas as explorações que podem surgir a partir de uma tarefa matemática verdadeiramente aberta e estimulante" (p.50). Por isso, há necessidade de o professor estar atento e mobilizado para raciocinar matematicamente, pois podem surgir questões nas quais ele não havia pensado anteriormente.

Apresentamos algumas conjecturas que os alunos levantaram a respeito das condições para a existência de um triângulo:

> *1. Os números forem consecutivos.*
> *2. Forem só pares ou só ímpares.*
> *3. Os três lados tiverem medidas iguais.*
> *4. São números pertos ou não forma porque são afastados.*
> *5. Os números têm que ser parecidos.*
> *6. Forem dois pares e um ímpar ou dois ímpares e um par.*

Três das conjecturas acima surgiram no fragmento a seguir, durante a exposição das conclusões dos grupos, no momento de socialização:

> **A1:** *4, 3 e 2 dão para formar o triângulo porque são números sucessivos, ficam um perto do outro. Os números 1, 1 e 1 forma o triângulo porque são números iguais, fica mais fácil de fazer. Os números 3, 4 e 5 eles formam o triângulo por que são números pertos, um do outro e os números 5, 2 e 1 eles não formam porque são afastados um do outro. O 1, 2 e 3 estão perto, professor. Mas não formam.*
>
> **A2:** *Não entendi essa lógica!!! São perto, mas não podem.*
>
> **M:** *Então vamos entender a lógica deles?*
>
> **A1:** *Eles são números sucessivos, perto um do outro, mas pelo tamanho dos pauzinhos, não dá para formar o triângulo, por que vai ficar um fora do outro.*
>
> **A2:** *Continuei não entendendo por que eles são próximos, mas não dá.*

Até esse momento, no qual já estava sendo realizada a exposição dos trabalhos, apenas alguns alunos tinham compreendido a condição de existência de um triângulo: a soma das medidas dos dois lados menores tem de ser maior que a medida do terceiro lado. Buscávamos refinar as conjecturas: *"São números pertos* *ou não forma porque são afastados"* — que se aproxima de *"Os números forem consecutivos"* — e "Os números têm que ser parecidos". A conjectura sobre os números consecutivos só não é válida para as medidas de uma, duas e três unidades — tal como destacado por A1. Questionamos os alunos sobre isso, o que gerou discussão entre aqueles que ainda não haviam chegado à condição de existência do triângulo.

Nesse fragmento pode-se destacar o quanto os alunos buscam justificar seus pontos de vista — o caso de A1 —, mesmo quando o vocabulário matemático ainda não é o mais adequado.

Ainda nesse diálogo entre A1 e A2, com a intervenção da pesquisadora M, são perceptíveis as conexões que esses alunos foram desenvolvendo entre os diferentes campos da matemática: a aritmética, a lógica e a geometria. Isso evidencia que uma tarefa mais aberta pode romper com a linearidade do currículo.

Outra discussão interessante ocorreu no momento em que gostaríamos que formalizassem a conclusão, ou seja, anunciassem a propriedade da desigualdade triangular. Os alunos utilizavam a palavra *"juntar"* no lugar de somar ou adicionar, e ao estimulá-los, desafiá-los — o que também é um dos papéis do professor num cenário para investigação —,os alunos chegaram à linguagem matemática, ou seja, deixaram de usar o termo *"juntar"* e passaram a dizer "a soma de...". Isso evidencia a importância dos processos de comunicação na aula de matemática, pois os próprios alunos sentem a necessidade de usar um vocabulário matemático correto, desde que incentivados pelo professor.

Uma conjectura dos alunos que chamou nossa atenção foi com relação às duas medidas iguais, ou seja, a formação de um triângulo isósceles (*"Os números têm que ser parecidos"*). Para eles, qualquer que fosse a outra medida, seria possível montar esse triângulo.

Num dos grupos da classe, ocorreu o seguinte diálogo:

> **A2:** *E também quando os números são os dois lados iguais, eles sempre vão dar para formar, por exemplo, vamos supor que a gente tire no dado, 6, dois 6 e um 1, vai dar para formar, dessa mesma forma, por exemplo, 6, 6 e 5; 6, 6 e 4, 6 e alguma coisa vai dar para formar [...].*
>
> **M:** *Agora a gente tem que descobrir por que que em alguns casos que tem número igual. Aqui tem dois casos. O 1,1 e 6, está repetindo o 1; em 2, 2 e 5, está repetindo o 2, só que não está formando triângulo*

A2: Por que o 1 e 1 é pequenininho e o 6 é muito grande.

M: A hora que a gente...

A1: Junta.

A2: Soma..

Analisando posteriormente esse registro, constatamos que o grupo sempre tinha considerado a medida de seis unidades como sendo a repetida. Realmente, considerando apenas as medidas que iam de 1 a 6 (1, 6 e 6; 2, 6 e 6; ...), essa conjectura está correta. Tal fato não nos chamou atenção no momento da socialização em sala de aula. Isso revela que, por mais preparado que o professor se encontre, os imprevistos sempre surgem e, muitas vezes, no momento acalorado da discussão, muitas idéias passam despercebidas. Mas, quando o professor tem a prática de refletir sobre suas experiências, ele toma consciência dessas lacunas e poderá retomar o raciocínio (ou "as idéias") com os alunos, num momento posterior.
A reflexão posterior sobre essa tarefa remeteu-nos à limitação do material didático. O material a ser usado numa determinada tarefa matemática precisa ter um isomorfismo com o conceito a ser trabalhado. Não há problemas, nesta tarefa, no fato de os palitos terem medidas correspondentes às unidades das faces do dado (1 a 6). No entanto, é preciso que o professor tenha clareza de que isso limita o levantamento de conjecturas para quando essas medidas forem maiores que seis unidades. Daí a necessidade de utilizar outros recursos, além do jogo.

Se, por um lado, o jogo com esse material é potencializador da percepção de regularidades para a enunciação da propriedade da desigualdade triangular, por outro, ele é um limitador por alguns motivos. Primeiramente, pelo próprio limite de seis unidades; segundo, por não possibilitar a exploração de números não inteiros; terceiro, pela própria imperfeição do material. Isso porque, dependendo da forma como os palitos são unidos, pode-se conjecturar que os segmentos de duas, três e cinco unidades formam um triângulo — na montagem, há a falsa percepção de que os palitos estão unidos. Uma forma de superar tais limitações seria lançando mão de outros recursos: desenho com compasso e régua ou utilização de software de geometria dinâmica e, numa série mais avançada, a própria demonstração de tal propriedade.

Na finalização dessa atividade, constatamos que a maioria dos grupos atingiu o objetivo: descobrir a condição de existência de um triângulo. No entanto, a quantidade de conjecturas e as diferentes representações utilizadas pelos alunos constituíram a riqueza do trabalho. Após algumas conjecturas serem deixadas de lado, por haver contra-exemplos, esses alunos parecem ter compreendido quando é possível construir um triângulo, dadas as três medidas de seus lados.

É importante destacar que esse trabalho reforçou nossa crença de que, antes de iniciar uma tarefa de investigação, é necessário que o aluno tenha algum conhecimento sobre o conteúdo a ser investigado. Nessa atividade da desigualdade triangular identificamos a ausência do conceito de triângulo pelos alunos, o que não era de nosso conhecimento — até mesmo o professor responsável da turma não tinha ainda esse diagnóstico —, pois partimos do pressuposto de que, por tratar-se de uma 6ª série, esse conceito já havia sido trabalhado nas séries anteriores.

Outra constatação quanto a essa tarefa refere-se ao papel da comunicação nesse cenário para investigação. Tal comunicação ocorre tanto durante o processo de realização da tarefa em si, nas discussões do grupo, quanto no momento final da socialização. Daí a importância deste momento, um dos mais importantes desse cenário.

> No final de uma investigação, o balanço do trabalho realizado constitui um momento importante de partilha de conhecimentos. Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações [...] A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.41)

Na realização desta atividade, acreditamos que os alunos começaram a perceber o sentido de uma investigação.

Algumas considerações

A pesquisa apresentada trouxe uma contribuição no sentido de ampliar as discussões sobre a caracterização e os conhecimentos matemáticos gerados em aulas investigativas — tanto para os alunos quanto para o professor.

Dentre os resultados que foi possível identificar, constatamos o envolvimento dos alunos nesse tipo de cenário, pois este, em decorrência da dinâmica de trabalho cooperativo que se estabelece, revela-se estimulante e altamente potencializador da comunicação de idéias matemáticas. Constatamos que os alunos — apesar da pouca idade (12-13 anos) — chegaram até a fase de argumentação, ou seja, uma pré-demonstração[5], em que entraram em desacordos, utilizaram seus conhecimentos e os testaram em casos particulares. Nesse sentido, a realização das tarefas pode ou não se tornar investigativa; para isso, ela depende, dentre outros fatores, dos sujeitos envolvidos. Para alguns, a tarefa da desigualdade triangular tornou-se investigativa; para outros, foi apenas exploratória.

Nos relatórios produzidos, foi possível perceber que o processo de escrita envolve um dos principais papéis do professor: o incentivo, a intervenção que aponta lacunas e a forma como deve ser essa escrita. Constatamos que os alunos se envolveram, evoluíram na argumentação matemática e na escrita[6]. Tais constatações corroboram os argumentos de Powell e Bairral (2006, p. 101) de que

> Os textos escritos em diferentes instrumentos e espaços comunicativos de um ambiente de aprendizagem, por suas singularidades, contribuem, diferentemente, no desenvolvimento da cognição matemática. O desenvolvimento de produções argumentativas deve ser um dos objetivos dos produtores e leitores da escrita.

Tais autores reforçam também o papel do professor nesse cenário: "o de incentivar o escritor, de buscar e de explicitar o entendimento de partes do texto e de instigar o autor com novos questionamentos." (Ibidem, p. 102).

Assim, para as professoras-pesquisadoras, este trabalho proporcionou reflexão sobre a própria prática. Constatamos que é possível explorar tarefas diferenciadas, embora sejam trabalhosas — desde a sua preparação até o momento de retorno dos relatórios aos alunos. Também foi possível constatar o papel do professor nesse tipo de trabalho: indagar, questionar, incentivar, dar valor às conjecturas levantadas, refletir e validar o conhecimento gerado, o que exige sair da "zona de conforto" e adentrar em uma "zona de risco"; mas, como dizem Penteado e Skovsmose (2008, p. 41), "riscos trazem possibilidades" e, portanto, não se deve evitar entrar nessa zona. É importante lembrar que: "Quando uma aula se torna experimental, coisas novas podem acontecer. O professor pode perder parte do controle sobre a situação, porém os alunos também podem se tornar capazes de ser

---

5 Estamo-nos apropriando da terminologia utilizada por Oliveira (2003, p. 257). Segundo ele, o processo de validação pelos alunos pode se situar em três etapas, ou seja, "A validação, pelos alunos, do conhecimento matemático que eles mesmos produzem deve ser um processo paulatino que principia pela apresentação e discussão de argumentos plausíveis (fase da pré-demonstração), seguindo-se a estruturação de provas mais elaboradas (fase da proto-demonstração), até as demonstrações propriamente ditas (pequenas organizações dedutivas locais)".

6 É importante destacar que trouxemos aqui apenas uma tarefa, quando a pesquisa como um todo envolveu o trabalho com três.

experimentais e de fazer descobertas" (PENTEADO; SKOVSMOSE, 2008, p.49).

Para o professor responsável pela turma — que nos abriu o espaço para a realização da pesquisa — também houve aprendizagem. Isso pode ser constatado pelo fato de que ele trabalhou essa mesma atividade no ano seguinte, e sua experiência gerou a produção de uma narrativa de aula (PENHA, 2008).

Esse cenário para investigação envolve conceitos instigantes e revela a importância do fazer matemático, que é fundamental para um ensino pautado em processos como: conjecturar, validar conjecturas, experimentar, buscar estratégias apropriadas para resolução das situações propostas, analisar contextos matemáticos, estabelecer relações, descrever procedimentos, etc. Enfim, criar esse cenário em sala de aula pode ser um caminho promissor para o ensino de matemática com significado para o aluno e para o professor. Instaura-se um verdadeiro ambiente para aprendizagem e cria-se a possibilidade de mobilização de diferentes saberes: além dos saberes matemáticos, os alunos passam a expor suas idéias e ouvir as dos colegas; argumentar; defender pontos de vista; analisar e validar conjecturas; apresentar contra-exemplos; e expressar-se adequadamente através da escrita. Enfim, este trabalho possibilitou o envolvimento num ambiente de aprendizagem cooperativa. A professora-pesquisadora mobilizou saberes como: preparar uma tarefa interessante, criar condições para que um ambiente se torne um cenário para investigação, prever possíveis conjecturas que os alunos produzirão, acompanhar o trabalho nos grupos, saber ouvir o que os alunos têm a dizer, valorizar as idéias que são apresentadas, instigar e questionar os alunos para a validação das conjecturas apresentadas, avaliar e dar retorno das produções escritas e, principalmente, ter uma postura reflexiva e investigativa perante todo o processo.

A pesquisa também evidenciou as dificuldades para inserir tais cenários em sala de aula, principalmente quando não faz parte da cultura escolar o aluno realizar tarefas mais autônomas e, em especial, trabalhar em grupo — que exige uma dinâmica diferenciada de aula. A não-vivência desse tipo de trabalho acarreta morosidade no processo, o que pode desanimar o professor — que poderá voltar à "zona de conforto" — ou deixar os alunos mais desmotivados.

Também ficou evidente nesta experiência que construir cenários para investigação demanda tempo e sua inclusão no currículo escolar requer que se pense sobre os modelos de currículo que ainda se fazem presentes na educação básica: estes, via de regra, são baseados na linearidade dos conteúdos. As investigações rompem com esse modelo. E, provavelmente, em decorrência disso é que os alunos acabam se mostrando tão envolvidos com esse tipo de trabalho. Pode-se dizer que professor e alunos passam a ser investigadores e produtores de conhecimento, rompendo com a concepção de que "Nem o professor nem o aluno, tradicionalmente, são vistos como investigadores, que criam ou produzem conhecimento original, novo, mas simplesmente como consumidores de conhecimento criado por investigadores profissionais." (OLIVEIRA, 2003, p. 254). Num cenário de investigação, os conteúdos possibilitam diferentes representações, revelando inter-relações entre os diferentes campos matemáticos. Há, ainda, a emergência de vários tipos de raciocínios: o abstrato, o algébrico, o gráfico, o aritmético e o lógico, além dos pensamentos indutivo, dedutivo, abdutivo e analógico.

Finalmente, podemos dizer que nessa nova cultura de aula — em que a sala de aula passa a ser vista como um espaço epistemológico de produção de saberes — o saber é visto como histórico, provisório, transitório e relativo.

Referências

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (APM). **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Tradução portuguesa dos Standards do National Council of Teachers Mathematics. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: 1998.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS Cármen Lucia Bracaglion. **A Geometria nas séries iniciais – Uma análise sobre a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: Edufscar, 2003.

OLIVEIRA, Isolina; SERRAZINA, Lurdes. A reflexão e o professor como investigador. In Refletir e investigar sobre a prática profissional. GTI: Grupo de Trabalho de Investigação. Portugal: Associação de Professores de Matemática (APM), 2002. p. 29-42.

OLIVEIRA, Paulo. **A investigação do professor, do matemático e do aluno**: uma discussão epistemológica. Tese de Mestrado — Universidade de Lisboa, Portugal, 2003. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/polieira/index.htm>. Acesso em: janeiro de 2006.

PENHA, Paulo C. Desigualdade triangular: de um simples jogo para um grande conceito. In NACARATO, A. M.; GOMES, A. A. M.; GRANDO, R.C. **Experiências com geometria na escola básica**: narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João, 2008. p.211-21.

PENTEADO, Miriam G; SKOVSMOSE, Ole. Riscos trazem possibilidades. In: SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2008. p. 41-50.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. Campinas, SP: Papirus, 2006.

SANTOS, Vinício M. Linguagem e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 117-125.

SKOVSMOSE, Ole. ***Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica***. Campinas, SP: Papirus, 2008.

Submetido em junho de 2009.
Aprovado em setembro de 2009.

Currículo por competências ou currículo crítico? Uma análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Marcio Antonio da Silva
UMESP/SP
marcioantonio2005@uol.com.br

Resumo
Neste artigo analisamos a atual proposta curricular da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo sob duas perspectivas teóricas: a construção de um currículo por competências, que pode ser concebido pela influência de duas tradições (francesa e americana) e a elaboração de um currículo crítico, segundo Skovsmose. Também apresentamos reflexões sobre a inserção da Matemática nestas orientações oficiais e concluímos haver algumas contradições manifestas neste documento, a começar pela própria concepção do conceito de competência e também o papel dúbio da Matemática neste cenário complexo, ora apresentando a tendência tecnicista, ora pautando-se pela possibilidade de reflexão crítica visando transformação social.

Palavras-chave: Educação Matemática; Currículo; Educação Matemática Crítica; Competências; Políticas Públicas.

Curriculum by competencies or critical curriculum? An analysis of the curricular proposed by the Sao Paulo State Board of Education

Abstract
In this article we analyze the curriculum currently proposed by the Sao Paulo State Board of Education from two theoretical perspectives: the construction of a curriculum by competencies, which can be conceived through the influence of two traditions (French and American), and the elaboration of a critical curriculum, according to Skovsmose. We also present some impressions about the insertion of Mathematics in these official guidelines and we believe there are some clear contradictions in this document, for one thing the very concept of competence and also the dubious nature of Mathematics in this complex context, either presenting a technically oriented trend, or guiding itself by the possibility of a critical reflection aiming at social change.

Keywords: Mathematics Education; Curriculum; Critical Mathematics Education; Competencies; Public Policies.

Dez parece um número emblemático e carregado de significados interessantes para a Educação oficial do Estado de São Paulo. Em 20 de agosto de 2007, o governo estadual anunciou um amplo plano educacional que previa 10 ações[1] para atingir 10 metas[2], até 2010. O leitor com boa memória, ao examinar as primeiras linhas deste artigo, deve ter lembrado de uma obra conhecida do sociólogo suíço Philippe Perrenoud, publicada no Brasil com o título "10 Novas Competências para Ensinar". Mas qual a relação entre esse programa oficial e a obra desse autor? Mostraremos que a semelhança vai muito além da mera coincidência da utilização do número que representa um simbolismo marcante por ser a base do nosso sistema de numeração.

Nossa análise também focalizará a perspectiva curricular da Matemática nesses documentos, enfatizando a terceira ação, dentre as dez propostas como meta governamental para serem atingidas até 2010, que é a que envolve o currículo e as expectativas de aprendizagem, abrangendo a publicação de novas orientações curriculares, algo que ocorreu em 2008.

O objetivo principal não é analisar as sugestões oficiais e concluir qual tipo de currículo foi proposto, até porque o próprio documento se posiciona como sendo por competências, mas repousa na investigação do que pretendemos para a Educação diante das proposituras de Skovsmose, dentro do que ele considera ser uma Educação Matemática Crítica. Pretendemos, mais do que isso, refletir se o documento não aponta contradições ao defender um currículo por competências, e, ao mesmo tempo, apontar indícios para o que seria uma intenção implícita de promover um currículo crítico. Poderíamos também pensar se não seria possível unir o "melhor dos dois mundos" em uma só orientação. Defendemos que não e argumentaremos que o currículo por competências e um currículo crítico não possuem interfaces, a não ser que estas sejam concebidas de maneira artificial, com grande limitação ou artificialidade na sua implementação efetiva.

---

[1] 1. Implantação do Projeto Ler e Escrever; 2. Reorganização da progressão continuada; 3. Currículo e expectativas de aprendizagem; 4. Recuperação da aprendizagem; 5. Diversificação curricular do Ensino Médio; 6. Educação de Jovens e Adultos; 7. Ensino Fundamental de 9 anos; 8. Sistemas de Avaliação; 9. Gestão dos resultados e política de incentivos; 10. Plano de obras e investimentos.

[2] 1. Todos os alunos de 8 anos plenamente alfabetizados; 2. Redução de 50% das taxas de reprovação da 8ª série; 3. Redução de 50% das taxas de reprovação do Ensino Médio; 4. Implantação de programas de recuperação de aprendizagem nas séries finais de todos os ciclos de aprendizagem (2ª, 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio); 5. Aumento de 10% nos índices de desempenho do Ensino Fundamental e Médio nas avaliações nacionais e estaduais; 6. Atendimento de 100% da demanda de jovens e adultos de Ensino Médio com currículo profissionalizante diversificado; 7. Implantação do Ensino Fundamental de nove anos, com prioridade à municipalização das séries iniciais (1ª a 4ª séries); 8. Programas de formação continuada e capacitação da equipe; 9. Descentralização e/ou municipalização do programa de alimentação escolar nos 30 municípios ainda centralizados; 10. Programa de obras e melhorias de infra-estrutura das escolas.

Currículo por competências

É inegável a forte influência exercida pelo conceito de competência nos documentos oficiais, não só do Estado de São Paulo, mas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nas Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental, nas Matrizes Curriculares de Referência para o Sistema de Avaliação da Educação Básica e nas Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores de Educação Básica, como revelam as pesquisas de Macedo (2002).

A autora aponta duas constatações que surgem a partir da leitura dos documentos citados anteriormente e, podemos adiantar, também aparecem na nova proposta curricular do Estado de São Paulo.

A primeira verificação diz respeito à confusão sobre o próprio conceito de competência. A pesquisadora cita que alguns documentos governamentais referentes ao Ensino Fundamental adotam um conceito de competência cognitivo-construtivista e apoia-se em Pestana *et al*. (1999) para tornar clara essa ideia: "entende-se por competências cognitivas as modalidades estruturais da inteligência – ações e operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos, fenômenos e pessoas que deseja conhecer" (p. 9).

Outro fato apontado na investigação de Macedo (Ibid.) sobre os documentos oficiais diz respeito ao incômodo decorrente da popularidade irreflexiva desse conceito amplamente difundido, consequentemente trazendo ao campo dos estudos curriculares uma quase necessidade de responder questões sobre como selecionar, organizar e avaliar. Mas como dar respostas adequadas se a apreciação de competência está ligada a fenômenos cognitivos? Aparentemente, optou-se por associar competências a habilidades e, por sua vez, a comportamentos observáveis. Por exemplo:

> Nas matrizes curriculares de referência para o SAEB, as competências engendram habilidades, sendo ambas taxionomizadas e associadas a comportamentos observáveis. Nas Diretrizes para Formação de Professores, as competências perdem seu caráter contextual e acabam assumindo, na organização curricular, papel semelhante aos objetivos comportamentais. Essa mescla de significados nos documentos oficiais é parte de seu próprio processo de elaboração, no qual se constituem hegemonias parciais e criam-se formas híbridas (MACEDO, 2002, p. 116).

Macedo (Ibid.) analisa essas duas perspectivas (cognitivo-construtivista e comportamental) como advindas de duas tradições pedagógicas sobre a noção de competências: a francesa e a americana.

A tradição francesa concebe competência como herdeira do conceito de *esquema*, segundo Piaget.

> Até próximo da década de 70, Piaget fala basicamente em esquema, que pode ser definido como uma sequência organizada de ações coordenadas e direcionadas, para ser executado em situações específicas. Uma definição que se aplica bastante quando se trata de esquemas sensório-motores, mas que, ao receber o adjetivo operatório, como também operatório formal, obviamente implica alguns outros elementos específicos que essa definição genérica acaba por não contemplar. Mas, mesmo com a precariedade dessa definição, pode-se dizer que um esquema é um conceito que se dá ao nível do inconsciente, e um conceito é um esquema que se tornou consciente (SISTO, 1996, p. 87).

O problema, segundo Macedo, é que, embora originadas do conceito de esquema de Piaget, alguns documentos oficiais tratam competências como descrições de padrões esperados pelos estudantes ou professores e que, portanto, seríamos capazes de observá-los e analisarmos se tais competências foram contempladas. Ocorre que, um esquema, como vimos na citação anterior, não se dá em nível consciente, sendo impossível relacioná-lo a um comportamento observável.

Já a tradição americana possui um caráter avaliativo intrínseco, de tal forma que as chamadas competências podem ser listadas e avaliadas como um rol de metas a serem alcançadas. Tal característica objetivista é eminentemente influenciada pelas concepções de Ralph Tyler, quem, em 1950, publicou a obra *Basic Principles of Curriculum Instruction*, que, segundo ele, era uma síntese das ideias precedentes sobre o currículo de Franklin Bobbitt, W. W. Charters, John Dewey, Boyd Bode, Harold Rugg e Henry Harap (DOLL JR., 1997, p. 68).

