BOLETIM GEPEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Música, Álgebra e Modelagem Matemática: a construção de um modelo como possibilidade para Educação Básica

Milena Passos dos Santos[1]
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Zulma Elizabete de Freitas