Tyler enunciou quatro questões que expressam e simbolizam sua estrutura caracterizada como linear, de causa-efeito, mostrando sua estrutura modernista.

> 1. Que objetivos educacionais deve a escola procurar atingir?
> 2. Que experiências educacionais podem ser oferecidas que tenham probabilidade de alcançar esses propósitos?
> 3. Como organizar eficientemente essas experiências educacionais?
> 4. Como podemos ter certeza de que esses objetivos estão sendo alcançados? (TYLER, 1979, p. 1).

Para Doll Jr., a ênfase da ideia de Tyler sobre Currículo está na escolha dos objetivos. "De fato, Tyler afirma que a seleção de objetivos não só é o primeiro ato que deve ser realizado no planejamento do currículo, como é também a chave de todo o processo" (DOLL JR., 1997, p. 69).

Currículo Crítico

A Educação Crítica pode estabelecer uma nova visão do processo de ensino-aprendizagem e das relações e papéis de professores e alunos nessa ação, possibilitando utilizar essa corrente de pensamento para buscar reflexões específicas quando o assunto é o currículo. Skovsmose (2001) propõe questões para a discussão do que seria um currículo crítico:

> (1) A aplicabilidade do assunto: quem o usa? Onde é usado? Que tipos de qualificação são desenvolvidos na Educação Matemática? (2) Os interesses por detrás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto? (3) Os pressupostos por detrás do assunto: que questões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na Matemática? Que contextos têm promovido e controlado o desenvolvimento? (4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderia ter o assunto? Essa questão não se remete primariamente às aplicações possíveis, mas à função implícita em uma Educação Matemática nas atitudes relacionadas a questões tecnológicas, nas atitudes dos estudantes em relação a suas próprias capacidades etc. (5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância? (p. 19).

Sobre a aplicabilidade do conteúdo, compreendemos a necessidade de saber "por quem" ou "onde" um assunto é usado, porém a questão-chave seria: "como ele é aplicado?" Tal pergunta pode-se pressupor, não em termos dos fins do assunto, mas na busca de compreender se tal aplicação justifica seu ensino, à medida que, atualmente, os currículos de Matemática no ensino brasileiro são praticamente os mesmos em todas as escolas, pois têm orientações governamentais centrais. Embora tais parâmetros não pretendam impor uma prática única, eles acabam determinando, ainda que indiretamente, os conteúdos que são ensinados tradicionalmente e, em boa parte das vezes, também sequencialmente.

Os "interesses por detrás do assunto" são enfatizados por Skovsmose, quando ele enuncia o que chama de tese do currículo: "Os princípios fundamentais da estruturação do currículo são derivados delas ou estão de acordo com as relações de poder dominantes na sociedade" (2001, p. 31). Para sustentar sua tese, Skovsmose cita Apple (1982), que, por sua vez, exemplifica a ideia com um fato ocorrido nos Estados Unidos, nas décadas de 1950 e 1960, o qual parece se repetir atualmente na opção de várias escolas privadas brasileiras por materiais didáticos pré-preparados, como os elaborados por cursos pré-vestibulares. Também se assemelha à atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio, cujo material trabalhado em sala de aula foi distribuído em todas as escolas da rede, inicialmente na forma de "jornais":

> A introdução original do material pré-preparado foi estimulada por uma rede específica de forças políticas, culturais e econômicas, originalmente nos anos 50 e 60 nos Estados Unidos. As visões de acadêmicos de que professores não tinham preparação adequada nas áreas curriculares mais importantes tornaram "necessária" a criação do que foi chamado material-à-prova-de-professor. O clima de guerra fria (criado e estimulado em grande parte pelo Estado) levou a um foco na produção eficiente de cientistas e técnicos, tanto quanto numa força de trabalho estável; isso, a "garantia" dessa produção por meio do currículo escolar, passou a ter importância cada vez maior (p. 150).

Neste ponto, cabe-nos refletir sobre a interferência centralizadora do Estado sobre as ações docentes e, principalmente, sobre o que os alunos devem aprender (em determinados casos, também como aprender, através do "manual do professor"). Achamos, portanto, que também seja necessária a discussão sobre até que ponto é importante manter o caráter centralizador e vertical sobre as decisões curriculares no país e nos Estados, e como é possível que uma decisão ou orientação seja difundida por milhares de escolas, em uma profusão de culturas, gostos, especificidades e necessidades. Embora não seja um objetivo deste artigo, esperamos encorajar novas pesquisas que tratem da questão.

Sobre os pressupostos e a compreensão dos problemas e necessidades que suscitaram o surgimento de determinados assuntos, compreendemos que seja necessário o estudo histórico analítico que leve em conta, entre outras coisas, o contexto social, político e econômico da criação e do desenvolvimento de determinado conceito matemático.

Neste último caso, não é possível olhar para a Matemática como um campo isolado, protegido por uma redoma blindada por sua suposta exatidão, ignorando os interesses em jogo. Portanto, é imprescindível compreender, por exemplo, a História da Matemática, não como uma cronologia de fatos e acontecimentos que justificam a evolução de conceitos específicos ou, pior ainda, como uma lista de feitos e “descobertas” realizadas por alguns seres iluminados pela benção divina, ignorando as incertezas, inseguranças e impossibilidades envolvidas, mas como uma possibilidade de “desmistificação da Matemática e o estímulo à não-alienação” (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 52).

Acreditamos que o tópico “as funções do assunto” desenvolve o que poderíamos chamar de uma reflexão ética sobre o uso da Matemática. Skovsmose (2007) não faz considerações explícitas quanto à ética, porém utiliza a expressão “má-fé”, que significaria não reconhecer que a Matemática é posta em ação, considerando-a como sendo de “mãos limpas” (p. 171). O autor cita o sofrimento vivenciado, porém não expresso, pelo matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947) com a má-fé evidenciada no seu platonismo de ignorar a relevância de seus estudos, em particular, e da Matemática, como um todo, nos campos tecnológicos, sociais, políticos e econômicos:

> Nunca fiz nada de “útil”. Nenhuma descoberta minha fez ou tem probabilidade de fazer, direta ou indiretamente, para o bem ou para o mal, a menor diferença para o conforto da vida neste mundo. Ajudei a formar outros matemáticos, mas matemáticos iguais a mim, e o trabalho deles, na medida em que eu os auxiliei, foi tão inútil quanto o meu. A julgar por todos os critérios práticos, o valor da minha vida na Matemática é nulo; e fora da Matemática é bem reduzido, de qualquer maneira. Tenho apenas uma chance de escapar a um veredito de nulidade completa, caso julguem que criei algo que vale a pena criar. Que criei algo é inegável; a questão é o valor da minha criação (HARDY, 2000, p. 140).

Parece que Hardy é um bom exemplo do que seria considerar a Matemática como sendo de “mãos limpas”, ou seja, a concepção dessa ciência como não determinante da ação (explicaremos melhor o que é Matemática em ação mais adiante).

> Se o conhecimento útil, tal como o definimos a título provisório, é aquele conhecimento que, agora ou num futuro relativamente próximo, tem boa probabilidade de contribuir para o conforto material da humanidade, deixando de lado a pura e simples satisfação intelectual, então a maior parte da Matemática superior é inútil. A geometria e a álgebra modernas, a teoria dos números, a teoria dos agregados e funções, a relatividade, a mecânica

> quântica – nenhuma delas resiste a essa prova, e não há nenhum matemático de verdade cuja vida possa ser justificada com base nesse fundamento. Se essa é a prova, Abel, Riemann e Poincaré desperdiçaram suas vidas; a contribuição que deram para o conforto humano foi ínfima, e o mundo seria um lugar igualmente feliz sem eles (HARDY, 2000, p. 126-127).

Ao contrário de Hardy, Skovsmose afirma que a Matemática está em todo lugar. Podemos nos referir a ela simplesmente como a Matemática pura, talvez analogamente ao que Hardy chamou de Matemática verdadeira, mas também podemos relacioná-la “à Matemática aplicada, à Matemática da Engenharia, às técnicas matemáticas imersas na cultura, à Matemática das ruas, aos cálculos de todo tipo” (2007, p. 113).

Skovsmose aborda três aspectos da Matemática em ação como sugestões para modos de ver as conexões entre a Matemática e o poder:

> (a) Por meio da Matemática é possível estabelecer um espaço de situações hipotéticas na forma de alternativas (tecnológicas) possíveis para uma situação presente. Entretanto, esse espaço pode ter sérias limitações. (b) Por meio da Matemática, na forma de raciocínio hipotético, é possível investigar detalhes particulares de uma situação hipotética, mas esse raciocínio também pode incluir limitações e, portanto, incertezas para justificar as escolhas tecnológicas. (c) Como parte da compreensão das tecnologias, a própria Matemática se torna parte da realidade e inseparável de outros aspectos da sociedade. O racional se torna real, ainda que nada indique que o real se torne racional (2007, p. 128).

Certamente concordamos com o parecer de Skovsmose sobre as relações fundamentais existentes entre a Matemática e o poder, de um lado, e a relação da tecnologia e seu uso no atual cenário mundial, de outro. Entretanto, parece existir uma contradição ou, nas palavras de Skovsmose, um “paradoxo da razão”, assim enunciado por D'Ambrosio (1994 *apud* SKOVSMOSE, 2007):

> Nos últimos cem anos, vimos enormes avanços no nosso conhecimento da natureza e no desenvolvimento de novas tecnologias. E, todavia, esse mesmo século nos mostrou um comportamento humano desprezível. Meios sem precedentes de destruição em massa, de insegurança, novas doenças terríveis, fome injustificável, abuso de droga, e decadência moral igualada somente pela destruição ambiental. Muitos desses paradoxos têm a ver com a ausência de reflexões e considerações dos valores acadêmicos,

> particularmente nas disciplinas científicas, tanto na pesquisa, como na educação. Muitos dos meios de alcançar essas maravilhas e também esses horrores da ciência e da tecnologia têm a ver com os avanços da matemática (p. 141)..

Sobre as limitações do assunto, compreendemos existir um ponto-chave para essa consideração, que é analisar e avaliar criticamente os conteúdos propostos atualmente e perguntar, como Skovsmose (2001): "em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância?" (p. 19). Defendemos que a justificativa do ensino de determinados tópicos da Matemática, apenas por sua aplicabilidade, produz diferentes significados para diferentes pessoas. Cada profissão, por exemplo, tem suas necessidades específicas, e parece-nos que essas necessidades são atendidas no Ensino Superior ou Técnico, voltado diretamente para formação específica para exercício do trabalho.

Sabemos que Skovsmose não se refere a esse tipo de relevância profissional, mas constatamos que algumas aplicações ingênuas são lançadas como possíveis justificativas para um currículo crítico, mesmo visando uma formação geral para a futura preparação ao trabalho.

As contribuições de Skovsmose estendem-se à discussão da consideração da experiência do próprio aluno no planejamento do currículo. Para tanto, enuncia duas teses que representam o antagonismo de posições existentes a respeito. De um lado, a tese da familiaridade estabelece uma transição "muito suave e contínua entre a linguagem ordinária e as estruturas conceituais da Matemática" (2001, p. 47). Em contrapartida, temos a tese da dicotomia:

> Linguagem ordinária e linguagem matemática constituem dois jogos completamente diferentes e independentes. Conceitos matemáticos são criados em um contexto especial, e o planejamento educacional é forçado a relacionar os dois jogos de linguagem um com o outro (Ibid., p. 74).

Para Skovsmose, o currículo de Matemática bem estruturado pode implicar uma obstrução para as atividades de aprendizagem, incorporando aspectos não-democráticos. Parece-nos que, a todo o momento, o autor busca argumentos para defender a implicação direta entre currículo estruturado, caracterizando-o como instruções governamentais ditadas verticalmente no sentido dos "elaboradores curriculares" para o aluno, e a consequente inexistência de democracia nesse processo.

Sobre a proposta curricular do Estado de São Paulo

A seguir, mencionaremos alguns extratos do documento oficial paulista, os quais caracterizam o poder influenciador do pensamento curricular por competências nessa propositura e, ao mesmo tempo, verificaremos indícios de contradições manifestas, segundo o pensamento de Skovsmose e o que seria um currículo crítico.

Curiosamente, no tópico "o currículo como espaço de cultura", onde suporíamos uma preocupação grande com as características particulares de cada escola, respeitando suas manifestações próprias, problematizando situações significativas para caracterizar uma efetiva transformação social na comunidade na qual essa escola está inserida, encontramos: "O conhecimento tomado como instrumento, mobilizado em competências, reforça o sentido cultural da aprendizagem" (SÃO PAULO, p. 13, 2008). A palavra "instrumento", para adjetivar o conhecimento, reforça a intenção tecnicista subjacente à ideologia dos elaboradores dessa proposta. O conhecimento, tomado como instrumento, não reforça o sentido cultural da aprendizagem, a não ser que seja a cultura dominadora do Estado sobre os subalternos (APPLE, 2008). Muito menos, mobilizado em forma de competências, porque, como já vimos, parece referir-se aos esquemas de Piaget, e, portanto, as competências, ou melhor, os esquemas, é que devem ser mobilizados para produzirem conhecimento significativo. Parece-nos que, neste caso, o conceito de competência está intimamente influenciado pela tradição francesa.

A seguir, mencionamos alguns trechos significativos que demonstram uma contradição caracterizada pela presença de um discurso crítico. No entanto, como verificaremos mais adiante, a proposta está recheada de concepções que enfatizam a pré-estruturação disciplinar e a presença e determinação, a *priori*, de uma lista de conteúdos a serem ministrados com vistas à contemplação de um rol de competências::

> Um currículo referido a competências supõe que se aceite o desafio de promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno. É com essas competências e habilidades que ele contará para fazer sua leitura crítica do mundo, para compreendê-lo e propor explicações, para defender suas ideias e compartilhar novas e melhores formas de ser, na complexidade em que hoje isso é requerido. É com elas que, em síntese, ele poderá enfrentar problemas e

> agir de modo coerente em favor das múltiplas possibilidades de solução ou gestão (SÃO PAULO, p. 13-14, 2008).

> Uma das razões para se optar por uma educação centrada em competências diz respeito à democratização da escola. No momento em que se conclui o processo de universalização do Ensino Fundamental e se incorpora toda a heterogeneidade que caracteriza o povo brasileiro, a escola, para ser democrática, tem de ser igualmente acessível a todos, diversa no tratamento de cada um e unitária nos resultados (SÃO PAULO, p. 15, 2008).

Torna-se evidente a tentativa de produzir um documento fundamentado pela Pedagogia Crítica, porém artificial e contraditório. Para que um estudante faça uma "leitura crítica do mundo" e possa "defender suas ideias", precisamos partir dos interesses próprios de cada comunidade, problematizando situações significativas, a exemplo de vários trabalhos e experiências executadas por pesquisadores etnomatemáticos[3]. A expressão "unitária nos resultados" poderia ser interpretada como algo por demais evasivo, se não fosse o intenso caráter avaliativo disseminado por diferentes instrumentos em várias esferas governamentais[4]. Independentemente do objetivo pelos quais tais instrumentos foram criados, todos eles apontam uma comparação, ignorando que cada escola revela uma cultura diferente e, portanto, incomparável. Objetivos estipulados para avaliar em grande escala demonstram ser o conceito de competência relativo à tradição americana e que eles estão dissociados da ideia crítica de currículo, como vimos anteriormente.

A ideia sedutora de argumentar que um currículo por competências relaciona-se à democratização da escola, como parece sugerir a citação anterior, remonta à própria ideia de Matemática enquanto força motriz do desenvolvimento científico – se quisermos utilizar uma metáfora apropriada para caracterizar o mecanicismo e tecnicismo intrínseco a esta ideia – e, consequentemente, do desenvolvimento social. Dewey caminhava neste mesmo sentido:

> Como seria escrever um livro intitulado Democracia e educação matemática, seguindo a trilha de Dewey? É fácil imaginar possibilidades. Como a matemática condensa a lógica do pensamento científico, ela naturalmente aceitaria carregar o estandarte do progresso. Existe uma estreita conexão

3 Ubiratan D'Ambrosio, Gelsa Knijnik, Arthur B. Powell, Marilyn Frankenstein, Maria do Carmo S. Domite, Alexandrina Monteiro, Pedro Paulo Scandiuzzi, para citar apenas alguns.

4 Podemos citar alguns destes instrumentos: Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil, Prova São Paulo, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e Provinha Brasil.

> entre a forma de argumentar na matemática e o discurso democrático, pois, em ambos, há um favorecimento do geral (no sentido de abstrato e de público) sobre o particular e específico. Essa poderia ser a mensagem do livro (SKOVSMOSE, 2008, p. 76).

Ocorre que um dos pilares da Educação Matemática Crítica reside no fato de que a evolução científica e o desenvolvimento social não possuem conexões automáticas entre si. O desenvolvimento científico pode ser usado para diferentes fins e não meramente para ser uma coleção ordenada de axiomas que não visam aplicabilidade, como acreditava Hardy. Aliás, é interessante e ao mesmo tempo trágico lembrar que Hardy terminou a escrita de sua obra "*A Mathematician's Apology*" em 1940 e, cinco anos mais tarde, em 6 de agosto de 1945, em plena Segunda Guerra Mundial, Hardy pôde ver o poder de destruição da má aplicação da Matemática quando a primeira bomba atômica destruiu a cidade japonesa de Hiroshima. Três dias depois, o fato repetiu-se, desta vez em Nagasaki.

A passagem a seguir mostra, além da dicotomia explícita entre o tecnicismo e a criticidade, a característica presente nesse documento de relacionar a aprendizagem de técnicas e métodos com fins para a promoção do desenvolvimento social:

> Durante mais de doze anos deverá haver tempo suficiente para alfabetizar-se nas ciências, nas humanidades e nas técnicas, entendendo seus enfoques e métodos mais importantes, seus pontos fortes e fracos, suas polêmicas, seus conceitos e, sobretudo, o modo como suas descobertas influenciam a vida das pessoas e o desenvolvimento social e econômico (SÃO PAULO, p. 21, 2008).

A proposta também menciona a importância dada ao trabalho, enfatizando novamente um suposto caráter crítico ao analisar diferenças sociais de acesso e remuneração:

> Do ponto de vista filosófico, expressa o valor e a importância do trabalho. À parte de qualquer implicação pedagógica relativa a currículos e definição de conteúdos, o valor do trabalho incide em toda a vida escolar: desde a valorização dos trabalhadores da escola e da família, até o respeito aos trabalhadores da comunidade, o conhecimento do trabalho como produtor da riqueza e o reconhecimento de que um dos fundamentos da desigualdade social é a remuneração injusta do trabalho. A valorização do trabalho é

> também uma crítica ao bacharelismo ilustrado, que por muito tempo predominou nas escolas voltadas para as classes sociais privilegiadas (SÃO PAULO, p. 23, 2008).

Aqui manifestamos nossa inaptidão para compreender o significado preciso de "bacharelismo ilustrado". Talvez possamos interpretar a expressão como sendo as prescrições listadas na forma de conteúdos pré-definidos e, portanto, ignorantes dos interesses culturais, sociais, econômicos e políticos específicos de cada comunidade, presos em grades que determinam bimestres e séries onde cada assunto deve ser apresentado. Seria isto? Se a resposta for afirmativa, tememos haver uma contradição descomunal, pois, no que diz respeito à parte do documento que trata especificamente da Matemática, encontramos:

> Na abordagem dos conteúdos que será sugerida para a grade, serão privilegiadas algumas ideias fundamentais, de natureza transdisciplinar, que servirão de mediadores na mobilização dos temas para o desenvolvimento das competências pessoais dos alunos, bem como para a construção dos significados dos conteúdos estudados. Essas ideias serão especialmente importantes na escolha de um grande tema por bimestre, o qual permitirá articular parte ou a totalidade dos conteúdos nesse período (SÃO PAULO, 2008, p. 49).

Alguns criticam a mudança que provocaria a concepção crítica da Educação Matemática na prática dos professores, pois provocaria uma enorme incerteza de como mediar interesses diversos, conteúdos, disciplinas etc. Mas o documento aponta uma dificuldade ainda maior: escolher o "tema bimestral" que coincida com os interesses específicos dos alunos e ainda dê conta de contemplar os conteúdos, respeitando o bimestre em que cada um será abordado, o qual vem mencionado em oito páginas detalhadamente especificadas no final do documento (p. 52-59).

Sobre as razões da existência da Matemática enquanto área específica do currículo, os autores referem-se novamente ao mérito das competências. Resumimos os motivos que levaram os autores a essa escolha em três justificativas: "Em primeiro lugar, destaca-se o fato de que uma parte da especificidade da Matemática resulta esmaecida quando ela é agregada seja ao grupo das linguagens em sentido amplo, seja ao grupo das ciências" (p. 38).

Em um cenário crítico pensamos ocorrer exatamente o contrário, pois, reunida em um conjunto de esforços para resolver problemas específicos da realidade de uma comunidade, a Matemática ganha força enquanto Ciência, pois toma posição em prol do verdadeiro progresso social.

> Em segundo lugar, a incorporação da Matemática à área de Ciências pode distorcer o fato de que a Matemática, mesmo oferecendo uma linguagem especialmente importante e adequada para a expressão científica, constitui um conhecimento específico (SÃO PAULO, p. 38, 2008).
> ... a partir da consolidação da ideia de competências, apresentada pelo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), tal risco [de que o conteúdo matemático fosse concebido como um fim em si mesmo] deixou de existir e explicita-se com nitidez o que já era apresentado tacitamente em propostas anteriores: todos os conteúdos disciplinares, nas diversas áreas, são meios para a formação dos alunos como cidadãos e como pessoas. As disciplinas são imprescindíveis e fundamentais, mas o foco permanente da ação educacional deve situar-se no desenvolvimento das competências pessoais dos alunos. (SÃO PAULO, p. 39, 2008).

Esse segundo argumento parece chocar-se fortemente com as competências[5] propostas no próprio documento, apresentadas também como norteadoras para a formulação das questões do ENEM, pois estas representam capacidades de ação frente a problemas específicos e, portanto, fogem da alçada de uma disciplina peculiar. A justificativa da presença da Matemática no currículo pode ser feita de maneira mais simples e coerente com as propostas apresentadas, através da acepção de disciplina enquanto tecnologia de organização curricular que desempenha seu papel de manutenção e controle (MACEDO, 2002, p. 123).

> Em terceiro lugar, o tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento. De fato, caso se pretendesse caracterizar um novo *Trivium* (grupo de disciplinas constituído por Lógica, Gramática e Retórica), mais consentâneo com as características da sociedade contemporânea, certamente pareceria mais justo incluir a Língua, a Matemática e a Informática (SÃO PAULO, p. 39, 2008)

[5] A Competência I à capacidade de expressão em diferentes linguagens, incluídas a língua materna, a Matemática, as artes, entre outras; a Competência II à capacidade de compreensão de fenômenos, que incluem desde a leitura de um texto até a "leitura" do mundo; a Competência III à capacidade de contextualizar, de enfrentar situações-problema, ficando implícita a valorização da imaginação, da necessária abstração quando se criam novos contextos; a Competência IV à capacidade de argumentar de modo consistente, de desenvolver o pensamento crítico; e a Competência V à capacidade de decidir, após as análises argumentativas, e elaborar propostas de intervenção solidária na realidade (p. 43-44).

Diríamos que o "paradoxo da razão" de D'Ambrosio ilustra nossas preocupações ao ver essa justificativa que não contempla a criticidade necessária das próprias consequências irrefletidas dos avanços tecnológicos e da própria Matemática em uma sociedade cada vez mais desigual. Perdoe-nos a ironia, mas que tal acrescentarmos "Ética" como uma nova "disciplina", transformando o *Trivium*, mencionado no documento oficial, em *Quadrivium*?

Conclusões

Este artigo não busca criar juízo de valor sobre uma proposta pronta, publicada e que já inicia o processo de implementação. Entendemos que seria muita ingenuidade propor alterações sobre o que já está posto. O propósito fundamental é dialogar com a comunidade de educadores matemáticos e, sobretudo, com a sociedade, sobre qual currículo pretendemos para o futuro. As ideias alicerçadas na construção de um currículo por competências parecem caminhar para uma manutenção da realidade com a qual convivemos diariamente, com o afastamento cada vez maior da escola à realidade social.

No entanto, procuramos mostrar que mesmo essas convicções oficiais remontam a algumas contradições fundamentais nas próprias teorias que deveriam inspirá-las. Entre elas, citamos:

- O hibridismo existente no próprio conceito de competências, pois ora se utiliza o aspecto cognitivo-construtivista da tradição francesa, ora se faz uso da configuração comportamental, advinda da tradição americana.
- O uso de expressões que sugerem objetivos da Pedagogia Crítica, embora a voz do aluno e da comunidade na qual a escola está inserida não seja ouvida, pois os conteúdos são pré-definidos, inclusive estipulando os bimestres e séries nos quais devam ser ensinados. Parece-nos também haver interesses conflitantes, e esperamos ter mostrado isso, por meio de uma posição intermediária entre as posições de um currículo crítico e um de um currículo centrado em competências.
- A própria argumentação da Matemática como área específica conduz a uma contradição sobre as competências a serem alcançadas, pois são amplas demais para constituírem objetivos disciplinares, sendo meramente uma forma de atender demandas que, se por um lado satisfazem boa parte dos educadores envolvidos (pois os remove da zona de risco trazendo-os para a aprazível zona de conforto[6]), por outro não provocam transformações, objetivo eminente da Educação Matemática Crítica.

[6] Para detalhes sobre a noção de zona de risco e zona de conforto, ver PENTEADO e SKOVSMOSE (2008).

Ao nosso ver, estas contradições manifestas nas orientações curriculares podem gerar grande confusão entre os educadores que se propuserem a segui-las, pois, ao mesmo tempo, são encorajados a criarem alternativas para a promoção da cidadania em seus alunos e, por outro lado, são obrigados a seguirem as tradicionais listas de conteúdos e a velha preocupação em cumpri-las integralmente.

Entretanto, nossa grande preocupação vai além de um problema de orientação aos professores de Matemática que atuam nas salas de aula, pois parece que os avanços nas pesquisas em Educação Matemática estão subordinados às políticas públicas, ou seja, ainda que pesquisadores proponham uma reflexão mais profunda sobre o uso da Matemática no ensino e suas consequências políticas, econômicas, sociais etc., como o Estado propõe uma estrutura padronizada de ensino, estes pensamentos, que gerariam uma maior independência das escolas e do trabalho docente, acabam se esvaindo e tornando-se teorias inaplicáveis.

Aliás, a padronização dos currículos através de listas sequenciais a serem cumpridas, parece representar uma clara intenção do Estado em promover o controle do que se está ensinando para avaliar alunos e professores e verificar se as metas estabelecidas foram cumpridas, evidenciando a "meritocracia" existente nas atuais administrações neoliberais. A preocupação dos dirigentes de escolas e professores não se dirige à comunidade, através da construção de propostas diferenciadas para a transformação da sociedade, mas à preparação para as "provas" oficiais, pois o bom desempenho dos alunos se traduz em maiores investimentos nas escolas e gratificações salariais aos educadores.

Em pleno século XXI, não cabe adotar posturas curriculares firmadas em pensamentos enunciados há tanto tempo e já tão desvalorizados, como a elaboração de enormes grades curriculares para cumprir objetivos uniformizadores, por meio de avaliações que despendem recursos descomunais a favor da preservação de interesses específicos e, principal e mais especificamente, dos interesses dos poucos que desses interesses usufruem.

Referências

APPLE, M. W. **Education and power**. Londres: Routledge and Kegan Paul, 1982.

__________________________Currículo, poder e lutas: com a palavra, os subalternos. Porto Alegre: Artmed, 2008.

DOLL JR., W. E. **Currículo: uma perspectiva pós-moderna**. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

HARDY, G. H. **Em defesa de um matemático**. Trad. Luís Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

MACEDO, E. Currículo e competência. In: LOPES, A. C.; MACEDO, E. (Orgs.). **Disciplinas e integração curricular: história e políticas**. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

PENTEADO, M. G.; SKOVSMOSE, O. Riscos trazem possibilidades. In: SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Trad. Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

PESTANA, M. I. G. et al. **Matrizes curriculares de referência para o SAEB**. Brasília: Inep, 1999.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática / Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

SISTO, F. F. A construção do espaço cognitivo em Jean Piaget. In: MIGUEL, A.; ZAMBONI, E. **Representações do Espaço: multidisciplinaridade na educação**. Campinas: Editora Autores Associados, 1996.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: A questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

____________________**Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Trad. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

________________________**Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Trad. Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

TYLER, R. W. **Princípios básicos de currículo e ensino**. Trad. Leonel Vallandro. 6. ed. Porto Alegre: Globo, 1979.

Submetido em julho de 2008.
Aprovado em novembro de 2008.

Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas[1]

Norma S. G. Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul - São Paulo/Brasil
normallev@uol.com.br

Lourdes R. Onuchic
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho – UNESP/Rio Claro/Brasil
lonnuchic@vivax.com.br

Resumo
Neste trabalho, pretende-se apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. É feita uma breve contextualização histórica chegando às atuais orientações do *National Council of Teachers of Mathematics* (EUA), a partir das quais se pode caracterizar o ensino através da Resolução de Problemas. Considerada como uma metodologia de ensino, são apresentados seus fundamentos e as linhas gerais para implementação em sala de aula. Esta metodologia tem sido sistematicamente utilizada e pesquisada pelo GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, UNESP, Rio Claro/SP, em todos os níveis de ensino e na formação de professores. As pesquisas desenvolvidas têm o objetivo central de refletir sobre e analisar as possibilidades que tal metodologia oferece no sentido de incrementar a aprendizagem, melhorar os processos de ensino e promover o aprimoramento das práticas dos professores de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Metodologia de Ensino, Formação de Professores, Resolução de Problemas.

Teaching mathematics in the classroom through problem solving

Abstract
This paper presents an approach for teaching-learning-evaluating mathematics through problem solving. The historical context is briefly described leading up to the current guidelines of the *National Council of Teachers of Mathematics* (USA), on which we base a characterization of teaching through problem solving. Considered as a teaching method, its foundations and general guidelines for implementation in the classroom are presented. This method has been used and studied systematically, at all educational levels and in teacher's education, by GTERP – Problem Solving Work and Study Group, based at UNESP, Rio Claro/SP. The researches developed have the main objective of reflecting on and analyzing the possibilities this method offers for increasing learning, improving teaching processes and promoting improvement of the practices of mathematics teachers.

Keywords: Mathematics Education, Teaching Method, Teacher's Education, Problem Solving.

[1] Parte do conteúdo deste artigo foi apresentado no ICME11-11o Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em julho de 2008, em Monterrey, México. A versão original, em inglês, encontra-se disponível no site http://tsg.icme11.org/document/get/453

Introdução

Problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo da matemática escolar desde a Antiguidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa e grega. Nessa época eles eram trabalhados de modo que alguém criava um problema, o resolvia, apresentava sua solução e depois oferecia uma lista de problemas do mesmo tipo para serem resolvidos da mesma forma. Problemas, em livros-texto de Matemática dos séculos XIX, XX e até nos dias de hoje, podem ser encontrados, trabalhados com a mesma ênfase. Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), o principal ponto a ser considerado é que, nos exemplos apresentados nesses livros, é assumida uma visão muito limitada da aprendizagem de resolução de problemas. O papel da resolução de problemas no currículo da matemática escolar é resultado de forças conflitantes, ligadas a idéias antigas e duradouras sobre os benefícios do estudo da Matemática, e a uma variedade de eventos que aconteceram no início do século XX.

O objetivo deste artigo é o de apresentar a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, aqui designada por Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através[2] da Resolução de Problemas. Ensinar Matemática através da resolução de problemas, apesar de resolução de problemas ter uma longa história na matemática escolar, é um conceito bastante novo em Educação Matemática. Consequentemente, essa metodologia não tem sido objeto de muitas pesquisas, embora se tenha notícia de pesquisas atuais estarem avançando nessa área.

A resolução de problemas e as pesquisas no século XX

Na definição apresentada por Leder (1998) para "pesquisa educacional", estão expressos os vários aspectos que, entre outros, ela pode tratar: dos propósitos da educação, dos processos de ensino e de aprendizagem, do desenvolvimento profissional, dos recursos organizacionais, das políticas e das estratégias. O volume de trabalhos nas prateleiras das bibliotecas indica que ela se tornou um empreendimento imenso, e que a busca por novo conhecimento não somente continua, mas tem sido amplamente documentada. Ocorreu um crescimento substancial, em anos recentes, no volume, no escopo e na diversidade da pesquisa

[2] A palavra "através", utilizada por nós, significa "no decorrer de" (HOUAISS; VILLAR, 2009). Refere-se à tradução do inglês "through": completamente, totalmente, do princípio ao fim (MICHAELIS, 2009). Assim, nos referimos ao ensino-aprendizagem-avaliação realizado "ao longo de toda a resolução" do problema.

educacional em geral e na pesquisa da Educação Matemática em particular.

Tendo início, como campo de estudos sistemáticos com Felix Klein, no início do século XX, a Educação Matemática tornou-se, ao final dele, um vasto e intricado empreendimento. Felix Klein foi um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX e um dos últimos, junto com Gauss, Riemann e Poincaré, a conseguir quebrar a barreira da especialização e fornecer os elementos fundamentais que impulsionariam a matemática do século XIX e início do século XX. Escreveu, então, seu livro *Matemática Elementar sob um Ponto Vista Avançado*[3] (KLEIN, 1945)[4].

Klein acreditava que a unidade de todo o conhecimento e o ideal de uma educação completa não poderia ser negligenciada por causa dos estudos especializados e que as universidades deveriam se preocupar com o ensino preparatório nas escolas, dando particular ênfase na educação dos professores. Ele foi, portanto, um matemático brilhante que também tinha sinceras e sérias preocupações com as questões relacionadas ao ensino.

Nessa época, o ensino de matemática era caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado importante. Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, deviam entender o que faziam.

Começou-se, então, a falar em resolver problemas. George Polya (1944), surge como uma referência enfatizando a importância da descoberta e de levar o aluno a pensar por meio da resolução de problemas. Em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*[5], afirma: “Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema” (POLYA, 1944, p.v). Em 1949 ele escreveu que resolver problemas é realização específica da inteligência e que, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Em 1948, o trabalho desenvolvido por Herbert F. Spitzer (SPITZER, 1948) em aritmética básica, nos Estados Unidos, se apoiava na aprendizagem com compreensão, sempre a partir de situações-problema e, em 1964, no Brasil o professor Luis Alberto S. Brasil (BRASIL, 1964) defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos.

Nas décadas de sessenta e setenta, o ensino de matemática, no Brasil e em outros países do mundo, foi influenciado por um movimento de renovação

---

[3] Tradução de *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*.
[4] A obra original foi escrita em alemão, no ano de 1908.
[5] O título original, em ingles, é *How to Solve it*.

conhecido como Matemática Moderna. Essa reforma que, como as outras, não contou com a participação de professores de sala de aula, deixava de lado as anteriores. Apresentava uma matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Nessa reforma o ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas.

Segundo Onuchic e Allevato (2005), todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado. Os questionamentos continuavam: Estariam essas reformas voltadas para a formação de um cidadão útil à sociedade em que vivia? Buscavam elas ensinar matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático? Além disso, especialmente os anos setenta, marcaram uma era de crescimento preocupada com um currículo de matemática projetado, inicialmente, para um aumento no escore de testes de habilidades básicas, também chamados testes de habilidades computacionais.

Concomitante a isso, no início da década de setenta, tiveram início investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares. A importância dada à resolução de problemas é, portanto, recente e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação Matemática em termos de resolução de problemas reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam enfatizando a memorização de um conjunto de fatos, o domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. No fim dos anos setenta, a resolução de problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro. Em 1976, no *3o Congresso Internacional de Educação Matemática*[6], em Karlsruhe, Alemanha, a Resolução de Problemas se constituiu num dos temas de trabalho para o congresso.

Discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que podem levar a melhores formas de se ensinar e aprender matemática.

Nos Estados Unidos, o NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics* respondeu àquela preocupação com uma série de recomendações para

[6] Tradução de *3rd International Congress on Mathematical Education*.

o progresso da matemática escolar nos anos oitenta, no documento *Uma Agenda para a Ação*[7] (NCTM, 1980). Para colaborar neste trabalho, foram chamados todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo massivo, buscar uma melhor educação matemática para todos. A primeira recomendação desse documento foi "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar nos anos 80"[8] (p. 1). Nesse mesmo ano, a fim de enfatizar a necessidade de fortalecer o trabalho com resolução de problemas no ensino de Matemática, o NCTM lança um Livro do Ano intitulado *Resolução de Problemas na Matemática Escolar*[9] (KRULIK; REYS, 1980), com uma vasta gama de artigos escritos por pesquisadores e educadores renomados que se dedicavam e desenvolviam estudos voltados à Resolução de Problemas.

Durante a década de oitenta, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho de sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material passou a ajudar os professores a fazer da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

Entretanto, possivelmente devido à falta de concordância entre as diferentes concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de resolução de problemas "ser o foco da matemática escolar", o trabalho dessa década não chegou a um bom termo (ONUCHIC, 1999). Schroeder e Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar resolução de problemas que ajudam a refletir sobre essas diferenças: teorizar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas; e ensinar matemática através da resolução de problemas. O professor que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de Polya ou alguma variação dele. Ao ensinar para resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o quê dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Nessa visão, a proposta essencial para aprender matemática era a de ser capaz de usá-la. Acabando a década de 1980 com todas essas recomendações de ação, os pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos, e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Ela passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática.

A Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, se torna o

7 Tradução de *An Agenda for Action*
8 Tradução de "*problem solving be the focus of school mathematics in the 1980s*".
9 Tradução de Problem Solving in School Mathematics

lema das pesquisas e estudos em Resolução de Problemas para os anos 1990. Esta nova visão de ensino-aprendizagem de Matemática se apóia, especialmente, nos estudos desenvolvidos pelo NCTM, que culminaram com a publicação dos *Standards 2000*, oficialmente *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar*[10] (NCTM, 2000). A Resolução de Problemas é destacada como um dos padrões de processo para o ensino de Matemática, e o ensino através da resolução de problemas é fortemente recomendado. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005)

No Brasil, alguns trabalhos na linha de resolução de problemas, produzidos por estudiosos brasileiros e estrangeiros, têm sido usados como referência em experiências e práticas de formação de professores, e em novas pesquisas voltadas a todos os níveis de ensino, entre os quais podemos apontar os de BRITO (2006), POZO (1998), SMOLE E DINIZ (2001), VALE (2004), entre outros. Apoiados em idéias dos Standards do NCTM, foram criados os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 1999), que apontam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles, como um dos propósitos do ensino de Matemática; indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula.

Agora, no começo do século XXI, alguns dos maiores desafios que educadores matemáticos enfrentavam nas décadas passadas têm ainda persistido, mudado ou proliferado, enquanto o ensino e a sociedade estão se tornando mais complexas. Em *Trabalho Inacabado: Desafios para os Educadores Matemáticos nas Próximas Décadas*[11], Kilpatrick e Silver (2000) destacam os que consideram como os principais desafios: assegurar matemática para todos; promover a compreensão dos estudantes; manter equilíbrio no currículo; fazer da avaliação uma oportunidade de aprender; e desenvolver a prática profissional.

Cai (2003) ressalta, entretanto, que embora ainda se saiba pouco sobre como os alunos dão sentido e aprendem matemática através da resolução de problemas, muitas idéias associadas com esta abordagem – mudança no papel do professor, seleção e elaboração de problemas, aprendizagem colaborativa, entre outras – tem sido intensamente pesquisadas, oferecendo respostas a várias questões freqüentemente levantadas sobre o essa forma de ensino.

---

10 Tradução de *Principles and Standards for School Mathematics*.
11 Tradução de *Unfinished Business: Challenges for Mathematics Educators in the Next Decades*.

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas

A opção de utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário.

Segundo Van de Walle (2001), professores de matemática verdadeiramente eficientes, devem envolver, em seu trabalho, quatro componentes básicos: (1) a valorização da disciplina Matemática em si mesma – o que significa “fazer matemática”; (2) a compreensão de como os estudantes aprendem e constroem idéias; (3) a habilidade em planejar e selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam matemática num ambiente de resolução de problemas; (4) a habilidade em integrar a avaliação ao processo para aumentar a aprendizagem e aprimorar, no dia-a-dia, o ensino.

O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é diferente daquele em que regras de “como fazer” são privilegiadas. Ele “reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental”(ONUCHIC, 1999, p. 203).

Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula (ALLEVATO, ONUCHIC, 2007; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005). Esta metodologia assemelha-se à abordagem japonesa do ensino de Matemática através da resolução de problemas. No trabalho de Yoshinori Shimizu (2003), *Resolução de Problemas como um Veículo para o Ensino da Matemática: Perspectiva Japonesa*[12], podemos ler que “Professores japoneses, nas escolas elementares, freqüentemente organizam integralmente suas aulas de matemática em torno de múltiplas soluções para um único problema como um meio de ensinar toda a sala. Essa organização é particularmente útil na

---

[12] Tradução de *Problem Solving as a Vehicle for Teaching Mathematics: a Japanese Perspective*.

introdução de um novo conceito ou novo procedimento na fase inicial de uma unidade de ensino"[13].(p. 206)

Para Van de Walle (2001), um problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Acrescentando um caráter subjetivo a esta questão, no contexto da metodologia aqui apresentada, consideramos que problema refere-se a tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer.

Não há formas rígidas para colocar em prática essa metodologia (SHIMIZU, 2003; KRULIK; RUDNICK, 2005; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005; VAN DE WALLE; LOVIN, 2006). Uma nossa proposta atual consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da "matemática nova" que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

13 Tradução de *Japanese teachers in elementary schools often organize an entire mathematics lesson around multiple solutions to a single problem in a whole-class instructional mode. This organization is particularly useful when introducing a new concept or a new procedure during the initial fase of a teaching unit.*

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de idéias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldade, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto

Reitere-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema.

Para Van de Walle (2001), a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino, e ele chama a atenção para que o trabalho de ensinar comece sempre onde estão os alunos, ao contrário de outras formas em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando-se o que os alunos trazem consigo para a sala de aula. Diz o autor, ainda, que o valor de se ensinar com problemas é muito grande e, apesar de ser difícil, há boas razões para se empreender esse esforço.

Sem dúvida, ensinar matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM (NCTM, 2000) e dos PCN (BRASIL, 1997, 1998, 1999), pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução dos problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior será promovido através dessas experiências e o trabalho de ensino de matemática acontecerá num ambiente de investigação orientada em resolução de problemas.

Em sintonia com as orientações de Krulik e Rudnick (2005), e sempre objetivando realizar avaliação continuamente, após a etapa de formalização, novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos, a fim de analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula. Em nossa visão, a compreensão de matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Ressalte-se que as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema.

Ao invés de colocar-se como foco do ensino de matemática, ao ser considerada como metodologia de ensino, a resolução de problemas faz da compreensão seu foco central e seu objetivo. Com isso não se tira a ênfase dada à resolução de problemas, mas amplia-se seu papel no currículo. Ela passa de uma atividade limitada a engajar os alunos na aplicação de conhecimento, depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual o aluno pode aplicar o que previamente havia construído (ONUCHIC, 1999).

A Matemática sempre desempenhou um papel importante na sociedade. Esse papel é hoje mais significativo e, possivelmente, será ainda mais no futuro. As pessoas nem sempre pensam matematicamente e tampouco percebem que, se o fizessem, poderiam tomar melhores decisões. A falta dessa percepção pode ser uma falha tanto da matemática que ensinamos quanto do modo como a ensinamos. Frequentemente, o ensino de Matemática forma estudantes com concepções demasiadamente simplistas e estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas. Para Hiebert e Behr(1989), em lugar de se colocar o conhecimento como um pacote pronto e acabado, o ensino deveria encorajar os alunos a construírem seu próprio conhecimento.

Uma aplicação da metodologia

O livro *Matemática com Problemas Dirigidos – Aplicação da Matemática além das Soluções*[14], de Krulik e Rudnick (2005), apresenta problemas e orientações ao professor para sua aplicação em sala de aula. Esses autores ressaltam que resolução de problemas e raciocínio deve ser o foco principal do currículo de matemática. Mas que os professores, além disso, devem também trabalhar algoritmos, habilidades e conceitos matemáticos básicos.

Entre as recomendações deixadas para o professor, os autores destacam aspectos importantes a serem considerados naquela aula. Que conceitos matemáticos pretendem-se construir a partir do problema proposto? Qual é o foco relativo aos tópicos matemáticos próprios desse problema? Há outros tópicos relacionados a esse foco, ou seja, conteúdos matemáticos adicionais que possam ser trazidos para a aula como novo conhecimento? Que estratégias de resolução podem ser utilizadas para obter a solução do problema dado?

Durante a resolução do problema há sempre oportunidade de se avaliar a compreensão dos alunos e saber se eles se apossaram dos conceitos importantes envolvidos no problema e, por meio de questionamentos levantados, o professor pode perceber seu crescimento matemático

No sentido de estender o problema, visando a trabalhar tópicos relacionados ao foco considerado, uma nova condição, uma variação do problema original, uma aplicação da matemática apresentada, alguma coisa nova na forma de um cálculo ou conclusão mais sofisticada, ou alguns conceitos ou habilidades

[14] Tradução de *Problem-Driven Math – Applying the Mathematics Beyond Solutions*.

matemáticas que não faziam parte do problema original, podem ser inseridos na proposição de um novo problema a fim de desenvolver o potencial conhecimento dos alunos.

A seguir relataremos o trabalho realizado com um dos problemas propostos por Krulik e Rudnick (2005), intitulado **Soma de Abdominais**:

> Como parte de seu programa de ginástica, Beto decidiu fazer abdominais toda manhã. Em 1o de abril ele fez apenas uma; no dia 2 de abril fez três abdominais; no dia 3 de abril ele fez cinco e no dia 4 de abril fez sete. Suponha que Beto tenha continuado a aumentar o número de abdominais a cada dia, seguindo esse padrão durante todo o mês de abril. Quantas abdominais ele fez no dia 15 de abril? Quantas abdominais ele fez até o dia 15 de abril?

Para esse problema, o foco indicado é o trabalho com padrões, números ímpares e números quadrados, o tópico relacionado é sequência de Fibonacci, e as estratégias de resolução sugeridas são construir uma tabela e procurar um padrão.

Esse problema foi aplicado a professores participantes de um mini-curso, do qual participaram.professores em formação inicial e em exercício nos níveis de educação infantil até ensino superior. Também já foi trabalhado com alunos de Ensino Fundamental e Médio, de escolas públicas e particulares.

A aula foi iniciada com o problema. Ele envolve conceitos que os alunos já conheciam (ou deveriam conhecer), de modo que sua resolução permitiu que eles partissem de "onde estavam", ou seja, utilizando recursos e conhecimentos que já possuíam.

Iniciando as atividades, o problema foi proposto para ser resolvido com os alunos trabalhando em duplas. A pesquisadora, ministrante do mini-curso, não disse a que conteúdo se referia o problema ou para que séries ele seria apropriado. Os participantes poderiam resolvê-lo utilizando os conteúdos e as estratégias que julgassem mais convenientes. Com isso foi possível que todos resolvessem o problema, respeitando as condições que cada um trazia no que se refere a conhecimentos, experiências, estratégias, etc.

Uma dupla de participantes, alunas de licenciatura em Matemática, após algum tempo de trabalho chamou a pesquisadora, dizendo não se lembrar das "fórmulas para resolver o problema". Resposta: "Precisa fórmula para isso?" Após refletirem alguns instantes, elas disseram que não, e seguiram com o trabalho. Outras duplas também solicitaram a presença da pesquisadora perguntando, especialmente, se poderiam utilizar esse ou aquele método de resolução, e se a resposta obtida estava correta. Ela as ajudava com dicas, sugerindo que tentassem conferir seus resultados, resolvendo-o de outro modo e que aguardassem para compartilhar as resoluções.

Após algum tempo, todos já tinham resolvido o problema e foi solicitado que um participante de cada dupla colocasse na lousa sua resolução, sendo que as iguais não precisavam ser repetidas. Uma dupla, em que as participantes eram ainda estudantes, resolveu o problema montando as seqüências de números, até 15, e somando termo a termo. Algumas duplas, professoras de Ensino Fundamental, utilizaram a soma de Gauss – este foi um conteúdo que surpreendeu, no sentido de que a pesquisadora não havia pensado nessa possibilidade de resolução quando preparou o mini-curso. E, a maioria dos participantes, que estava ministrando ou já havia ministrado aulas no Ensino Médio, utilizou a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética (P.A.). O trabalho com busca por padrões não parecia natural para aqueles professores e futuros professores, pois nenhuma dupla tentou resolver o problema utilizando essa estratégia. Resoluções e soluções conferidas, estratégias discutidas e validadas, as atividades foram encaminhadas seguindo para a segunda parte da aula.

A partir disso, a pesquisadora encaminhou as atividades comentando com os participantes que, juntos, o problema seria resolvido utilizando uma estratégia que eles ainda não haviam abordado. Apoiada nas orientações de Krulik e Rudnick (2005), e dentro da dinâmica da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, ela foi à lousa e, junto com os participantes, preparou uma tabela destacando as variáveis do problema:

Dia	Número de Abdominais	Número de Abdominais como uma Soma	Total

Essa tabela foi preenchida durante as discussões e reflexões feitas sobre cada uma das questões-chave propostas e a partir dos comentários que surgiram no momento:

1. Quantas abdominais Beto fez no dia 1? Resp: 1. E no dia 2? Resp: 3. E no dia 3? Resp: 5. E no dia 4? Resp: 7. Como vocês sabem isso? Resp: *São dados do problema.*
2. Quantas abdominais Beto fez no dia 5? Resp: 9. Como vocês sabem? Resp: *Diz o*

enunciado que o número de abdominais aumenta duas unidades por dia.

3. Qual é o nome dado para os números 1, 3, 5, 7, 9, ... ? Resp: *Números ímpares.*

Neste momento optamos por indicar: n para o número do dia; N para o número de abdominais feitas em cada dia; S para a soma indicada das abdominais feitas até aquele dia; e T para o total de abdominais feitas.

4. Como é que o "número do dia" está relacionado com o número de abdominais feitas naquele dia?

Nesse instante, foi solicitado aos participantes que relacionassem N com n, esperando chegar naturalmente à expressão do padrão que se apresenta na seqüência dos números da tabela. Resp: $N=2n-1$, isto é, para achar o número de abdominais feitas num determinado dia é preciso dobrar o número do dia e tirar um.

5. Quantas abdominais Beto fez no dia 15?

Apoiados na relação obtida, veio a resposta *29*. E justificaram assim

$$2.15=3 \quad e \quad 30-1=29.$$

6. Quantas abdominais Beto fez, ao todo, após ter se exercitado no dia 1? E no dia 2? No dia 3? No dia 4? Resp: *1, 4, 9, 16.*

7. O que é um número quadrado?

Com confiança disseram: *É o resultado de um número multiplicado por si mesmo.*

8. Quais são os primeiros cinco números quadrados?

Resp: $1=1.1$, $4=2.2$, $9=3.3$, $16=4.4$, $25=5.5$.

9. Qual é a relação entre o "número do dia" e o número total de abdominais feitas até aquele dia? Resp: *O número total é o quadrado do "número do dia", isto é,* $T=n^2$.

10. Como você pode encontrar o total para 15 dias? Resp: *Multiplicando: 15.15=225.*

A tabela foi completada:

Dia	Número de Abdominais	Número de Abdominais como uma Soma	Total
1	1	1	1
2	3	1+3	4
3	5	1+3+5	9
4	7	1+3+5+7	16
5	9	1+3+5+7+9	25
⋮	⋮	⋮	⋮
15	29	1+3+5+7+...+27+29	225

De posse da tabela e das relações obtidas registramos as soluções do problema expressas analiticamente, na forma funcional:

$$N = 2n - 1 \quad e \quad T = n^2$$

Os diferentes caminhos seguidos proporcionaram ao grupo vivenciar diferentes modos de resolver aquele problema e embora, inicialmente, pudesse parecer demasiadamente simples, houve grande interesse e envolvimento dos participantes em sua resolução e no compartilhamento e discussão das diferentes estratégias utilizadas.

Na terceira parte da aula, **Avaliando a Compreensão**, foi proposto este problema:

Problema
Suponha que Beto continuasse fazendo abdominais seguindo esse mesmo padrão.

a. Quantas abdominais ele teria feito no dia 20 de abril?*(39)*
b. Quantas abdominais ele teria feito ao todo, até esse dia?

Em seus comentários, os participantes manifestaram que, em sala de aula, após o trabalho com o problema inicial, acreditavam que os alunos não teriam dificuldade na resolução. Vários manifestaram sua concordância de que é, de fato, muito importante avaliar a compreensão dos alunos através de mais problemas.

Na última e quarta parte da aula, as atividades sugeridas foram:

Problema 1
Um dia, Beto fez 57 abdominais.

a. Em que dia Beto fez esse número de abdominais?
b. Qual era o número total de abdominais feitas até aquele dia?

Problema 2
Suponha que Beto pare de se exercitar quando atingir o total de 1225 abdominais. Durante quantos dias ele se exercitou até atingir esse total?

Problema 3
Leona também começou a fazer abdominais. No dia 1, ela fez somente uma abdominal, e no dia 2, ela também fez somente uma abdominal. No dia 3, ela fez duas abdominais; no dia 4 , ela fez três; no dia 5, ela fez cinco; e no dia 6 ela fez oito. Se o padrão continua o mesmo, quantas abdominais Leona fará no dia 10? Quantas abdominais ela terá feito ao todo, até esse dia?

Esses problemas foram resolvidos em conjunto com todos os participantes do mini-curso, e suas resoluções registradas na lousa, chegando às respostas: problema 1-a, *29*; problema 1-b, *841 abdominais*; problema 2, *35 dias*; problema 3, *55 abdominais*; problema 4, *143 abdominais*.

Especialmente o Problema 3 chamou a atenção, por abrir a possibilidade de ser um problema introdutório ao estudo da Seqüência de Fibonacci, conforme sugerido por Krulik e Rudnick (2005).

Percebeu-se, com isso, como é possível que novos conceitos e novos conteúdos sejam apresentados aos alunos a partir e através de problemas. Então, foi elaborada uma relação de conteúdos que poderiam ser trabalhados através do problema inicial e dos demais problemas constantes nesta aula: números naturais, números ímpares, números quadrados, raiz quadrada, soma de Gauss, equações, seqüências, Progressão Aritmética., soma dos termos de uma Progressão Aritmética, funções, função afim e função quadrática, sequência de Fibonacci. Em particular, com relação às funções, o problema permitiu, com alunos de Ensino Médio, trabalhar o conceito de função com domínio D = N, analisando os dados do problema, com palavras, tabelas, gráficos e expressões analíticas. Foram identificadas as variáveis dependentes e independentes e a relação funcional entre elas.

Como o problema das abdominais, originalmente, foi criado para alunos da 5a série, podemos identificar que alguns participantes obtiveram as expressões funcionais analiticamente somente por meio de observações feitas sobre o ocorrido nos primeiros dias. Assim, dizer que "o número de abdominais feitos a cada dia podia ser resumido como o dobro do número do dia, menos um". Então, apenas tinham levantado uma conjectura. O mesmo mecanismo foi empregado quando disseram que "o número total de abdominais dava o quadrado do número do dia".

Mas no mini-curso, conforme já comentado, os participantes eram professores em formação, professores em exercício em diferentes níveis de ensino, e até estudantes de licenciatura e mestrado. Assim, para essa platéia e para alunos do Ensino Médio, nossa metodologia permite ir além das simples conjecturas. Esse problema é pertinente à Matemática Discreta, a matemática do "nosso tempo". Então, ao trabalhar com um número finito de dados, o Princípio da Indução Finita é requerido para provar a validade das conjecturas levantadas.

A pesquisadora perguntou aos participantes sobre como provar que o número de abdominais feitas em cada dia, $N = 2n - 1$, e o número total de abdominais feitas até o dia n, $T = n^2$, valem para qualquer n natural. Uma participante sugeriu utilizar o Princípio da Indução Finita (P.I.F.), mas disse que não se lembrava como fazer. Por sugestão da pesquisadora ela foi à lousa e, com a ajuda dos demais colegas, a prova foi feita.

- Para o número de abdominais feitas a cada dia:

$N_n = 2n - 1 \quad , \quad n \in N^* = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\text{Se} \begin{cases} n = 1 \Rightarrow N_1 = 2.1 - 1 = 1 & \text{(verifica-se que vale)} \\ n = k \Rightarrow N_k = 2.k - 1 = 2k - 1 & \text{(hipótese de recorrência assumida)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Então:} \quad N_{k+1} &= N_k + 2 \\ &= 2.k - 1 + 2 \\ &= (2k + 2) - 1 \\ &= 2(k + 1) - 1 \end{aligned}$$

- Analogamente, para o total de abdominais feitas até determinado dia:

$T_n = n^2 \quad , \quad n \in N^* = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\text{Se} \begin{cases} n = 1 \Rightarrow T_1 = 1^2 = 1 & \text{(verifica-se que vale)} \\ n = k \Rightarrow T_k = k^2 = k^2 & \text{(hipótese de recorrência assumida)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Então:} \quad T_{k+1} &= T_k + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Assim, abriu-se a possibilidade de que mais este conteúdo, o P.I.F., fosse trabalhado a partir deste problema. O grupo concluiu, então, que a atividade **Soma de Abdominais** poderia ser utilizada com alunos desde o Ensino Fundamental até o Superior, quando alguns alunos vêem esse Princípio pela primeira vez. Somente após esta percepção foi que a pesquisadora disse aos participantes que estas atividades haviam sido concebidas, por Krulik e Rudnick, para 5a série, e entregou-lhes a tradução integral da aula, como os autores apresentam no livro.

A pesquisa e a produção científica em resolução de problemas na UNESP

Romberg (1998) considera que o objetivo da pesquisa em Educação Matemática deveria ser o de produzir novo conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática e que, uma vez que os estudantes aprendem a maioria de “sua matemática” na escola, a pesquisa deveria identificar os componentes principais das salas de aula que promovem a compreensão matemática, e apontar características organizacionais que impedem ou contribuem para o bom funcionamento de tais salas.

A metodologia de ensino apresentada neste trabalho, tem sido sistematicamente utilizada e pesquisada, em todos os níveis de ensino, pelo GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, UNESP, Rio Claro/Brasil, o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005). O grupo tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica na linha de resolução de problemas.

As pesquisas conduzidas compõem um projeto maior e mais amplo cujo objetivo central é refletir sobre e analisar as possibilidades que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece no sentido de incrementar a aprendizagem e melhorar os processos de ensino, assim como o de promover o aprimoramento das práticas dos professores no contexto de sala de aula de Matemática.

Tais pesquisas, utilizando metodologia qualitativa, consistem essencialmente em intervenções nos âmbitos da pesquisa-participante e da pesquisa-ação. Atividades de resolução de problemas são elaboradas pelos pesquisadores e aplicadas em sala de aula. Desse modo, grande parte das dissertações, teses e outros trabalhos produzidos pelo grupo narram e analisam situações de intervenção pedagógica, realizadas por seus membros, em sala de aula ou no âmbito da formação de professores. A produção científica abrange uma considerável variedade de conteúdos matemáticos, em todos os níveis de ensino – Fundamental, Médio e Superior.

Esse conjunto de pesquisas constitui um amplo espectro de possibilidades de pesquisa na Educação Matemática. Uma descrição das dissertações e teses, bem como do trabalho já realizado pelo grupo até 2005, pode ser encontrada em Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2005).

Conclusões

Considerando os educadores matemáticos como pessoas preocupadas profissionalmente com o ensino e a aprendizagem de Matemática em qualquer nível de ensino, podemos testemunhar sua dedicação e relevante produção através do volume e da qualidade dos trabalhos realizados em Educação Matemática no século

XX e neste século. Os alunos atualmente são beneficiados por uma grande variedade de materiais instrucionais criados. Certamente, muitos professores de hoje estão mais bem preparados pedagógica e matematicamente do que os de algumas décadas passadas. A maior parte dos currículos escolares de Matemática se apresentam mais ricos. Apesar de tudo isso, ainda hoje se ouvem as mesmas queixas: que os estudantes não gostam e não aprendem Matemática suficientemente bem; que os professores não sabem Matemática e não sabem ensiná-la; que os currículos escolares são superficiais, repetitivos e fragmentados... Todas essas queixas e dados obtidos de outras fontes (pesquisas, avaliações, etc) sugerem que os alunos saem mal preparados da escola, não sabendo fazer uso da Matemática trabalhada ao longo de muitos anos de escolaridade. Como já dissemos, muitas vezes as pessoas se mostram incapazes de tomar decisões na vida. Essas pessoas nem sempre pensam matematicamente e tampouco percebem que, se o fizessem, poderiam tomar melhores decisões.

A metodologia de ensino aqui apresentada constitui uma forma de trabalho, em sala de aula, a partir de problemas geradores. Utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a construção de conhecimentos relacionados a conceitos e conteúdos matemáticos se realiza de forma mais significativa e efetiva pelos alunos. As experiências, em pesquisas com alunos e atividades de formação de professores em que esta forma de trabalho tem sido utilizada, têm favorecido significativos avanços na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e no aprimoramento da prática docente pelo professor.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. O Ensino de Números Racionais e Proporcionalidade através da Resolução de Problemas. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 12., 2007. **Anais ...** Santiago de Querétaro: Benemérita Escuela Normal de Querétaro, 2007. 1 Cd-rom. p. 1-12.

BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964. 98p.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** – 1o, 2o, 3o e 4o ciclos, Ensino Médio: Matemática. Brasília, 1997, 1998, 1999.

BRITO, M. R. F. **Solução de Problemas e a Matemática Escolar**. Campinas: Alínea. 2006.

CAI, J. What Research Tells Us about **Teaching Mathematics through Problem Solving**. In: LESTER JR, F. K. (ed.). Teaching Mathematics through Problem Solving - Prekindergarten-Grade 6. Reston/VA: NCTM, 2003. p. 141-253.

FERNANDEZ, D. et al. **Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática**: múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 1997.

HIEBERT, J.; BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In: ______. (eds.) **Number concepts and operations in the middle grades**. 3 ed. Reston/VA: NCTM, 1989. p. 1-18.

HOUAISS, A., VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

KILPATRICK, J.; SILVER, E. A. Unfinished Business: Challenges for Mathematics Educators in the Next Decades. In: BURKE, M. J.; CURCIO, F. R. (eds.). **NCTM 2000 Yearbook-Learning Mathematics for a New Century**. Reston/VA: NCTM, 2000. p. 223-235.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint**. Arithmetic, Algebra, Analysis. Trad. por HEDRICK, E. R.; NOBLE, C. A. New York: Dover Publications, 1945. Tradução da 3a. edição alemã, 1908.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. **Problem-Driven Math**: Applying the Mathematics Beyond Solutions. Chicago, IL: Wright Group/McGrawHill, 2005.

LEDER, G. C. The Aims of Research. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (eds.). **Mathematics Education as a Research Domain – a Search for Identify**. Book 1. Kluver Academic Publisher. 1998. p. 131-140.

LESH, A. R.; HAMILTON, E.; KAPUT, J. **Foundations for the Future in Mathematics Education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum. 2007.

Michaelis Moderno Dicionário Inglês. Disponível em http://michaelis.uol.com.br/moderno/ingles/>. Acesso em 16 set. 2009.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

_______. **An Agenda for Action**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p. 199-220.

ONUCHIC, L R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs). **Educação Matemática - pesquisa em movimento**. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

POLYA, G. **How to Solve It**. Princeton: Princeton University Press, 1944.

POZO, Juan Ignácio. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ROMBERG, T. A. The Social Organization of Research Programs in Mathematical Sciences Education. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (eds.). **Mathematics Education as a Research Domain – a Search for Identify**. Book 2. Kluver Academic Publisher. 1998. p. 379-389.

SCHROEDER, T.L.; LESTER Jr, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P.R.; SHULTE, A. P. (eds.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1989. p. 31-42.

SHIMIZU, Y. Problem Solving as a Vehicle for Teaching Mathematics: A Japanese Perspective. In: LESTER JR, F. K. (ed.) **Teaching Mathematics through Problem Solving**. Prekindergarten-Grade 6. Reston, VA: NCTM, 2003. p. 205-214.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001

SPITZER, H. F. **The teaching of arithmetic**. Boston: Houghton Mifflin, 1948.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p. 1-23.

VALE, M. I. P. Resolução de Problemas. In: Palhares, P. (coord). **Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico**. Lisboa: Lidel. 2004.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, ed.4, 2001. 478 p.

VAN DE WALLE, J. A; LOVIN, H. L. **Teaching Student-Centered Mathematics**. New York: Pearson, 2006.

Submetido em março de 2009.
Aprovado em setembro de 2009.

Recontando uma história: O formalismo e o ensino de Matemática no Brasil

Helena Noronha Cury
Professora, UNIFRA/RS
curyhn@via-rs.net

Resumo
Neste artigo, pretende-se tecer algumas considerações sobre idéias que permearam práticas pedagógicas ainda vigentes no Brasil, objetivando discutir a influência do formalismo sobre o ensino de Matemática. Com base em idéias de Bruno Latour e o apoio de autores que tratam da Filosofia da Matemática e da Educação Matemática, inicialmente são abordadas as concepções filosóficas da Matemática e suas relações com as práticas pedagógicas. A seguir, é apontada a influência do formalismo sobre o Movimento da Matemática Moderna, destacando-se, ao final, sua presença nas tendências pedagógicas no ensino de Matemática. No decorrer do texto, são usadas metáforas envolvendo a figura mitológica de Jano.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Formalismo; Filosofia da Matemática; Matemática Moderna; Tendências Pedagógicas.

Retelling an history: formalism and mathematics teaching in Brazil

Abstract
In this paper we intend to consider ideas that permeated pedagogical practices still prevailing in Brazil, aiming to discuss the influence of formalism on mathematics teaching. Based on ideas of Bruno Latour and supported by authors who deal with Philosophy of Mathematics and Mathematics education, initially we approach the philosophical conceptions of mathematics and its relationship to teaching practices. Then, the influence of formalism on the movement of Modern Mathematics is pointed out, finally emphasizing its presence on pedagogical trends in mathematics teaching. Throughout the text, metaphors are used involving the mythological figure of Janus.

Keywords: Mathematics Teaching; Formalism; Philosophy of Mathematics; Modern Mathematics; Pedagogical Trends.

Introdução

A inspiração para a escrita deste texto surgiu da leitura de um artigo ainda não publicado, intitulado "Recontando a computabilidade", que me foi enviado por colegas, em sua primeira versão[1], em que os autores comentam o declínio da abordagem formalista. Em 1900, David Hilbert destacou dez problemas que considerava importantes para o desenvolvimento da Matemática no século XX. O segundo deles consistia em provar a consistência[1] dos axiomas da aritmética. No entanto, em 1930, Gödel anunciou que, pressupondo a consistência formal da Matemática clássica, é possível construir proposições aritméticas que são verdadeiras, mas não dedutíveis nesse sistema (GOLDSTEIN, 2008), levando o formalismo a perder força como filosofia da Matemática.

Com base em minhas experiências no ensino de Matemática desde os anos 1970, pensei que, se efetivamente o formalismo entrou em declínio como abordagem filosófica da Matemática, o mesmo não aconteceu com sua influência sobre o ensino dessa disciplina. Parece-me que convivemos até hoje com idéias "formalistas" que não têm mais nada em comum com as concepções hilbertianas, mas funcionam como farsa, como desculpa para usar determinadas práticas no ensino de Matemática, sem que seus "defensores" saibam, provavelmente, o que estão defendendo.

Neste texto, pretendo tecer algumas considerações sobre idéias que permearam práticas pedagógicas ainda vigentes no Brasil, objetivando, em especial, discutir a influência do formalismo no ensino de Matemática. Para isso, trago autores que tratam de Filosofia da Matemática e da Educação Matemática, bem como idéias de Bruno Latour, especialmente da obra "Ciência em Ação: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora".

Seguindo os Passos de Latour

Ao seguir cientistas e engenheiros através da sociedade, Latour (2000)[3] apela para conceitos, metáforas, regras metodológicas e princípios, com os quais argumenta suas afirmativas. A primeira idéia que surge é a da "caixa-preta",

1 CAFEZEIRO, I.; HAEUSLER, E. H.; CUCKIERMAN, H.; MARQUES, I. da C. **Recontando a computabilidade**. Artigo submetido à Revista de Informática Teórica e Aplicada em outubro de 2008.
2 Um sistema é consistente se nele não é possível provar uma proposição e sua negação.
3 Sempre que mencionar Latour, estarei me referindo à obra: LATOUR, B. Ciência em Ação: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. São Paulo: Editora UNESP, 2000. Dessa forma, deixarei de indicar a data e apenas citarei a página correspondente.

expressão usada, segundo ele, quando algo se revela complexo demais para que seu funcionamento interno seja entendido e só é levado em conta o que entra e o que sai do sistema. A imagem de caixas-pretas, prontas, fechadas, e a imagem das controvérsias que as geraram, são tão diferentes quanto as duas faces do deus Jano, as quais ele denomina "ciência pronta" e "ciência em construção". Para aproveitar conceitos empregados por Latour, discuto, inicialmente, como se pode usar metaforicamente a dupla face de Jano.

Segundo o Dicionário de Mitologia Greco-Romana (1973), Jano era um mortal, habitante da região do Lácio, que lá acolheu Saturno, expulso da Grécia por Júpiter. Como recompensa, Saturno lhe deu o poder de conhecer o passado e o futuro; após sua morte, foi divinizado, sendo considerado o deus de todas as portas, que guarda o interior e o exterior. Também protege o início e o fim de todas as atividades e simboliza mudança e transição, de uma condição para outra.

Ao colocar palavras na boca de cada face de Jano, Latour associa à face esquerda (a que representa a ciência pronta) as observações que não discutem os fatos, que os aceitam como são. À direita, são atribuídas as "máximas" que indicam o processo de construção do conhecimento.

Pensando em termos de filosofias da Matemática, também se pode ver as duas faces de Jano, olhando para direções opostas, mas vendo ao mesmo tempo o passado e o futuro. A face esquerda é absolutista, considera a Matemática como o domínio do conhecimento incontestável, enquanto a direita é falibilista, aceita que o conhecimento matemático é falível e corrigível, em contínua expansão. (ERNEST, 1991). Mas será que Jano vê o absolutismo no passado e o falibilismo no futuro? Ou, já que pode ver ao mesmo tempo as duas épocas, vislumbra essas tendências ainda muito presentes nas práticas de ensino da Matemática?

As Correntes Filosóficas e suas Influências sobre o Ensino de Matemática

Não pretendo aqui repetir informações sobre fatos históricos relacionados às distintas correntes filosóficas da Matemática, pois essas já estão disponíveis em muitas obras, de História ou de Filosofia da Matemática, com abordagens diversas, dependendo do ponto de vista dos autores (PASTOR; BABINI, 1951; COSTA, 1962; BARKER, 1969; SNAPPER, 1984; DAVIS; HERSH, 1985; ERNEST, 1991; KÖRNER, 1985). Apenas são esboçadas algumas características de correntes filosóficas que tentavam fundamentar a Matemática no início do século XX, relacionando-as com posturas pedagógicas que hoje se misturam em nossas aulas. Como diz Thom (1973),

> De fato, quer se queira quer não, toda a pedagogia matemática, mesmo se escassamente coerente, apoia-se em uma filosofia da matemática. A tendência modernista é baseada essencialmente na concepção formalista da matemática. (p.204).[4]

Hersh (1997), ao apontar mitos, enganos e incompreensões na Matemática, faz lembrar as idéias de Latour sobre as duas faces de Jano. Segundo ele, "a filosofia tradicional só reconhece a frente da matemática. Mas é impossível entender a frente ignorando as costas" (p. 36).[5] A frente é a Matemática mostrada ao público, aquela que está pronta, após todas as críticas e correções; as costas são o que os matemáticos fazem para chegar ao resultado, são suas idas e vindas, suas tentativas e dúvidas.

Dessa forma, a face da Matemática que se apresenta aos alunos depende da filosofia assumida por seus professores, ainda que esses não tenham claras suas concepções, por terem sido moldados em uma determinada fôrma, em seus cursos de graduação. Evidentemente, não é possível fazer uma associação estreita entre uma visão filosófica da Matemática e uma tendência pedagógica que lhe seja correspondente. Apoiada em autores que também já discutiram essas relações entre concepções e práticas, sintetizo aqui algumas reflexões já apresentadas em Cury (1999).

Blaire (1981) identifica quatro correntes filosóficas em Matemática, o logicismo, o formalismo, o intuicionismo e o movimento denominado hipotético, desenvolvido com base nas idéias de Lakatos. Associadas às respectivas correntes filosóficas, Blaire apresenta quatro possíveis perspectivas para o ensino da Matemática: como arte, como jogo, como ciência natural e como atividade tecnicamente orientada.

Ao final do artigo, Blaire comenta que há outras razões, além da postura filosófica, para que um professor assuma uma determinada perspectiva pedagógica:

> [...] a popularidade, nos últimos quinze anos, do ensino de Matemática como um jogo, não significa que todos os que defendem a orientação dos ´jogos` sejam formalistas. Enquanto alguns que seguem esta orientação são formalistas, outros simplesmente creem que tal perspectiva facilita o desempenho de seus alunos nas verificações." (BLAIRE, 1981, p.152).[6]

---

4 "In fact, whether one wishes it or not, all mathematical pedagogy, even if scarcely coherent, rests on a philosophy of mathematics. The modernist tendency is grounded essentially on the formalist conception of mathematics."

5 "Traditional philosophy recognizes only the front of mathematics. But it´s impossible to understand the front while ignoring the back."

6 [...] the popularity, in the last fifteen years, of teaching as a game, does not mean that all those supporting the ´games` orientation, are formalists. While some, who support this orientation, are formalists, others simply believe that such a perspective facilitates the examination performances of their pupils."

Essa é uma primeira idéia que vem ao encontro do que Latour aponta: dependendo dos objetivos do professor, de como seus colegas agem em uma determinada escola, da corporação de docentes de uma mesma disciplina, uma determinada associação entre concepção e prática pode ser fortalecida ou enfraquecida. Se um professor ingressa em uma instituição e suas idéias contrariam as dos colegas, estes podem tentar cooptá-lo, arregimentando amigos que procuram defender as concepções e práticas vigentes.

Lerman (1983) prefere adotar a linha lakatosiana, agrupando as visões filosóficas da Matemática sob duas perspectivas, a euclidiana e a quase-empiricista, cada uma delas dando subsídios para estilos opostos de ensino de Matemática: o que é centrado no conhecimento e o que é centrado na resolução de problemas.

Ernest (1985, 1989, 1991) também classifica as visões filosóficas da Matemática em duas correntes que se opõem, a absolutista (e nela inclui o platonismo, o logicismo, o intuicionismo e o formalismo) e a falibilista. O autor sugere possíveis relações entre as duas correntes filosóficas, associando-as, respectivamente, ao ensino de Matemática como produto e como processo.

Davis (1988) classifica as filosofias da Matemática em privadas e públicas. Nas primeiras (incluindo o platonismo, o logicismo, o intuicionismo e o formalismo), cada matemático trabalha isolado, descobrindo (ou criando) as relações entre os entes matemáticos. As filosofias públicas, por outro lado, consideram que o conhecimento matemático é parte do conhecimento de uma comunidade, que pratica uma determinada atividade e que discute, publica, corrige suas criações.

Pode-se considerar absolutista a concepção de Descartes (1988), cujas regras para "bem conduzir a razão na busca da verdade" preconizavam o reducionismo, em que era sugerida uma espécie de "hierarquia de verdades". Seu método tornou-se uma característica do pensamento científico e está presente no ensino de Matemática. Muitas vezes costuma-se sugerir ao aluno que resolva um problema dividindo as dificuldades, começando pelas partes mais simples e resolvendo passo a passo.

Até aqui, foram trazidas considerações que mostram uma bipolarização entre concepções, tanto em termos filosóficos quanto pedagógicos. É Jano olhando para um ou para outro lado. No entanto, quero propor um olhar mais abrangente, em que uma das cabeças de Jano executa um movimento de rotação, de 180 graus, até chegar ao lugar onde a outra cabeça está mirando o mundo. E esta outra, instantaneamente, começa também a rotar na direção oposta. Por que esta metáfora?

Porque parece que não é possível olhar para um aspecto sem deixar de considerar todos os outros que o influenciam e que estão imbricados de tal forma que não se consegue separá-los. Todas as concepções filosóficas da Matemática recebem influências das outras e todas as posturas pedagógicas se nutrem umas das outras.

Mas o propósito, neste texto, é abordar especialmente o formalismo e sua influência sobre o ensino de Matemática. A seguir, percorro uma outra via, seguindo os passos dos que, no século XX principalmente, marcaram as correntes pedagógicas dessa ciência.

O Formalismo e suas Derivações: as influências do Movimento da Matemática Moderna

À pergunta "O que é a Matemática?", os formalistas respondem: axiomas, definições e teoremas. (HERSH, 1997). No entanto, Snapper (1984) alerta para o fato de que não devemos confundir axiomatização com formalização e dá um exemplo: "Euclides axiomatizou a geometria por volta do ano 300 a.C., mas sua formalização principiou somente uns 2200 anos após, com os logicistas e os formalistas" (p. 91).

Lakatos (1978), ao criticar fortemente o formalismo na introdução de sua obra "Provas e Refutações", afirma que essa corrente filosófica da Matemática "nega o *status* de matemática à maioria do que comumente tem sido considerado matemática, e nada pode dizer sobre seu progresso." (p. 14). Em consonância com essas idéias, Hersh (1997) considera que uma forma de testar uma filosofia da Matemática é fazer perguntas sobre a própria Matemática: o que é, do que trata, como se adquire o conhecimento matemático, etc. Ao finalizar sua obra, o autor volta às mesmas questões e afirma:

> A Matemática é precisa. A Filosofia não é. Os matemáticos freqüentemente acreditam que a filosofia da matemática é parte da matemática. Não é. É parte da filosofia. Se fosse parte da matemática, poderia ser precisa. (HERSH, 1997, p. 237).[7]

A postura formalista, se tomada ao pé da letra no ensino de Matemática, é uma caixa-preta que não pode ser aberta! Lakatos (1978) critica veementemente esse

---

7 "*Mathematics* is precise. *Philosophy* isn´t. Mathematicians often mistakenly expect philosophy of mathematics to be part of mathematics, It isn´t. It´s part of philosophy. If it were part of mathematics, it could be precise." (Grifos do autor).

tipo de postura pedagógica, quando afirma: “[...] ainda não se compreendeu suficientemente que a atual educação científica e matemática é um foco de autoritarismo e que é a pior inimiga do pensamento independente e crítico." (p.186).

O formalismo foi introduzido no ensino de Matemática no começo do século XX, principalmente por meio da influência da obra de Bourbaki. Face aos problemas que se apresentavam no ensino de Matemática, foi realizado na Europa o Seminário de Royaumont, em 1959, em que foram estabelecidas as linhas centrais da reforma da Matemática Moderna, que contemplava os conceitos da Teoria dos Conjuntos, a introdução das estruturas algébricas, o abandono da Geometria Euclidiana, a ênfase na Álgebra Linear, entre outros. O Movimento da Matemática Moderna desenvolveu-se na Europa, Estados Unidos e América Latina e em todos os lugares foram formados grupos de estudo que desenvolveram projetos com vistas à formação de professores aptos para lecionar a nova Matemática, elaboração de livros-texto e realização de reformas curriculares. (ZUÑIGA, 1992).

Em 1958, foi fundado nos Estados Unidos o *School Mathematics Study Group* (SMSG), com influência indireta da obra de Bourbaki. Conforme D´Ambrósio (1987), uma das premissas do trabalho do grupo SMSG era a aproximação do ensino universitário (que já enfatizava o estudo de conjuntos e estruturas matemáticas) com o secundário, de forma a trabalhar com conjuntos, operações e lógica desde os primeiros anos. A tradução dos livros do SMSG para o português foi financiada com recursos do acordo MEC/USAID[8] (D´AMBRÓSIO, 1987; SILVA, 2006), porém os textos foram considerados muito difíceis para o ensino brasileiro.

Os cursos de formação de professores de Matemática, no Brasil, tiveram início em 1934, com o curso pioneiro da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. A renovação da Matemática na França a partir dos trabalhos do grupo Bourbaki foi sentida no Brasil desde que chegou a essa Faculdade, em 1945, o matemático francês André Weil, um dos fundadores desse grupo. Mais tarde, por sua influência, também Jean Dieudonné veio para São Paulo. (D´AMBRÓSIO, 2008).

Os professores em atuação nos anos 1960 não tinham, em geral, conhecimento das idéias da Matemática Moderna. Alguns recém-graduados estudavam os conceitos-chave da Matemática Moderna nos cursos de Licenciatura

[8] O acordo MEC/USAID foi estabelecido a partir de 1964, entre universidades brasileiras e órgãos governamentais, como o Ministério da Educação (MEC), com a *United States Agency for International Development* (USAID), tendo sido disponibilizada ajuda financeira para as instituições envolvidas.

em Matemática, mas não tinham força, ao chegar às escolas, para introduzir esses conteúdos, tendo em geral que se adaptar ao que era ensinado por seus colegas mais antigos na Instituição. Parafraseando o terceiro princípio de Latour, nunca somos postos diante de uma determinada filosofia da Matemática, que possa originar uma pedagogia específica, mas diante de associações mais fracas e mais fortes, entre as pessoas que lidam com esses conceitos e atuam segundo essas pedagogias.

Seguindo as idéias que vinham de fora, foram criados no Brasil, naquela época, alguns grupos que tiveram muita influência na disseminação do Movimento da Matemática Moderna, especialmente o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), em São Paulo, o GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), no Rio de Janeiro e o GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre), no Rio Grande do Sul. Ao mesmo tempo em que eram criados esses grupos e ministrados os cursos, foram lançados livros para o Ensino Básico, com apresentação dos conceitos-chave do Movimento. Assim, de novo havia uma gama de ações que empurrava os professores para ensinar a nova Matemática e esses, despreparados, ensinavam uma paródia de teorias que ainda não dominavam, fixando-se, especialmente, nos seus aspectos formais, tais como os típicos exercícios de utilização dos símbolos de pertinência e inclusão.

Outro aspecto que lembra o relato de Latour sobre as disputas de poder entre correntes científicas são as críticas feitas ao Movimento da Matemática Moderna por matemáticos influentes. O francês René Thom (1971) fez um levantamento das mudanças no currículo causadas pela introdução da Matemática Moderna e concluiu que

> A antiga esperança de Bourbaki, de ver as estruturas matemáticas surgirem naturalmente de uma hierarquia de conjuntos, de seus subconjuntos e de sua combinação é, sem dúvida, somente uma ilusão. (p. 699).[9]

Seu texto provocou muito interesse entre os matemáticos e Dieudonné (1973) encarregou-se de retrucar, ponto por ponto, as questões levantadas.

Morris Kline fez uma das mais conhecidas e duras críticas à Matemática Moderna, em seu livro "O Fracasso da matemática moderna", afirmando que: "Pedir ao estudante que cite axiomas nas operações elementares com números é como pedir a um adulto que justifique cada ato que faz depois que se levanta de manhã." (KLINE, 1976, p. 65).

9 "The old hope of Bourbaki, to see mathematical structures arise naturally from a hierarchy of sets, from their subsets, and for their combination, is, doubtless, only an illusion."

Ao entrevistar professores que ministraram cursos sobre Matemática Moderna nas décadas de 60 e 70 no Brasil, Búrigo (1989) comenta que o viés formalista da proposta da Matemática Moderna não foi reconhecido no momento, pois havia a idéia de que "a solução para a compreensão estava na linguagem oferecida pela matemática moderna, incluindo o uso de diagramas e gráficos." (p. 131).

Tendo apontado alguns elementos da presença do formalismo no ensino de Matemática, por meio da Matemática Moderna, justifico, a seguir, a hipótese inicial, de que ainda hoje essa corrente filosófica da Matemática está viva em muitas salas de aula.

As Tendências Pedagógicas no Ensino de Matemática e a Herança do Formalismo

A área de conhecimento hoje conhecida como "Educação Matemática" teve seu início como área distinta da Matemática na primeira metade do século passado, quando ocorreu, em 1969, o primeiro *International Congress on Mathematical Education* (ICME), em Lyon.

Tendo origem em um congresso de matemáticos, os participantes dos primeiros eventos de Educação Matemática ainda se debatiam em dúvidas sobre qual era, exatamente, o papel dessa nova área. Em uma época de forte influência bourbakista, provavelmente não se entendia uma disciplina cujos conceitos não estivessem estruturados em um corpo rígido de proposições, com as quais se pudesse modelar a prática. Aos poucos, trabalhos apresentados nos congressos internacionais e nacionais foram se fundamentando em outras áreas, como Educação, Psicologia, Antropologia.

Os matemáticos foram se unindo, em alguns casos, ou foram se separando, em outros, daqueles profissionais que atuam na Educação Matemática. Esta, ao apoiar-se na Educação, foi trazendo as teorias dessa área, para se fortalecer contra críticas. Pode-se parafrasear o segundo princípio de Latour, afirmando que os educadores matemáticos passam a falar em nome dos novos aliados, fazendo o fiel da balança de forças pender em seu favor. Os matemáticos, em geral arredios a alianças com colegas de outras áreas, muitas vezes boicotam as tentativas de fundamentar o ensino com base em teorias pedagógicas ou psicológicas. No entanto, as pressões de professores de Matemática, membros de sociedades científicas específicas, juntamente com as pressões da sociedade que vê crescerem as dificuldades em relação à Matemática face ao ingresso de uma grande massa de estudantes nas escolas, em todos os níveis, fazem com que, aos poucos, novas abordagens pedagógicas sejam introduzidas nas salas de aula.

Fiorentini (1995), partindo de classificações de abordagens utilizadas na área de Educação, apresentou uma categorização das tendências pedagógicas no ensino de Matemática:

a) a tendência formalista clássica, que perdurou até 1950, aproximadamente, caracterizando-se pela ênfase no modelo euclidiano, com ensino livresco, centrado no professor e aprendizagem passiva;

b) a tendência formalista moderna, prevalente nas décadas de 50 e 60 do século passado, seguindo o movimento de reformulação curricular da Matemática Moderna;

c) a tendência tecnicista, com presença marcante entre o início dos anos 60, até o final dos 70, preconizando a otimização dos resultados do ensino, com manutenção da ordem vigente. Do confronto entre o movimento da Matemática Moderna e a tendência tecnicista, surgiu o tecnicismo formalista que, segundo Fiorentini (1995), trazia uma associação entre o modo formalista de conceber a Matemática e a concepção tecnicista de conceber a organização do processo de ensino e aprendizagem;

d) as chamadas tendências ativas, que compreendem duas vertentes, a empírico-ativista e a construtivista, a primeira com origem no movimento da Escola Nova e a segunda, com base, especialmente, nas idéias de Piaget;

e) as tendências socioetnoculturais, que tiveram origem nas preocupações de alguns educadores com o fracasso do Movimento da Matemática Moderna e com as dificuldades de aprendizagem da Matemática apresentadas por alunos de classes menos favorecidas, estendendo-se desde a década de 60 até os dias atuais.

Em relação às tendências formalistas, inclusive ao tecnicismo formalista, as marcas das idéias divulgadas no bojo dessas tendências se evidenciaram no ensino brasileiro de Matemática. Brito (2008), ao mencionar a influência do acordo MEC/USAID no Rio Grande do Norte, relata cursos de treinamento para professores leigos e considera que esses cursos tiveram como resultado a inserção oficial do Movimento da Matemática Moderna nas quatro primeiras séries do primeiro grau.

Outro exemplo da presença do formalismo na época em que o Movimento da Matemática Moderna dominou o ensino de Matemática no Brasil é dado por Gomes (2006), em relação ao ensino de números racionais. Segundo a autora, a proposta de unificação da Matemática no ensino modificou, de forma radical, a abordagem dos números. Em seu estudo, Gomes (2006) analisou cinco manuais utilizados no ensino de Matemática na primeira série do antigo ginásio e, segundo ela, as grandezas e medidas foram retiradas dos textos, em seu lugar tendo surgido "a apresentação do número como uma propriedade comum a todos os conjuntos que têm a mesma quantidade de elementos" (p. 34). Houve uma preocupação em explicitar a correspondência biunívoca entre conjuntos para apresentar os números naturais e passou-se a realizar a apresentação formal da fração por meio de um par ordenado de inteiros, desvalorizando a noção de fração como uma ou mais partes iguais em que se divide uma unidade, considerada intuitiva ou vulgar.

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) consideram que um dos propósitos do Movimento da Matemática Moderna foi a tentativa de unir os três campos fundamentais da Matemática, a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, especialmente pela introdução de elementos-chave do Movimento. Essa mudança fez com que a Álgebra passasse a ocupar um lugar de destaque nos currículos escolares, sendo enfatizada a precisão matemática dos conceitos e o uso adequado da linguagem matemática.

A Geometria Euclidiana, nessa nova visão, deveria ser substituída por abordagens mais rigorosas, como a geometria das transformações ou o emprego de conceitos de espaço vetorial e transformações lineares. Pelas dificuldades de implementar essas idéias na prática escolar, o que restou do enfoque proposto foi apenas a introdução da linguagem dos conjuntos na geometria, descaracterizando o projeto original.

Considerações Finais

Pelas idéias apontadas neste texto, sobre as influências do formalismo no Movimento da Matemática Moderna e pela sua presença nas tendências pedagógicas do ensino de Matemática, acredito que o formalismo foi a corrente filosófica que mais perto chegou de ser assumida por parte dos professores, talvez porque, evitando os conflitos inerentes à realidade, permita colocar a "culpa" de qualquer fracasso na idéia de que a Matemática é como um jogo e os alunos precisam aprender suas regras. Mesmo não sabendo definir o que é formalismo e usando termos que apenas indicam certas características dessa corrente filosófica[10], alguns professores criticam um ensino "formalista" da Matemática, pensando, talvez, em pressupostos da

10 Termos como "rigor", "axiomatização", "dedução lógica" são usados, algumas vezes, como sinônimos de "postura formalista", seja qual for a "definição" para essa postura.

tendência pedagógica tradicional.

Discorri sobre alguns elementos da História e da Filosofia da Matemática e da Educação Matemática, especialmente visando explorar a influência do formalismo no ensino dessa disciplina. Muito ainda tem que ser feito para abrir a caixa-preta representada pela sua influência. Pesquisas são bem-vindas, discussões são necessárias, artigos devem ser escritos. Afinal, somente entendendo o que estava dentro da caixa-preta e o que dela saiu é que poderemos compreender a situação atual do ensino de Matemática no Brasil.

Referências

BARKER, S. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BLAIRE, E. Philosophies of mathematics and perspectives of mathematics teaching. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 12, n. 2, p. 147-153, 1981.

BRITO, A. de J. A USAID e o ensino de Matemática no Rio Grande do Norte. **BOLEMA**, v. 21, n. 30, p. 1-25, 2008.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 80. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

COSTA, N. C. A. da. **Introdução aos fundamentos da matemática**. Porto Alegre: Globo, 1962.

CURY, H. N. Concepções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. **BOLEMA**, v. 12, n. 13, p. 29-43, 1999.

D´AMBRÓSIO, B. S. **The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education**. 1987. Tese (Doutorado em Educação) – Indiana University, Indiana, 1987.

D´AMBRÓSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

DAVIS, P. J., HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DAVIS, P. J. Applied mathematics as social contract. **Mathematics Magazine**, v.61, n.3, p.139-147, June 1988.

DESCARTES, R. **Discurso do método**. Lisboa: Edições 70, 1988.

DICIONÁRIO de Mitologia Greco-Romana. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

DIEUDONNÉ, J. Should we teach "modern" mathematics? **American Scientist**, v. 61, p. 19, Jan./ Feb. 1973.

ERNEST, P. The philosophy of mathematics and mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v.16, n.5, p.603-612, 1985.

______. Philosophy, mathematics and education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v.20, n.4, p.555-559, July/Aug. 1989.

______. **The philosophy of mathematics education**. London: Falmer, 1991.
FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Zetetiké, v.3, n. 4, p.1-37, nov. 1995.

GOLDSTEIN, R. **Incompletude**: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GOMES, M. L. M. Os números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira. **BOLEMA**, v. 19, n. 25, p. 17-44, 2006.

HERSH, R. **What is mathematics, really?** New York: Oxford University Press, 1997.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KÖRNER, S. **Uma introdução à filosofia da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1985.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LATOUR, B. **Ciência em Ação**: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

LERMAN, S. Problem-solving or knowledge-centred: the influence of philosophy on mathematics teaching. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v.14, n.1, p.59-66, Jan./Feb. 1983.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, v. 3, n. 1[7], p. 39-54, março 1992.

PASTOR, J.R., BABINI, J. **Historia de la matemática**. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1951.

SILVA, M. C. L. Da. Movimento da matemática moderna: possíveis leituras de uma cronologia. **Revista Diálogo** Educacional, v. 6, n. 18, p. 49-63, maio/ago. 2006. Disponível em <http://www2.pucpr.br/reol/index.php/DIALOGO?dd1=576&dd99=pdf> Acesso em 06 março 2009.

SNAPPER, E. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. Humanidades, v.2, n.8, p.85-93, jul./set. 1984.

THOM, R. "Modern" mathematics: an educational and philosophic error? **American Scientist**, v. 59, p. 695-700, Nov./Dec. 1971.

______. Modern Mathematics: does it exist? In: HOWSON, A.G. (Ed.). **Developments in mathematical education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p.194-209.

ZUÑIGA, A. R. Las matemáticas modernas en las Américas: filosofía de una reforma. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMATICA, 8., 1991, Miami. **Actas...** Paris: UNESCO, 1992.

Submetido em março de 2009.
Aprovado em agosto de 2009.

As estratégias do professor para desenvolver modelagem matemática em sala de aula

Andréia Maria Pereira de Oliveira
Professora, UEFS/BA
ampodeinha@uol.com.br

Ilaine da Silva Campos
Graduada em Matemática, UEFS/BA
ila_scampos@yahoo.com.br

Maiana Santana da Silva
Graduada em Matemática, UEFS/BA
maai.san@gmail.com

Resumo
Neste artigo, discutimos as estratégias utilizadas por uma professora para desenvolver modelagem matemática em sua prática pedagógica. A natureza da pesquisa é qualitativa e os dados foram coletados através da observação e entrevistas. A professora utilizou as seguintes estratégias para realizar modelagem matemática na sua prática pedagógica: *as estratégias para os momentos iniciais, as estratégias para possibilitar a coleta das informações e as estratégias para justificar o objetivo do ambiente de modelagem.* Os resultados evidenciam que as estratégias utilizadas pela professora foram fundamentais para o desenvolvimento do ambiente de modelagem e interferiram no envolvimento dos alunos.

Palavras-chave: Modelagem matemática, professores, estratégias, alunos, sala de aula.

Teacher's strategies to develop mathematical modelling in the classroom

Abstract
In this paper, we discuss teacher's strategies to develop a modelling task in their pedagogical practice. This research is a qualitative one, and the data was collected through observation and interviews. The teacher used the following strategies to achieve mathematical modeling in her pedagogical practice: strategies for the initial moments, strategies to enable the collection of information and strategies to justify the purpose of environmental modeling. The results point out that the teacher's strategies were fundamental for the development of the modelling environment and interfered in students' engagement.

Keywords: Mathematical modelling, teachers, strategies, students, classroom.

Introdução

No âmbito da Educação Matemática, os debates sobre modelagem matemática[1] apresentam-se a partir de diferentes perspectivas (KAISER; SRIRAMAN, 2006), as quais estão relacionadas aos propósitos de implementá-la na sala de aula. Neste artigo, considerando os diferentes objetivos, assumimos a modelagem a partir de uma perspectiva crítica, com o propósito de possibilitar aos indivíduos argumentarem sobre a aplicabilidade da matemática nas práticas sociais (SKOVSMOSE, 2007). Nesse contexto, a modelagem deve constituir-se como uma das possibilidades de incorporar temas sociais nas aulas de matemática (JULIE; MUDALY, 2007), contribuindo para a habilitação das pessoas para interferirem na sociedade.

Concebemos modelagem como um ambiente de aprendizagem[2], no qual os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações-problema procedentes de outras áreas do conhecimento ou do dia-a-dia (BARBOSA, 2006, 2007a). Em termos gerais, o ambiente de modelagem caracteriza-se por abordar situações que representam problemas para os alunos pois eles desconhecem previamente as possíveis soluções e por ser provenientes do dia-a-dia e de outras áreas do conhecimento que não a própria matemática (BARBOSA, 2007a).

Diante disto, a modelagem pode conferir uma dinâmica diferente às aulas de Matemática, pois se trata de um ambiente em que os alunos são responsabilizados pelo processo de investigação. Esse aspecto, aliado à discussão sobre a inserção da modelagem no currículo (BARBOSA, 2001; CALDEIRA, 2005), evidencia a necessidade de entendermos como se processa o desenvolvimento de modelagem nas salas de aula, em particular, como o professor a organiza e a conduz em sua prática pedagógica[3]. Portanto, é importante analisar a prática pedagógica dos professores nesse ambiente, visto que são eles os responsáveis pela sua inserção em sala de aula. Diante disso, a seguir, buscaremos discutir sobre as estratégias desenvolvidas por uma professora na condução do ambiente de modelagem, a fim de apontar resultados que podem ser utilizados nos processos de formação de professores.

Para desenvolver o foco do artigo, inspiramo-nos na grounded theory (CHARMAZ, 2006), cuja intenção é a de elaborar inferências teóricas

---

[1] No decorrer do texto, utilizaremos apenas a palavra *modelagem* para nos referirmos à modelagem matemática.

[2] *Ambiente de aprendizagem* (SKOVSMOSE, 2000) refere-se às condições propiciadas aos alunos para o desenvolvimento de uma atividade escolar.

[3] *Prática pedagógica* refere-se às relações entre professor e alunos no processo de ensino e aprendizagem.

fundamentadas nos dados coletados num determinado contexto e analisados indutivamente e no objetivo da pesquisa. Os dados constituem a fundamentação que orientou a presente pesquisa e sua análise gera conceitos que são construídos pelo pesquisador. Portanto, num primeiro momento não colocaremos muita ênfase na teoria de modo que permita a geração de categorias e teorias dos dados. Em vista disso, na próxima seção, localizamos o estudo nos resultados de pesquisas na literatura sobre modelagem e professores. Assim, em decorrência da grounded theory, os dados terão um papel mais ativo para alcançar o objetivo da investigação aqui relatada.

Modelagem matemática e os professores

A discussão sobre a inserção de modelagem na prática pedagógica do professor está diretamente relacionada à discussão sobre a formação dos professores especificamente voltada para o ambiente de modelagem. Como argumentou Lingefjärd (2007), a modelagem só será implementada na escola a partir do momento em que os professores tiverem contato com ela para que possam avaliar a sua relevância. Em Barbosa (1999), os professores apresentaram alguns argumentos que dificultaram a implementação de modelagem nas suas salas de aula. Dentre eles, destacamos a insegurança dos professores em atuar em um contexto no qual os alunos são requisitados para ter um papel ativo na prática pedagógica.

A literatura tem discutido a utilização de modelagem, apontando as maneiras como o professor pode implementá-la na sua sala de aula (ALMEIDA; DIAS, 2004; BARBOSA, 2001, 2003, 2006); as preocupações, os dilemas e as incertezas constituídas na condução desse ambiente (OLIVEIRA; BARBOSA, 2007a, 2007b; BLOMHØJ; KJELDSEN, 2006; DOER; ENGLISH, 2006); as demandas pedagógicas específicas para desenvolvê-la (DOERR, 2007) e as estratégias utilizadas para inseri-la em sala de aula (CHAPMAN, 2007).

Barbosa (2001, 2003, 2006) apresentou três maneiras para o professor organizar o ambiente de modelagem e as denominaram *casos 1, 2 e 3*. O autor classificou quatro atividades para seu desenvolvimento a elaboração da situação-problema, a simplificação, a coleta dos dados qualitativos e quantitativos e a resolução e caracterizou-as a partir da atuação do professor e dos alunos em cada uma delas. No *caso 1*, o professor apresenta um problema, fornecendo dados sobre ele e solicita aos alunos que o resolvam. No *caso 2*, o professor apresenta o problema aos alunos, já sugerindo um tema a ser investigado e encarregando-os da obtenção das informações necessárias para desenvolver a investigação. Por fim, no *caso 3*, o professor solicita que os alunos escolham um tema, coletem informações e formulem o problema para desenvolver a investigação. Nos três casos, o professor atua em todos os momentos, sendo que, do caso 1 para o caso 3, aumenta o grau de responsabilidade (e de autonomia) dos alunos, enquanto o professor passa a ter menor controle sobre o que acontece no ambiente de modelagem.

Essas diferentes maneiras possibilitam ao professor implementar a modelagem, adequando-se a diferentes contextos, de acordo com a sua própria *familiaridade*[4] com ela. No ambiente de modelagem, os alunos são os responsáveis pelas decisões a serem tomadas no processo de investigação, sob a orientação do professor. Em vista disto, ele terá que lidar com a imprevisibilidade quanto às ações dos alunos (OLIVEIRA; BARBOSA, 2007a, 2007b). Penteado (2001) utilizou a expressão *zona de risco* para se referir aos ambientes em que os professores lidam com a incerteza e a imprevisibilidade. Portanto, quando o professor implementa a modelagem em sua sala de aula, ele pode estar em uma *zona de risco*.

Oliveira e Barbosa (2007a) discutiram as incertezas que enfrenta um professor ao implementar a modelagem na sua prática pedagógica. Essas incertezas aconteceram em um determinado momento, quando o professor não soube como lidar com situações imprevistas, que surgiram no decorrer da condução do ambiente: ele hesitou quando as incertezas solicitaram a realização do próximo passo a ser desenvolvido. Por causa da tensão provocada pela própria dinâmica do ambiente, a situação foi denominada *tensão do próximo passo*.

Em outro estudo, Oliveira e Barbosa (2007b) abordaram as situações de tensão relacionadas com as questões formuladas pelos estudantes e as respostas a serem apresentadas, à indecisão diante das estratégias que poderia utilizar para desenvolver o ambiente de modelagem e à forma de obter o envolvimento dos alunos nas atividades.

Pela leitura desses estudos, é possível verificar que diferentes situações solicitaram ações e estratégias para lidar com as incertezas, os dilemas e as preocupações que constituíram as tensões.

Chapman (2007) apresentou duas estratégias utilizadas por professores para apoiar a inserção da modelagem em suas salas de aula: a primeira consistiu na aprendizagem sobre resolução de problemas, quando os estudantes tiveram que analisar os processos que utilizavam para resolver problemas, e, a segunda consistiu

---

[4] A palavra *familiaridade* é utilizada por Barbosa (2001, 2002) para expressar a relação dos professores com a modelagem.

em integrar problemas abertos nas atividades da disciplina. Doerr (2007) discutiu demandas pedagógicas para o professor no desenvolvimento da modelagem, tais como: aprender a lidar com a diversidade de respostas dos alunos; aprender a relacionar as respostas dos alunos com os conhecimentos matemáticos e estimular os alunos a explorarem a variedade de possibilidades diante do problema.

Uma importante ação do professor na prática da modelagem é buscar envolver os estudantes de forma que estes se sintam motivados a realizá-la, pois é importante que assumam o processo de investigação. Skovsmose (2000) denominou *convite* aos momentos em que o professor, através do diálogo, busca envolver os estudantes nas atividades, no decorrer da aula. O autor esclareceu que o convite pode ser ou não aceito pelos estudantes, a depender de suas prioridades no momento.

A partir do momento em que os estudantes aceitam o convite, é possível que eles, juntamente com o professor, discutam os objetivos e a forma de condução da atividade, criando o que Barbosa (2004) denominou *espaço de negociação* em um ambiente de modelagem. A não-aceitação do convite implica na necessidade de o professor desenvolver estratégias para envolver os alunos. No ambiente de modelagem, os momentos em que ocorre o encontro dos alunos e o do professor com os alunos para discutirem sobre os problemas propostos é denominado *espaço de interação* (BARBOSA, 2007b).

Leiß (2005) discutiu as intervenções que professores realizaram para auxiliar os estudantes a resolverem os problemas no ambiente de modelagem. Os resultados apontaram que as intervenções foram importantes para possibilitar que os estudantes entendessem o problema, encontrassem um modelo adequado para a situação e conseguissem refletir sobre o modelo encontrado. Além disso, destacou a importância do professor, quando necessário, introduzir conhecimentos referentes à situação para que os estudantes consigam prosseguir com a resolução do problema.

Como implicação desse estudo, observamos que o discurso do professor é fator condicionante na condução do ambiente de modelagem. Assim, os discursos produzidos nesse ambiente podem estar relacionados com a intencionalidade do professor e com as ações que são constituídas no próprio contexto em que acontece o ambiente de modelagem.

Uma das demandas para as pesquisas no âmbito da inserção da modelagem na sala de aula é buscar esclarecer sobre os discursos produzidos pelo docente e de que forma eles condicionam as ações dos estudantes e do próprio professor nesse ambiente. Assim, nosso objetivo é discutir as estratégias realizadas por uma professora ao desenvolver a modelagem em sua prática pedagógica. A palavra *estratégia* será utilizada para se referir às decisões tomadas para atingir um determinado objetivo.

Contexto

Os dados apresentados neste artigo foram coletados nas aulas da professora Bel[5], em uma escola da rede pública estadual, na cidade de Feira de Santana, na Bahia. A coleta dos dados se iniciou no mês de maio de 2007 e se estendeu até o término da implementação[6] da modelagem, no mês de outubro, numa turma em que Bel era docente.

A escolha deste contexto foi o contato com Bel, que integra, juntamente com as autoras deste artigo e outros participantes, desde março de 2007, o Grupo Colaborativo em Modelagem Matemática[7] (GCMM), sediado na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

O GCMM é um projeto de colaboração entre professores da educação básica, estudantes da Licenciatura em Matemática e docentes da UEFS para discutir o fazer modelagem em sala de aula. Nos encontros semanais, são elaboradas atividades de modelagem com temas sugeridos pelos participantes para serem aplicadas em sala de aula, a partir da disponibilidade dos professores. Após a implementação das atividades, acontecem os relatos e discussões das experiências realizadas.

Bel leciona há 18 anos, no Ensino Fundamental e Médio, exercendo as funções de professora efetiva da rede estadual na referida cidade. Em 2006, ela concluiu o curso de Licenciatura em Matemática do Programa de Formação de Professores de 5ª a 8 séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, oferecido pela Universidade Estadual de Feira de Santana em convênio com a Secretaria de Educação do Estado da Bahia, para professores que atuavam na rede estadual de ensino e não tinham o curso de Licenciatura.

Nesse curso, Bel teve contato com a modelagem, na disciplina Estágio Supervisionado III, ministrada pela primeira autora do artigo, desenvolvendo, em uma de suas turmas, o ambiente de modelagem. Esse teve como tema "O preço dos eletrodomésticos[8]", com o propósito de discutir em sala de aula as vantagens ou

5 Pseudônimo adotado para professora visando preservar a sua identidade.
6 No início de maio de 2007, a professora Bel começou a desenvolver o ambiente de modelagem em sua sala de aula. No entanto, após a primeira aula, ocorreu uma greve dos professores da rede estadual que se prolongou até julho do mesmo ano. Com isso, Bel retornou com o desenvolvimento de modelagem na sua prática pedagógica no mês de julho e a estendeu até outubro.
7 Atividade de extensão universitária, formalizada através da portaria CONSEPE/UEFS 120/2007, desenvolvida no âmbito do Departamento de Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana.
8 No início do ambiente de modelagem, Bel sugeriu o tema "O preço dos eletrodomésticos". Mas, nas duas primeiras aulas, os estudantes solicitaram que mudasse o tema para "O preço dos eletroeletrônicos", sendo aceito por Bel.

desvantagens em comprar a vista ou a prazo. O objetivo de Bel era trabalhar as dificuldades dos estudantes em relação às quatro operações e o conteúdo de juros.

Esta atividade foi desenvolvida em seis aulas, em uma turma de Regularização do Fluxo Escolar III, correspondente às 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, sendo observada pelas duas últimas autoras. A Regularização do Fluxo Escolar é um sistema adotado pela Secretaria de Educação para adequar a série à idade dos estudantes. Nele, os alunos cursam o equivalente a duas séries em um ano letivo. Esses alunos, em sua maioria, trabalham em turno oposto ao que estudam.

Metodologia

Em consonância com o objetivo da pesquisa, qual seja, analisar as estratégias utilizadas por uma professora na condução do ambiente de modelagem, a investigação é de natureza qualitativa (ALVES-MAZZOTI, 1998; DENZIN; LINCOLN, 2005), pois a intenção foi gerar uma compreensão sobre as estratégias utilizadas pela professora para desenvolver o ambiente de modelagem.

Os procedimentos utilizados na coleta dos dados foram a observação e as entrevistas semi-estruturadas. A observação ocorreu no ambiente natural em que os fatos aconteceram, ou seja, nos momentos em que a professora e os estudantes estavam desenvolvendo o ambiente de modelagem em sala de aula. Ela foi realizada de maneira não estruturada, visando compreender e descrever as situações observadas como aconteceram. As entrevistas foram realizadas para obter maior esclarecimento a respeito das ações da professora no ambiente de modelagem. Elas ocorreram após cada aula, ocasião em que a professora falou sobre sua experiência na inserção da modelagem na sua prática pedagógica. Para orientar as entrevistas, foi proposta a seguinte questão: “Como foi o desenvolvimento do ambiente de modelagem hoje?” Os dados foram coletados com a utilização de um gravador de voz e foram posteriormente transcritos para a realização da análise.

A análise das estratégias da professora foi realizada a partir dos discursos produzidos nas aulas e nas entrevistas. Esta análise inspirada nos procedimentos da *grounded theory* (CHARMAZ, 2006) foi desenvolvida em duas fases: na primeira, ocorreu a leitura linha por linha das transcrições da observação e das entrevistas e a codificação das estratégias utilizadas pela professora durante as aulas; e, na segunda, as estratégias foram reunidas em categorias mais gerais para discuti-las à luz da literatura.

As estratégias da professora no ambiente de modelagem matemática

A professora Bel iniciou o ambiente de modelagem solicitando aos estudantes uma pesquisa de preços em diferentes lojas para analisar as condições de pagamentos oferecidas. Ela organizou o ambiente de modelagem conforme o que Barbosa (2001, 2003, 2006) nomeia como *caso 2*, no qual o professor apresenta o problema e os estudantes coletam as informações e o investigam. O problema apresentado foi "Quais as vantagens e desvantagens de comprar a vista ou a prazo?" Nesta seção, apresentamos três categorias: *as estratégias para os momentos iniciais, as estratégias para possibilitar a coleta das informações e as estratégias para justificar o objetivo do ambiente de modelagem.* Essas são apresentadas a partir de trechos dos discursos produzidos nas aulas e nas entrevistas, os quais evidenciam as estratégias utilizadas pela professora Bel na implementação de modelagem na sua prática pedagógica.

As estratégias para os momentos iniciais

A seguir, apresentaremos dados referentes ao momento em que a professora realizou o convite inicial[9] no ambiente de Modelagem.

Bel: *Quem já foi a alguma loja com a mamãe para comprar uma geladeira ou comprar um fogão ou comprar um tênis ou comprar um sapato? Quem já foi aqui? Quem já foi ao vivo e em cores na loja aqui?*

Bel tentou explicar aos estudantes que o tema da atividade é familiar a eles, ou seja, foi uma estratégia para justificar sua importância, em virtude de ser um tema relacionado ao dia-a-dia deles. Eles responderam que compravam produtos eletrônicos e roupas, utilizando as formas de pagamentos à vista e a prazo. O próximo trecho sinaliza como Bel organizou os estudantes para a coleta das informações nas lojas:

Bel: *A partir de agora, já que vocês aceitaram o convite. Quantos alunos aí vão até as lojas?* **[...]** *Quantos alunos vão fazer esse trabalho? 1, 2, 3, 4,* **[...]** *9 alunos. E os demais, porque não querem aceitar o trabalho? Qual o motivo?*

Ela organizou a turma em equipes e solicitou que eles escolhessem dez

[9] Refere-se aos primeiros momentos em que o professor comunica aos alunos que eles irão investigar uma situação proveniente do dia-a-dia ou de outras áreas do conhecimento.

itens para realizarem a pesquisa de preços em quatro lojas, escolhidas por deles. A princípio, Bel esperava que os estudantes se envolvessem na atividade, como relatou na entrevista: *"Agora, o que mais me surpreendeu no convite, logo de primeira, foi que a maioria da turma disse: 'Professora, eu não tenho tempo'"*. A partir desse momento, ela observou que havia uma resistência[10] deles em desenvolver a coleta das informações e procurou saber o porquê da resistência: *"Porque não tem tempo? Um estudante respondeu: 'Porque a gente trabalha meio turno das sete as doze. Então, nosso tempo é muito curto"* (ENTREVISTA).

Os estudantes disseram que teriam dificuldades para realizar a coleta das informações, pois ocorreria em um horário extra às aulas de matemática. Como alguns deles trabalhavam no turno oposto ao que estudavam, não seria possível fazer a coleta das informações. Na entrevista, ela explicou como procedeu para que os estudantes aceitassem o convite: *"A partir do momento em que foi relatado que eles iriam trabalhar em grupos,* [*que*] *essa divisão seria feita com aqueles alunos, de quatro em quatro: dois trabalhariam e dois não trabalhariam, para que realizassem o trabalho. Então, eles aceitaram o convite, mas, de imediato, houve uma rejeição"* (ENTREVISTA).

No extrato abaixo, Bel informou aos estudantes qual seria a organização das equipes para viabilizar a coleta das informações para o desenvolvimento da atividade.

Bel: *De que maneira vamos trabalhar para que todos participem? Vamos trabalhar em equipes, nas quais vamos reunir aqueles alunos que não trabalham com aqueles que trabalham. Por quê? Porque nós vamos fazer isso? Com o objetivo de que todos participem do trabalho.*

Quando Bel observou que os estudantes argumentaram que não participariam da coleta das informações, ela prosseguiu com a organização das equipes, responsabilizando os estudantes que não trabalhavam pelo processo de coleta das informações e os agrupando de maneira que todos os grupos tivessem integrantes responsabilizados por essa etapa. Esta foi à estratégia utilizada para superar sua resistência diante da coleta das informações nas lojas.

As estratégias para possibilitar a coleta das informações

Bel relatou como ocorreu o momento reservado na segunda aula, na qual os estudantes apresentariam a pesquisa sobre os preços dos eletroeletrônicos. Esta aula não aconteceu da maneira prevista por Bel, pois os estudantes não realizaram a coleta das informações, o que era fundamental para prosseguir com a atividade.

> *Então, quando eu comecei a questionar: cadê o trabalho para a gente retomar? Observei que eles, realmente, não trouxeram o que foi solicitado da proposta da aula anterior* [...]. *Com isto, foi inviável continuar o trabalho* [...]. *Então, pedi aos alunos que eles trouxessem as atividades na próxima aula para darmos continuidade e que seria a avaliação deles, se não, eles iriam perder ponto. É uma maneira [em] que a gente pressiona de qualquer forma os alunos a fazerem as atividades* (ENTREVISTA).

Diante da ausência da coleta das informações dos estudantes, Bel utilizou as seguintes estratégias: adiar o prazo para os estudantes realizarem a coleta das informações e relacionar a atividade à produção de uma nota. A primeira estratégia caracteriza uma tentativa de prosseguir com a proposta do trabalho. A segunda foi utilizada com o propósito de garantir que os estudantes a realizariam, pois foi vinculada a uma avaliação.

Na aula seguinte, Bel solucionou o problema relativo à coleta das informações pelos estudantes, trazendo panfletos[11] de propaganda para a sala de aula. Esses panfletos tinham as informações necessárias para a realização da pesquisa: *"A estratégia melhor foi trazer os panfletos para escola para que pudéssemos desenvolver a atividade"* (ENTREVISTA). Essa estratégia possibilitaria a realização da atividade, já que a resistência deles estava relacionada ao processo de coleta das informações. No trecho abaixo, Bel justificou a estratégia utilizada:

> *Esse processo de investigação através dos folders ... Porque, na realidade, o primeiro momento em que solicitei dos alunos que eles fossem às lojas fazerem essa pesquisa ... Como são alunos que trabalham e moram na zona rural, porque são alunos de classe baixa, eles trabalham realmente.* [...] *Então, como a maioria é do sexo masculino, e realmente, eu perguntei se cada um tinha um trabalho, uns eram lavadores de carro, outros eram jardineiros, outros eram pintores, outros eram ajudantes de pedreiro.* [...] *Então, são alunos que trabalham, são alunos que não moram com os familiares, são alunos que moram em outras localidades e têm dificuldade de difícil acesso de fazer essa pesquisa. A estratégia melhor foi trazer os*

[11] Os panfletos mencionados pela professora são folders distribuídos por lojas com propaganda de produtos, constando preços e formas de pagamento.

> *panfletos para a escola para que pudéssemos desenvolver essa atividade pesquisando os preços dos produtos eletroeletrônicos com o objetivo de trabalhar os preços a prazo e os preços a vista. Então, houve essa dificuldade no primeiro momento. Então, decidimos levar os folders* (ENTREVISTA).

Bel apontou que a justificativa dos estudantes interferiu na condução do ambiente de modelagem, pois, para viabilizar o desenvolvimento da atividade, ela trouxe as informações e a relacionou a uma avaliação.

As estratégias para justificar o objetivo do ambiente de modelagem

A seguir, o trecho ilustra como Bel tentou explicar o objetivo do trabalho e o direcionamento para o seu propósito com a investigação: as vantagens e desvantagens de comprar a vista e a prazo. Além disso, ela comentou sobre a importância da atividade, a partir dos resultados apresentados pelos próprios estudantes, referindo-se à idéia de juros.

Bel: *E o nosso objetivo é o quê, gente? Verificar o quê? O preço dos produtos, e observar se é melhor comprar a vista ou a prazo? Por que é que a gente compra a prazo e por que é que a gente compra a vista?*

Bel: *Olha como está importante essa aula. Vocês estão identificando o preço à vista e o preço a prazo. Já está dando para notar as diferenças. Quanto mais meses, mais aumenta o quê? O que é que está aumentando aí?*

Paulo[12]**:** *Os juros.*

Nos trechos anteriores, a estratégia utilizada por Bel foi justificar o motivo da realização da atividade aos estudantes, a saber: aprender as formas de pagamentos, associando as condições de cada pessoa e as diferenças entre os preços de compras a vista e a prazo.

A reformulação das estratégias

A seguir, apresentamos um trecho do diálogo entre Bel e um aluno, ocorrido na terceira aula, na qual eles discutiram as conseqüências para quem não

12 Para preservar a identidade dos estudantes utilizamos pseudônimos.

participar da atividade. Bel ressaltou que os materiais necessários para a realização da atividade estavam com os estudantes. Portanto, não havia justificativa para deixar de desenvolvê-la. Neste trecho, podemos observar que Bel, inicialmente, tentou garantir que os estudantes participassem condicionando a atividade a uma avaliação. Mas, diante da reação dos estudantes, ela teve que mudar sua estratégia para conseguir que eles participassem.

Antônio: *E* **[***para***]** *quem não fizer, vai acontecer o quê?*

Bel: *O que você acha? Se a gente faz um trabalho, todos estão pesquisando, todos estão fazendo. O que é que você acha que faz, com o aluno que não faz?*

Antônio: *É que estava em greve e a gente voltou com a cabeça doida.*

Bel: *Não, não tem nada disso. Já equilibrou tudo. Tudo está equilibrado. Tem material, tem cartolina, tem régua, os estudantes estão com os panfletos das lojas. Então, não justifica.*

[...]

Bel: *Você está em que grupo? Você que chegou agora, está em que grupo?* **[Bel questionou um aluno que chegou após o início da atividade]**

Antônio: *A senhora falou que quem não trouxesse não ia entrar na sala.*

Bel: *Mas, todos estão com o trabalho. Mas, hoje, nós trouxemos todas as informações das lojas, os panfletos, e estão todos fazendo.*

A justificativa de Antônio por não participar da atividade parece ser conseqüência do seu entendimento sobre uma das estratégias utilizada por Bel para garantir a participação dos estudantes. A seguir, um trecho que evidencia que a estratégia da professora ao relacionar a atividade como uma avaliação, interferiu no envolvimento dos estudantes na atividade.

Eduardo: *Professora, isso vale quantos pontos?*

Maurício: *Dois. Não é?*

Bel: *Primeiro, o objetivo da gente é nossa aprendizagem, não é?*

André: *É.*

João: *Mas, a senhora falou pra mim que é três.*

No decorrer das aulas, algumas ações dos estudantes foram condicionadas por estratégias desenvolvidas por Bel. Essas ações, quando foram avaliadas de maneira inadequada por ela, apresentaram-se como situações que implicaram no desenvolvimento de novas estratégias, na tentativa de anular as anteriores, ou seja, como uma reformulação das estratégias anteriores.

Discussões

Na seção anterior, apresentamos dados referentes às estratégias de Bel no desenvolvimento do ambiente de modelagem. A professora utilizou as seguintes estratégias: *as estratégias para os momentos iniciais, as estratégias para possibilitar a coleta das informações e as estratégias para justificar o objetivo do ambiente de modelagem.* Essas estratégias utilizadas pela professora tiveram como objetivos: justificar a importância da atividade, viabilizar o desenvolvimento da atividade e envolver os estudantes.

Bel justificou a importância da atividade, instigando os estudantes a resgatarem as situações do seu cotidiano e, a partir disto, relacionou-as com o objetivo da atividade: entender as formas de pagamentos a vista e a prazo. Essa estratégia foi utilizada com o propósito de envolver os estudantes no momento do convite inicial. Ela, novamente, referiu-se à importância da atividade, no momento em que os estudantes se envolveram na investigação. Essas estratégias da professora podem ser entendidas como uma tentativa de legitimar a atividade para os estudantes, visto que não se tratava de um ambiente de aprendizagem familiar nas suas aulas.

Outras estratégias, constituídas a partir das situações que aconteceram no decorrer nas aulas, tiveram como propósito possibilitar a sua realização. Quando os estudantes apresentaram resistências em coletar as informações para desenvolver o problema proposto, a professora buscou entender quais eram seus motivos e criou as seguintes estratégias: agrupar os estudantes em equipes, para que houvesse integrantes responsabilizados pela coleta das informações; alterar o prazo para os estudantes realizarem a pesquisa das informações nas lojas; relacionar a atividade à produção de uma nota e trazer panfletos de propaganda para viabilizar a coleta das informações pelos estudantes.

A justificativa dos estudantes para as dificuldades de realizar a atividade a falta de tempo pode ter sinalizado sua não-aceitação do convite para desenvolvê-la (SKOVSMOSE, 2000). Essa é uma situação em que a professora desenvolveu o ambiente de modelagem lidando com acontecimentos não previstos, o que caracterizou esse ambiente como uma zona de risco para ela (PENTEADO, 2001). As situações imprevistas que aconteceram nas aulas, quando a professora implementou a modelagem, requisitaram a produção de *estratégias emergenciais*, não planejadas a *priori*, para possibilitar o seu desenvolvimento. Elas foram produzidas durante o ambiente de modelagem e estiveram ligadas às dificuldades do professor para envolver os estudantes (OLIVEIRA; BARBOSA, 2007b).

As estratégias adotadas por Bel foram elaboradas no desenvolvimento do ambiente de aprendizagem, enquanto as estratégias utilizadas pelos professores da pesquisa de Chapman (2007) foram desenvolvidas em momentos anteriores à implementação da atividade em sala de aula. As estratégias emergenciais possibilitaram o desenvolvimento da atividade na prática da professora Bel, enquanto as estratégias dos professores da investigação de Chapman (2007) facilitaram a inserção da modelagem na sala de aula.

Assim como no estudo de Leiß (2005), em que as intervenções dos professores foram importantes para viabilizar o entendimento do problema pelos estudantes no ambiente de modelagem, no nosso estudo, as estratégias construídas por Bel foram importantes para viabilizar a participação dos estudantes na atividade. Como implicação, verificamos que as estratégias e as intervenções utilizadas no decorrer da implementação da modelagem são aspectos importantes para que o professor consiga realizá-la em sua prática pedagógica.

Considerações Finais

Este estudo teve como objetivo analisar as estratégias utilizadas por uma professora na implementação da modelagem. Para tanto, consideramos os discursos da professora no momento em que ela desenvolveu o ambiente e nas entrevistas realizadas após cada aula.

No ambiente de modelagem, a professora lidou com situações imprevistas que geraram dificuldades que poderiam interromper a realização da atividade. Essas dificuldades foram superadas com a elaboração de estratégias emergenciais, construídas pela professora Bel, no contexto particular das aulas, para justificar a importância do trabalho e viabilizar o desenvolvimento do ambiente de modelagem na sua sala de aula.

As situações da prática de Bel, ilustradas neste artigo, podem auxiliar a prática de professores ou futuros professores no desenvolvimento do ambiente de modelagem, uma vez que eles podem vivenciar situações semelhantes a estas em suas práticas pedagógicas.

A partir da discussão posta neste artigo, apontamos demandas para as pesquisas que enfocam a prática pedagógica do professor no ambiente de modelagem, especificamente, quantos às estratégias adotadas no desenvolvimento das atividades, tais como realização de investigações, das situações que podem demandar a produção de novas estratégias e/ou a reformulação daquelas já planejadas pelo professor.

Agradecimentos

Agradecemos aos professores, colegas, pesquisadores da Universidade Estadual de Feira de Santana, pelos comentários às versões preliminares deste artigo, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB, processo APR0059/2007) e ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Feira de Santana (PROBIC/UEFS 01/2006), pelo apoio financeiro aos projetos de pesquisa que este artigo está relacionado.

Referências

ALMEIDA, L. M. W; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método das ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998. cap. 6-7, p. 129-178.

BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.

______. **Modelagem matemática**: concepções e experiências de futuros prfessores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

______. Modelagem matemática e os futuros professores. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2002. 1 CD-ROM.

______. What is mathematical modelling? In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Ed.). **Mathematical modelling**: a way of life ICTMA 11. Chichester: Horwood Publishing, 2003. p. 227-234.

______. Modelagem matemática em cursos para não-matemáticos. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 63-83.

______. Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

______. A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007a. p. 161-174.

______. Teacher-student interactions in mathematical modelling. In: HAINES, C. et al (Ed.). **Mathematical modelling**: education, engineering and economics (ICTMA12). Chichester: Horwood Publishing, 2007b. p. 232-240.

BLOMHØJ, M.; KJELDSEN, T. H. Teaching mathematical modelling through project work. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 38, n. 2, p. 163-177, 2006.

CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática e suas relações com o currículo. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Feira de Santana. **Anais...** Feira de Santana: UEFS, 2005. 1 CD-ROM.

CHAPMAN, O. Mathematical modelling in high school mathematics: teachers' thinking and practice. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.; NISS, M. (Ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**: the 14th ICMI study. New York: Springer, 2007. p. 325-332.

CHARMAZ, K. **Constructing Grounded Theory**: a practical guide through qualitative analysis. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2006. 208 p.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.). **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2005. p. 1-32.

DOERR, H. What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.; NISS, M. (Ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**: the 14th ICMI study. New York: Springer, 2007. p. 69-78.

DOERR, H. M.; English, L. D. Middle grade teachers' learning through students' engagement with modelling tasks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, New York, v. 9, p. 5-32, 2006.

JULIE, C.; MUDALY, V. Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.; NISS, M. (Ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**: the 14th ICMI study. New York: Springer, 2007. p. 503-510.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international of perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

LEIß, D. Teacher intervention versus self-regulated learning? **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxford, v. 24, n.2-3, p. 75-89, 2005.

LINGEFJÄRD, T. Modelling in teacher education. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.; NISS, M. (Ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**: the 14th ICMI study. New York: Springer, 2007. p. 475-482.

OLIVEIRA, A. M. P.; BARBOSA, J. C. As situações de tensão e as tensões na prática de Modelagem: o caso Vitória. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFOP/UFMG, 2007a. 1 CD-ROM, p.191-206.

______; ______. A primeira experiência de modelagem matemática e a tensão do "próximo passo". In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Recife: SBEM, 2007b. 1 CD-ROM.

PENTEADO, M. G. Implicações para a prática docente. In: BORBA, M. G.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. cap. 4, p. 53-68.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. Bolema - **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

______. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007. 304p.

Submetido em julho de 2008.
Aprovado em novembro de 2008.

Análise Combinatória: Experiências de sala de aula[1]

Clarissa Trojack Della Nina
Professora, IEE Vasconcelos Jardim e ULBRA - São Jerônimo
clarissatrojack@gmail.com

Maria Elvira Jardim Menegassi
Professora, Colégio Dom Bosco
elvira4@terra.com.br

Mercedes Matte da Silva
Professora, Colégio Farroupilha
mercedesmatte@terra.com.br

Resumo
O presente trabalho pretende relatar uma experiência vivida pelo grupo de pesquisa Matemática na Educação – PUCRS envolvendo o estudo de Análise Combinatória, pois se percebeu que em geral, professores e alunos têm dificuldades em tratar esse assunto. Iniciamos com a fundamentação, elaboração, aplicação, análise e por fim as conclusões. O objetivo do grupo foi criar maneiras diferentes das encontradas nos livros didáticos para introduzir e trabalhar o assunto. Para alcançar esse objetivo, foi utilizado objetos de aprendizagem, formado por fichas e materiais confeccionados pelo próprio grupo e foi aplicado em duas turmas de segundo ano do ensino médio.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Agrupamentos. Pesquisa. Material concreto. Objetos de aprendizagem.

Combining Analysis: Experiments in the classroom

Abstract
This paper intends to report an experience by the research group in Mathematics Education - PUCRS involving the study of Combinatorial Analysis, because it realized that in general, teachers and students have difficulty in dealing with this matter. We started with the rationale, design, implementation, analysis and finally the conclusions. The aim of the group was set up in different ways from those textbooks and work to introduce the subject. To achieve this goal, was used for learning objects, consisting of chips and materials prepared by the group and was applied to two classes of second year of high school.

Keywords: Combinatorics. Analysis Groupings. Search. Material concrete. objects of learning.

[1] Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Grupo de Pesquisa: Matemática na Educação (PUC-RS) (http://dgp.cnpq.br/buscaoperacional/detalhegrupo.jsp?grupo=00061017MMXWO8). Colaboraram com esse estudo: Carmem Regina Jardim de Azambuja, Ms PUCRS – cazambuja@pucrs.br; Gertrudes Regina Todeschini Hoffmann, Ms PUCRS – gertrudes@pucrs.br Mara Lúcia Muller Botin, Ms PUCRS – mbotin@pucrs.br Neuza Maria Morejano Maia Colégio Santa Cecília – Especialista em Fundamentos e Análise Matemática nmmmaia@terra.com.br Silvana Lumertz Model, Ms Escola Nossa Senhora do Brasil – slmodel@terra.com.br Vera Martins Lupinacci, MsPUCRS – lupinacci@pucrs.br.

Introdução

Trabalhar com Análise Combinatória sempre foi um desafio para professores e alunos do Ensino Médio. Encontrar formas diferenciadas de trabalhar esse conteúdo pareceu uma alternativa que poderia alterar esta realidade e tornou-se um desafio para o grupo de pesquisa Matemática na Educação – PUCRS.

O grupo de pesquisa iniciou o trabalho discutindo sobre o ensino da Análise Combinatória nas escolas e analisando a forma como os livros didáticos apresentam esse tema. Geralmente, eles iniciam com um problema de contagem que é resolvido utilizando a árvore das possibilidades e em seguida apresentam o Princípio Fundamental da Contagem e os principais métodos: Arranjo, Permutação e Combinação. Assim, quando o tema é apresentado desse modo, não é necessária a análise do problema, pois é definido o conceito de Arranjo e em seguida sugeridos problemas que serão resolvidos com a fórmula desse agrupamento. Da mesma forma trabalham Permutação e Combinação. Os alunos resolvem os problemas sem precisar pensar sobre eles, pois basta aplicar os números dados nos seus devidos lugares nas fórmulas. Entretanto, quando os problemas estão misturados, numa prova, por exemplo, o resultado é desastroso, pois o aluno não diferencia os métodos de contagem e não identifica o tipo de agrupamento.

O grupo levantou alguns questionamentos sobre o ensino da Análise Combinatória, embasado nas suas práticas pedagógicas no intuito de direcionar a pesquisa. Se os alunos trabalham com a resolução de problemas durante sua vida escolar, por que apresentam tantas dificuldades na solução dos problemas da Análise Combinatória? Pode-se afirmar que ser bom leitor e fazer interpretações na língua portuguesa facilita a interpretação de problemas? Que estratégias precisam ser adotadas para mudar o quadro de insucessos no ensino da Análise Combinatória? Após essa discussão, o grupo focou sua pesquisa na seguinte pergunta:

O uso de novas metodologias para o ensino de Análise Combinatória pode contribuir para melhorar a compreensão desse assunto?

A discussão avançou no sentido de tentar estruturar o ensino da Análise Combinatória de forma significativa e sem a aplicação direta de fórmulas.

A Análise Combinatória, pensada a partir das experiências do aluno, facilita a construção do seu conhecimento, pois ele desenvolverá esquemas que o levarão a resolver situações mais complexas.

Os autores CARRAHER, CARRAHER, SCHLIEMANN (1989) escrevem:

> Trabalhos anteriores na área das operações aritméticas revelam que a instrução escolar limita-se, freqüentemente, à transmissão de procedimentos, e não à análise de problemas. Observações não sistemáticas de aula sobre Análise Combinatória mostram que o ensino escolar limita-se quase sempre ao treinamento no uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjos, combinações ou permutações entre elementos, sem que os alunos derivem essas fórmulas a partir da manipulação dos elementos. (p. 87).

Os autores sugerem que para a aprendizagem ser significativa no ensino da Matemática, é preciso constante problematização, levando o aluno a refletir, ter sua linha de pensamento e ser persistente na busca de soluções. O estudo da Análise Combinatória não deve limitar-se ao uso de fórmulas e regras, e sim levar à descoberta de uma metodologia própria adequada na identificação da situação-problema.

Análise Combinatória

Desde o início do ato de contar, é possível encontrar problemas envolvendo números, como por exemplo:

> Um chefe de tribo na África foi condenado pelo tribunal colonial à entrega de 20 búfalos. Alguém manifestou sua estranheza sobre o rigor do castigo. Muito admirado perguntou o chefe da tribo: "Mas é tanto assim?" e ao mesmo tempo tirou de sua bolsa 20 grãos de café, cada um correspondendo a um búfalo. Dando-se conta assim, no sentido mais verdadeiro, da quantidade exigida, ficou horrorizado com o castigo imposto (KARLSON, 1961, p. 8).

O exemplo evidencia como o conjunto auxiliar serve para tornar imaginável o número, sem isto inconcebível, e como se pode, por meio dele, avançar passo a passo no reino incógnito dos números. O processo permite ir imediatamente mais longe.

Ao estudar a história da Análise Combinatória, observa-se que, como em outros conteúdos da Matemática, não existe só uma pessoa que tenha estudado o assunto, e muito menos uma única nação. Essa história inicia no surgimento do homem na Terra, portando-se como ser curioso e querendo entender e dominar o que o cerca.

De acordo com Guelli (2004, p.394), a Análise Combinatória é um ramo da Matemática relacionado com o modo como são selecionados os elementos de um conjunto. Na Matemática chinesa, por volta do ano 2200 a.C., encontram-se traços da Combinatória ligada ao misticismo dos números, e na Índia medieval, os matemáticos trabalhavam com agrupamentos que hoje são chamados de permutações e combinações.

Conforme o mesmo autor:

> Na obra do matemático e astrônomo Akaria Bhaskara (1114 – 1185), nascido no sul da Índia de uma família culta e tradicional, encontramos este problema: "Em um agradável, espaçoso e elegante edifício, com 8 portas, construído por um hábil arquiteto para servir de palácio para o senhor da Terra, diga-me a combinação de entradas consideradas de uma em uma, duas em duas, três em três, e assim continuando." Ele simplesmente registra os resultados assim: 8 : 1 = 8; (8.7) : 2 = 28; (8.7.6) : 6 = 56; .... que, hoje, significa: C8,1; C8,2; C8,3; ..... e dá como resultado, 255, a soma de todas as possibilidades (2004, p. 394).

Na Europa Ocidental, o interesse pela Análise Combinatória surgiu nos séculos XVII e XVIII, estimulado pela criação e desenvolvimento da Teoria da Probabilidade desenvolvida por Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), entre outros.

A solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas de enunciado simples revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Trabalhar com a Análise Combinatória por meio de resolução de problemas, destacando aqueles que utilizam fatos e situações que tenham significado ao aluno, é uma forma de desmistificar esse conteúdo. Observa-se que os alunos utilizam o pensamento combinatório, por exemplo, quando elaboram tabelas de jogos de futebol, sem nenhum conhecimento do conteúdo matemático, e o fazem de forma bem eficiente, desde muito cedo. Sendo assim, o aluno consegue resolver diversas situações através de suas experiências prévias com pouca ou nenhuma interferência do professor. Isto não significa que a sistematização do conteúdo não venha a acontecer, mas inicialmente o aluno é capaz de resolver situações da Combinatória sem a apresentação de fórmulas e regras. A resolução de problemas favorece ao aluno o desenvolvimento de seu potencial cognitivo, construindo conceitos e trabalhando habilidades que o ajudarão na formação de suas estruturas de pensamento.

A resolução de problemas leva o aluno à superação de obstáculos, pois exige busca de conhecimentos já adquiridos e mobilização de recursos internos que o levem a refletir sobre os questionamentos propostos a fim de tomar a decisão correta na solução. A diversidade de situações propostas pelo professor na resolução de problemas busca relacionar um grande número de idéias matemáticas que estão contidos nele, e construir relações entre essas idéias, ajudando o aluno a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias. Formular problemas contextualizados e adequados ao ensino da Análise Combinatória reflete uma nova perspectiva de ensinar e aprender, exigindo do aluno uma postura cada vez mais reflexiva, com a qual possa argumentar e aplicar seu conhecimento em novas situações de aprendizagem. De acordo com Huete e Bravo:

> Consideração importante acerca da resolução de problemas é sua descontextualização. Quando se redigem problemas distantes da realidade mais imediata do aluno, carente de interesse por seu conteúdo, é fácil que o desânimo domine com rapidez. [...] (2006, p.73).

Os autores afirmam que resolver problemas vai muito além:

> O objetivo da resolução de problemas não é a busca particularizada de uma solução específica, mas o ato de facilitar o conhecimento das habilidades básicas, os conceitos fundamentais e a relação entre ambos. É desenvolver naturalmente habilidades para resolver, mediante determinadas categorias, uma gama de problemas (2006, p.73).

Nessa perspectiva de diversificar problemas, o aluno fará "idas e vindas" na resolução deles, nas quais serão exploradas possibilidades e levantadas hipóteses, para que assim possa justificar seu raciocínio e chegar à validação de suas respostas.

De acordo com Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998, p. 86-87) para resolver um problema de Combinatória, é preciso postura, divisão e o não-adiamento de dificuldades. Entende-se por:

- Postura: colocar-se no papel da pessoa que deve resolver o problema.
- Divisão: dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, sempre que possível.
- Não-adiamento de dificuldades: a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar deverá ser sempre a mais restrita.

Os mesmos autores fazem uma análise da resolução do problema: *"Quantos são os números de três dígitos distintos?"* Assumir a postura da pessoa que deve escrever o número de três dígitos. Dividir as tarefas pode tornar as coisas mais simples: começando-se a escolha dos dígitos pelo último dígito, há 10 modos para esse dígito, 9 modos para o dígito central, e um impasse para o primeiro dígito: se não tiver sido usado o zero, há 7 modos, pois no primeiro dígito não se pode usar o zero, nem os dois números já utilizados, porém se já foi usado o zero, então existem 8 modos. Não adiar dificuldades significa, neste exemplo, que se deve tomar primeiro a decisão quanto ao primeiro dígito, que é mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser igual a zero.

Os autores acima apresentam cinco mandamentos para se ter êxito na resolução de problemas de Combinatória:

> 1. Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as idéias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o Princípio Básico da Contagem por fórmulas de arranjos, permutações e combinações têm dificuldade de resolver problemas simples.
>
> 2. Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.
>
> 3. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas, e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos.
>
> 4. Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente.
>
> 5. Um processo seguro de tornar as coisas mais complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações? (1998, p.111-112).

Os autores em seus cinco mandamentos conseguem mostrar o que de fato é necessário para a resolução de um problema combinatório, sem que o aluno seja um mero aplicador de fórmulas. Também é possível observar o quanto a interpretação do problema influi na sua solução, ainda mais nos casos em que é preciso verificar as prioridades em cada situação.

De posse dessa fundamentação elaboramos e aplicamos materiais didáticos com o intuito de romper a forma como é ensinado tradicionalmente o estudo de Análise Combinatória.

Apresentação do Material

A seguir apresentamos os problemas elaborados pelo grupo. Tivemos o cuidado para que fossem relacionados com o cotidiano do aluno e que apresentassem diferentes graus de dificuldade. Cada problema acompanha um conjunto de objetos que têm por finalidade auxiliar na sua resolução. Os objetos são soltos e de possível manipulação. Foram confeccionamos em cartolina e cobertos com papel contact para aumentar a durabilidade.

Problema 1:

Bruna participará da festa que está sendo organizada por sua turma da Escola, mas ainda não decidiu como irá vestida. Ela retirou de seu armário duas calças, dois casacos e um par de botas. De quantas maneiras diferentes ela poderá vestir-se para a festa?

Problema 2:

Bruna participará da festa que está sendo organizada por sua turma da escola, mas ainda não decidiu como irá vestida. Ela retirou de seu armário duas calças, três casacos e dois pares de botas. De quantas maneiras diferentes ela poderá vestir-se para a festa?

Problema 3:

Distribuir para os três torcedores as camisas do Grêmio, Internacional, São Paulo e Santos.

a) De quantas maneiras diferentes podemos fazer esta distribuição?
b) Em quantas destas o torcedor de boné vermelho está com a camisa vermelha do Internacional?
c) Em quantas destas o torcedor de boné vermelho está com a camisa do Internacional e o de bermuda azul está com a camisa do Grêmio?
d) Se os três torcedores recusaram a camisa do São Paulo, de quantos modos podemos distribuí-las?

Problema 4:

Dispondo das frutas laranja, maçã, abacaxi, melão e mamão, de quantas maneiras diferentes podemos preparar uma salada de fruta:

a) usando três frutas diferentes?
b) usando três frutas sendo que uma delas é laranja?
c) usando três frutas mas não escolhendo abacaxi?
d) usando quatro frutas?
e) usando as cinco frutas?

Problema 5:

Camila, Paula e Tiago foram ao cinema e sentaram todos na mesma fila. Após algum tempo resolveram trocar de lugar, entre si.

a) De quantas maneiras eles podem sentar?
b) Sabendo que Paula quer ficar junto com Tiago, de quantas maneiras diferentes os três podem sentar?

Problema 6:

LANÇAMENTO DE DADO E MOEDA

C (cara): a face onde consta o número;
K (coroa): a face onde consta a figura;
MATERIAL: um dado e uma moeda;
PROBLEMA:
Lançando simultaneamente um dado e uma moeda:

a) quais e quantos são os possíveis resultados?
b) em quantos desses resultados a face do dado tem um número par?
c) em quantos desses resultados a face do dado tem o número quatro?
d) em quantos desses resultados a face da moeda é cara?

Problema 7:

FIGURAS GEOMÉTRICAS

MATERIAL: seis quadrados; seis triângulos; seis círculos; seis retângulos
PROBLEMA:
Um código é formado por figuras geométricas em seqüência. Com um quadrado, um triângulo, um retângulo e um círculo, queremos formar códigos diferentes.
Quantos códigos diferentes podemos montar:

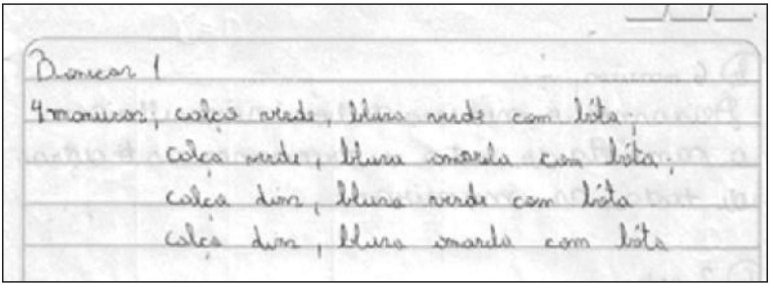
a) com três figuras distintas?
b) com três figuras distintas com o círculo no centro?
c) com três figuras, sendo o quadrado e retângulo colocados nas extremidades?
d) com as quatro figuras?

Aplicação do material e análise

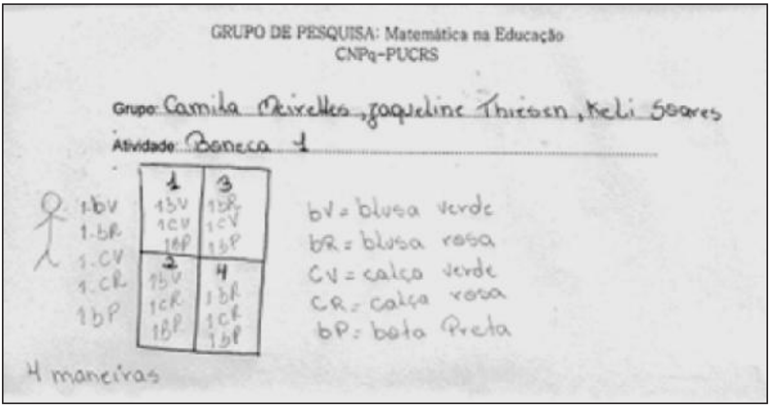
Após a confecção do material, o próximo passo foi à aplicação do mesmo. O material foi aplicado numa escola pública no município de General Câmara/RS em duas turmas de segundo ano do Ensino Médio, perfazendo um total de 34 alunos. Foram utilizadas quatro horas aula para a aplicação e discussão com os alunos. Os estudantes envolvidos não tinham conhecimento formal sobre o conteúdo de Análise Combinatória.

Foi solicitado que os mesmos se reunissem em pequenos grupos de duas ou três pessoas para ler, interpretar e solucionar os problemas propostos, usando o material, caso julgassem necessário. Nos problemas elaborados, foram levados em conta os diferentes tipos de pensamento que o aluno realiza na busca das soluções.

O objetivo, em cada problema, foi fazer com que o aluno notasse que não é necessário enumerar todas as possibilidades para que se possa saber a sua totalidade, e também, que percebesse que, em alguns casos, a troca de posição do elemento faz com que se tenha um novo agrupamento e, em outros, o agrupamento não se modifica. Esperava-se que os alunos construíssem a árvore das possibilidades e que posteriormente usassem o processo multiplicativo, mas no início, isto não aconteceu. Os estudantes descreveram todas as situações possíveis como mostra o registro abaixo no qual é possível perceber a descrição de todas as possibilidades para chegar ao resultado.

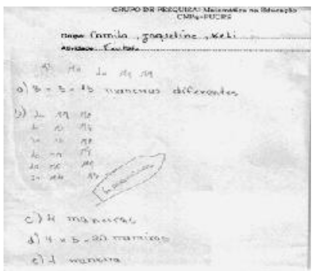


Já no registro desse outro grupo, referente ao problema **1**, pode-se observar que foi utilizado um esquema, talvez para facilitar a contagem das possibilidades.

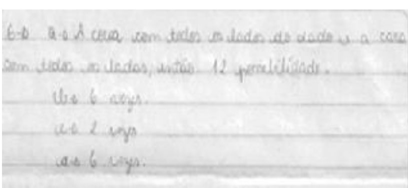


No problema 3, registrado a seguir, o grupo de alunos fez a descrição completa de todas as possibilidades no item a, entretanto, para responder aos outros itens os alunos partiram deste quadro geral. A fotografia mostra um aluno do grupo “vestindo” as camisetas nos jogadores, possivelmente para auxiliar o seu raciocínio.

Este outro grupo usou o Princípio Multiplicativo, na solução do problema **4**, para resolver o item *a*, não levando em conta que trocar a ordem das frutas faz com que a salada seja a mesma. Entretanto, no item *b* o grupo já fez as combinações possíveis observando a questão da ordem. No item *c*, acertaram a resposta, mas o registro não permite conjecturas. Já no item *d* seguiram com o mesmo pensamento do item *a*. E o item *d*, assim como o item *c*, estão corretos, sendo mais simples perceber a resposta.



À medida que os alunos foram resolvendo os problemas, criaram métodos de resolução mais simples em relação ao primeiro problema. Isso pode ser observado nesta resolução do problema **6**, como se observa a seguir.



Anteriormente à aplicação dos problemas, algumas dúvidas e questionamentos surgiram por parte das professoras que aplicaram e observaram o desenvolvimento dessa pesquisa, pois já tendo elas experiência em trabalhar a Análise Combinatória, levantaram as seguintes preocupações: O tempo será suficiente para aplicar todos os problemas elaborados? Em que ordem os problemas devem ser aplicados? Deve-se trabalhar com problemas semelhantes, que tenham o mesmo tipo de resolução?

Em geral, os professores têm suas aulas planejadas do início ao fim, como se soubessem todos os passos que irão ocorrer naquele momento e com aquele conteúdo. A insegurança apresentada nos questionamentos acima retrata um pouco esta realidade, porém pesquisar é também sair desta zona de conforto, é dar oportunidade ao aluno de ser sujeito na sua aprendizagem, e não mero participante. Feita esta leitura da situação, observou-se que o trabalho deveria acontecer naturalmente, sem preocupação com tempo, ou ordem pré-estabelecida. Estas professoras estariam observando o que iria acontecer sem influenciar o aluno. Chegar a este ponto não foi simples, e o processo passou por várias discussões e ponderações.

Observou-se inicialmente que:

- Os alunos se envolveram rapidamente nas atividades.
- Escreveram as possibilidades que consideravam corretas.
- Perceberam que a ordem dos elementos na solução dos problemas pode fazer diferença.
- Em geral, todos os alunos dos grupos participaram da atividade, ajudando os outros, discutindo e dando sugestões.
- Alguns grupos, na medida em que resolviam mais problemas, começavam a utilizar o Princípio Multiplicativo, sem escrever todas as possibilidades.
- Ao escreverem todas as possibilidades, alguns alunos demonstraram cansaço.

Foi possível perceber a satisfação dos alunos em depoimentos como: *"As atividades são boas, porque a gente tem que pensar"* ou *"As tarefas foram bastante criativas, fazendo os alunos raciocinarem, e o material usado facilitou as resoluções"* ou ainda *"Foi muito bom, e acho que era para ocorrer mais vezes, porque através dessas tarefas nos incentivam a pensar"*. Outros alunos, além de manifestar sua satisfação, fizeram críticas como: *"O uso das figuras com as iniciais iguais dificultou – ex. maçã, melão, São Paulo, Santos – o trabalho foi bem legal,* *pois foi bem diferente e aprendemos um conteúdo novo"*. Nesta fala, pode-se perceber a visão do aluno, sua maneira de pensar que, em geral, não é necessariamente a mesma do professor.

Quando são aplicadas atividades inovadoras e diferenciadas, geralmente os alunos se mostram bastante receptivos. Isto comprova que uma proposta de trabalho na qual o aluno é sujeito de seu aprendizado ajuda na construção de seu conhecimento.

Percebe-se, também, que, mesmo não tendo conhecimento prévio sobre o assunto tratado, os alunos resolvem os problemas, observam que o grau de dificuldade de uns é maior que o de outros. Nota-se isto no depoimento do aluno que diz: *"Foi uma experiência muito legal, até porque o grau de dificuldade conforme as tarefas ia aumentando, isso fazia com que aumentasse o interesse"*. Nesse sentido, observa-se que o aluno não resolveu os problemas isoladamente, mas estabelecendo uma relação entre eles. Existiu uma associação de idéias entre as diferentes tarefas.

A expectativa inicial das professoras observadoras foi de que os alunos iriam de imediato usar a árvore das possibilidades mesmo sem ter visto um exemplo sobre isto, porém fica notório que não é algo inerente ao aluno, ele, sim, fez descrições bastante detalhadas e num certo momento, "cansado" de escrever todas as possibilidades foi em busca de registros mais simplificados e menos cansativos, apresentando esquemas, desenhos e até mesmo o Princípio Multiplicativo.

As professoras observadoras evitaram intervenções, limitando-se a observar como os alunos tentavam resolver os problemas no seu ritmo. Não houve planejamento quanto ao tempo necessário e a seqüência dos problemas, pois o grupo concordou que isto deveria ser percebido durante a observação, e não num planejamento anterior no qual cada passo já estaria definido.

Considerações Finais

Esse trabalho proporcionou um profundo refletir sobre as ações pedagógicas e também em relação ao comprometimento e às atitudes docentes. Muitas vezes se pensa que o aluno precisa de uma explicação formal do professor para que a aprendizagem realmente aconteça. Porém, neste tipo de atividade, em que o aluno, juntamente com seus colegas de grupo, discute, organiza e busca a solução do problema sem a interferência do professor, todos se tornam mais participativos, argumentam e justificam suas respostas sem nenhum rigor matemático. Isso não significa que no estudo da Análise Combinatória, ou em qualquer outro conteúdo, não haja a necessidade de um estudo formal, com regras, utilização de fórmulas e conceituações e cálculos, mas inicialmente a resolução de problemas associada à utilização de diferentes objetos de aprendizagem desperta a curiosidade e a vontade de encontrar soluções para outros problemas, semelhantes aos que foram propostos. Sugere-se, para futuras aplicações, que se inclua como uma das atividades a elaboração de problemas, por parte dos alunos, e a confecção de material concreto.

A Matemática causa prazer para alguns e aversão para outros e, em geral, estes sentimentos estão associados à forma como o conteúdo ou conceito é trabalhado, já que é possível observar que, quando os resultados são favoráveis em relação a esta disciplina é, geralmente, difícil não ter prazer na sua aprendizagem.

Referências

CARRAHER, Teresinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1989.

GUELLI, Oscar. **Matemática – série Brasil**. São Paulo: Ática, 2004.

HUETE, Sábchez; BRAVO, Fernández. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Porto Alegre: Globo, 1961.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBEM, 1998. v.2.

Submetido em maio de 2008.
Aprovado em novembro de 2008.

ULBRA

ACTA SCIENTIAE
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

A Revista *Acta Scientiae* teve sua origem em 1999, mediante publicação de artigos oriundos dos pesquisadores das áreas de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – Canoas (RS). Com sua indexação junto ao IBICT – *Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia* (ISSN no. 1517-4492), é reconhecida como um espaço de publicação tanto de Ciências e Matemática como de Ensino dessas áreas. Entretanto, a partir do Volume 7, Número 1, 2005, Jan-Jun, a revista passa a publicar artigos exclusivos da área de Ensino de Ciências e Matemática, sendo editada desde sua fundação em dois números anuais. Assim, constitui-se em mais uma opção para publicação de artigos científicos dessa região de inquérito.

Confira: **http://www.ulbra.br/actascientiae**

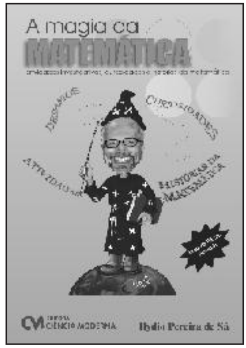
Você poderá realizar download dos exemplares da revista, encontrará informações para submissão e avaliação dos artigos.

ATENÇÃO!

A Revista Acta Scientiae é de fluxo contínuo para o recebimento de artigos.
Além disso, ela é uma revista de divulgação impressa e online.

Informações:
mauriciomatematica@ gmail.com
actascientiae@ulbra.br

RESENHA



SÁ, Ilydio pereira de. **A magia da matemática**: atividades investigativas, curiosidades e histórias da matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008, 2. Ed.

Por **Ana Maria Severiano de Paiva** / Professora do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Severino Sombra (USS), Vassouras, RJ (anaseveriano@uol.com.br).

SURPREENDA COM A MATEMÁTICA!

É com a proposta de surpreender que o autor valoriza a criatividade, a investigação, desafiando o aprender de "velhos conteúdos matemáticos" de forma diferente, com "magia".

Este livro contribui para refletir sobre o modo como se dá o ensino e a aprendizagem, isto é, as opções didáticas, os métodos, a organização do tempo e do espaço que conformam a prática educativa.

A contribuição é a de instigar o aprender da matemática não como um ato mecânico de "decorar e aplicar fórmulas", mas compreender que "a matemática" está na vida, muito antes de ser apreendida ou apresentada no espaço escolarizado. Cabe, portanto, despertar o interesse, o prazer por esta matemática. Foi com essa finalidade que o autor selecionou ou adaptou todas as atividades lúdicas apresentadas nesse livro. Estas poderão ser usadas em sala de aula da educação básica, por professores e alunos ou em cursos de formação de professores de Matemática.

É natural que alunos da Educação Básica sintam mais prazer e interesse quando estão envolvidos em atividades matemáticas desafiadoras e que permitam a descoberta. Para isso precisam de estímulo, de motivação, de provocação.

As atividades, desafios, curiosidades que compõem os 45 temas do livro vêm acompanhadas, numa linguagem simples, das respectivas justificativas matemáticas. Dessa forma, o livro serve para estudantes em geral, professores, licenciandos, pessoas que gostam de matemática e, principalmente, pessoas que sempre odiaram a matemática.

O livro está dividido em três partes:

1 – Atividades investigativas com números: curiosidades, truques, desafios e dicas, envolvendo números e suas operações; álgebra elementar.

2 – Atividades investigativas geométricas: curiosidades, truques, desafios e dicas, envolvendo Geometria Euclidiana.

3 – Curiosidades matemáticas, temas interessantes da história da matemática e atividades para sala de aula: apresentam-se fatos, relacionados à História da Matemática, ao cotidiano das pessoas e a temas de matemática que, por sua importância, não podem ser esquecidos.

Apenas o último tópico do terceiro capítulo exige conhecimento matemático mais específico. É recomendado a professores, a licenciandos de matemática ou pessoas com, pelo menos, o Ensino Médio. Todos os demais tópicos ou temas abordados são tratados de forma bem simples, podendo ser entendidos e aplicados por qualquer pessoa que tenha apenas conhecimentos básicos da Matemática.

RESENHA

SANTOS, S. C. A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial. **Dissertação de Mestrado em Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, 2006, 145p.

Por **Rafael Teixeira dos Santos**
Mestrando em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Professor do Centro Universitário de Volta Redonda (UniFOA) e do Centro Universitário Geraldo Di Biase (UGB)
rafa.teixeira@gmail.com

É cada vez mais frequente a discussão entre pesquisadores da área de Educação sobre as iniciativas de se colocar a tecnologia a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem voltados à prática profissional dos docentes. Dentre tais iniciativas aparecem aquelas que utilizam as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para o desenvolvimento de ferramentas de ensino a distância, buscando o compartilhamento virtual de conhecimentos, informações e experiências. Dessa forma, a dissertação ora resenhada investiga como se dá a produção matemática de alunos-professores em um curso de extensão universitária a distância, sendo observado de forma clara o objeto de estudo da autora desde o título.

A introdução procura inserir o objeto de estudo proposto, assim como uma descrição da trajetória acadêmica da autora, apresentando a problemática investigada e a relevância do trabalho realizado. Nesse sentido, atividades realizadas com o software livre proporcionaram situações de investigação aos estudantes na construção do conhecimento geométrico. Contudo, outras questões emergiram quando toda a dinâmica passou a ocorrer a distância, via Internet, utilizando basicamente uma sala de bate-papo.

A investigação faz uso do software livre Wingeom e de outros recursos manipulativos. A autora ressalta que o software não substitui a análise qualitativa humana, porém as novas tecnologias podem ajudar em ações manuais que seriam executadas repetidamente, como por exemplo, na capacidade de visualização das relações geométricas, na possibilidade de exploração das construções e descoberta de relações e propriedades geométricas, na validação de conjecturas e de teoremas, de forma experimental, entre outras formas de consulta a informações, como ferramenta para produção de objetos, contribuindo para o avanço da educação, da tecnologia e da sociedade.

Observa-se também o surgimento do movimento das leituras sobre produção de significados. Daí a ideia de investigar a dinâmica do processo de produção com a utilização de um ambiente virtual de aprendizagem, focando-se nos significados produzidos quando um objeto de aprendizagem é criado. Considerando que alunos-professores produzem significados a partir de consultas preliminares, projeta-se o entendimento da dinâmica da produção de significados no processo de escrita-leitura.

Há uma preocupação com relação à produção do conhecimento quando as TIC se inserem no processo de desenvolvimento cognitivo humano. Nessa visão, a autora defende, baseada em seu referencial teórico, que o conhecimento é algo produzido a partir de um coletivo intelectual, composto por humanos e não humanos. Como atores não humanos, em sintonia com Borba e Villarreal (2005), a autora considera as mídias oralidade, escrita e informática. Segundo essa perspectiva teórica, os autores acreditam que as mídias reorganizam o pensamento humano, já que elas moldam as ações quando se busca resolver um determinado problema matemático.

Nesse sentido, a proposta é que se possa considerar uma unidade de homens-coisas (LÉVY, 1993), os seres-humanos-com-mídias. Assim, as tecnologias, o contexto e tudo o que está ao redor não são meros acessórios e sim compõem um todo integrado que pensa junto. Nesse aspecto, Borba e Villarreal (2005) vêem o coletivo seres-humanos-com-mídias como sendo uma unidade básica de análise e reconhecem a importância de examinar a relação dentro dessa unidade, propondo que exista uma relação dialógica entre o usuário de um software e as intenções do grupo ou da pessoa que desenvolve esse software. Para Borba e Villarreal (2005), essa relação dialógica é vista como uma moldagem recíproca, ou seja, ao mesmo tempo que a mídia condiciona a forma como determinadas ações são desenvolvidas, o usuário é que decide o que fazer.

No estudo, investiga-se como ocorre a produção matemática (processo de exploração de conceitos matemáticos–geométricos) no contexto das TIC, proporcionando situações de investigação que os estudantes necessitam para construírem seu conhecimento geométrico. Enfoca-se a necessidade de saber administrar o uso dessas tecnologias informáticas, pois somente adaptar esse recurso em aula se mostra insuficiente, caso não exista uma visão aprofundada para a produção do conhecimento.

Verifica-se um período exploratório sob atividades em geometria euclidiana espacial, através da participação em chats (diálogos inseridos na dissertação). Foram inseridas discussões sobre as atividades de geometria euclidiana espacial que ocorreram no curso a distância. Em alguns trechos, foram necessários comentários ou explicações que esclarecem certas colocações dos participantes. Além disso, foram mantidos os erros de digitação e de outra ordem, característicos da comunicação em uma sala de bate-papo. Dessa forma, de acordo com a autora, os instrumentos construídos para o estudo foram baseados em dinâmicas com a utilização do ambiente virtual e do software livre escolhido, sendo descrito o processo de elaboração desses instrumentos, assim como o objetivo final de cada atividade.

A respeito dessa dinâmica observam-se dificuldades de aprendizado por parte dos participantes (de professores recém-formados a doutores em matemática) na utilização do ambiente partindo, em alguns momentos, para a utilização de objetos manipuláveis ou até mesmo lápis e papel para a resolução das atividades propostas. Foi abordado também o fato de o chat utilizado não compartilhar simultaneamente as construções geométricas feitas no software. Por outro lado, a troca de experiências também foi observada, possibilitando, nas discussões, quando equívocos eram evidenciados, a possibilidade de uma dinâmica de interações entre os alunos-professores.

A pesquisa objetivou investigar como ocorre a produção matemática em determinado contexto – o da produção em um ambiente-informático. Contudo, a discussão durante todo o processo de produção matemática mostrou-se relevante, em termos de contribuição teórica e prática, sendo explicitadas no decorrer do trabalho através de interações via chat, que exige dos interlocutores uma maior sensibilidade e empatia, pois para compreender a explicação do outro se torna importante uma imersão nas condições em que esse outro se encontra. Da mesma forma, aquele que se propõe a emitir uma mensagem tem a preocupação de buscar estratégias para fazer com que, por meio de sua escrita no chat, a voz também apareça e possibilite a criação de uma "presença virtual".

As interações online descritas propiciaram um ambiente no qual emergiram diferentes formas de aprender e ensinar e, assim, juntamente com as mídias utilizadas, uma compreensão individualizada se evidenciava e era compartilhada e resignificada, à medida que a socialização e a produção coletiva aconteciam. Com base nessa experiência, diversas possibilidades de produção matemática foram observadas uma vez que, mesmo com a distância física, foi possível estabelecer um debate, rever conceitos matemáticos, discutir diferentes formas de abordar o conteúdo de geometria espacial e, ainda, de acordo com a autora, “aproximar” professores de diferentes lugares, com realidades distintas para a troca de experiência.

Finalmente, considera-se este trabalho de fundamental importância chamando a atenção para a realização de pesquisas que possam estar voltadas à sala de aula (presencial ou não). Na medida em que foram propostas atividades investigativas sobre geometria euclidiana espacial o professor de matemática poderá utilizá-las, adaptando-as ao seu contexto. Além disso, a investigação é um convite à reflexão sobre a Educação Matemática a Distância, via Internet.

Referências

BAIRRAL, M. A. Compartilhando e Construindo Conhecimento Matemático: análise do discurso nos chats. **BOLEMA**, Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 37-62, 2004.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática.
Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

BOLEMA:

Um instrumento de divulgação da pesquisa em Educação Matemática

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - uma publicação semestral da UNESP-Rio Claro/SP, cujo objetivo principal é disseminar a produção na região de inquérito denominada Educação Matemática ou áreas afins.

LANÇAMENTOS EM 2009:

edições 32, 33 e 34.

Mantido o preço da
Assinatura anual
R$35,00

CONFIRA EM NOSSA HOME-PAGE:

http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bo

Informações sobre assinatura; compra de exemplares avulsos; títulos, índices e resumos de todas as edições.

INFORMAÇÕES
bolema@rc.unesp.br

FORMAS DE PAGAMENTOS: cheque nominal à Marcos V. Teixeira / REVISTA BOLEMA, enviado ao nosso endereço, ou Depósito Bancário em favor da conta: (envie comprovante de depósito)

Banco do Brasil

Marcos V. Teixeira / REVISTA BOLEMA
Agência 0172-4 C/C 54479-5

Rio Claro - SP

Aproxime-se da Unesp/Rio Claro,
assine e leia o Bolema.

BOLEMA - Boletim de Educação Matemática

IGCE - UNESP - Departamento de Matemática
Caixa Postal 178, 13506-700 Rio Claro, SP

Utilize esta ficha para cadastro de novos sócios ou atualização de informação. Caso queira solicitar números anteriores poderá utilizá-la ou enviar pedido via e-mail ao GEPEM.

GEPEM

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Preencher e enviar (com cheque nominal ou cópia do depósito bancário Banco Real (356) ag. 0933 c/c 3006398-0) para uma das opções seguintes:

CNPJ: 42.568.469/0001-71

Endereço Postal: Instituto de Educação da UFRuralRJ - DTPE - Sala 30
BR 465, Km7 - CEP: 23890-000 Seropédica - RJ.
A/C Prof. Marcelo Bairral
Tel./fax.: (21) 26821841
e-mail: gepem@ufrrj.br
www.gepem.ufrrj.br

Informações Residenciais

Nome completo:	
Endereço:	
Bairro:	Cidade:
CEP.:	Estado:
Telefone:	Fax:
E-mail:	

Deseja receber os Informativos trimestrais via e-mail? ( ) Sim ( ) Não

Sua principal atuação profissional:

Educação Infantil ( )
Ensino Fundamental: ( ) 1º ao 5º anos ( ) 6º ao 9º anos
Ensino Médio: ( )
Ensino Superior: ( ) Graduação ( ) Pós-Graduação

Valores da anuidade do GEPEM
Nacional (individual): R$ 30,00 Nacional (institucional) R$ 60,00
Internacional (individual) R$ 40,00 Internacional (institucional) R$ 70,00

A inscrição corresponde a primeira anuidade Data: ___/___/____

Assinatura: ____

Os gastos postais são pagos pelo GEPEM. Além de descontos em congressos e em nossas publicações, sócios individuais em dia com a anuidade recebem, por ano, *2 Revistas* e *4 Informativos.* Sócios institucionais, *4 Revistas* e *8 Informativos.*

BOLETINS ANTERIORES

Boletins até 35 (sócio R$3,00; não sócio 5,00). Números esgotados (2,10,11,12,13,17,21,23,24,25) somente em fotocópia. O preço de cada exemplar esgotado dependerá do número de páginas a serem fotocopiadas.
Boletins 36 ao 55 (sócio R$10,00; não sócio R$18,00)

PERMUTA
O GEPEM tem interesse de estabelecer permuta de seus Boletins com periódicos nacionais e internacionais. Favor enviar o(s) exemplare(s) para o Setor de Periódicos da Biblioteca Central da UFRuralRJ.

EXCHANGE
The GEPEM wishes to establish exchange of its periodical with all similar reviews. Please, send exchange to: Biblioteca Central da UFRuralRJ Setor de Periódicos
BR 465, Km7 - CEP: 23890- 000 Seropédica - RJ, Brasil

BOLETIM 53 (Jul./Dez.2008)
Aprendizagem colaborativa com suporte computacional: Uma perspectiva histórica / Gerry Stahl, Timothy Koschmann e Dan Suthers; **Resolução de problemas em matemática: Uma abordagem no processo educativo** / Vânia Maria Santos-Wagner; **Atividades de Geometria Espacial e Tecnologias Informáticas no Contexto da Educação a Distância Online** / Silvana Claudia Santos; **A Capacidade Argumentativa e as Narrativas Matemáticas nas Aulas de Matemática com Tecnologias** / Nilce Fátima Scheffer, Ricardo Machado Corrêa, Jordana Zawierucka Bressan; **Exploração de Trabalhos de Escher em Aulas de Geometria** / Clarissa Trojack Della Nina , Maria Elvira Jardim Menegassi , Mercedes Matte da Silva. **Resenha**: A música dos números primos: a história de um problema não resolvido da matemática (de Marcus du Sautoy) por Dora Soraia Kindel.

BOLETIM 54 (Jan./Jun.2009)
Uma análise do pensamento e da linguagem algébrica expressos na produção escrita de alunos da escola básica / João Ricardo Viola dos Santos , Regina Luzia Corio de Buriasco; **Demonstrações em Geometria: alunos de licenciatura, ambiente informatizado e reflexões para a formação do professor de Matemática** / Emerson Rolkousi; **A estreita relação entre os modelos de resolução de problemas e a metacognição:uma questão de circunstâncias** / Tânia Cristina Gusmão; **As concepções sobre o professor em 32 anos de boletim gepem: 1976 – 2007** / Marinez Meneghello Passos , Roberto Nardi. **Resenha**: Ensino Eficaz de Matemática (de Rosamund Sutherland) por Dora Soraia Kindel.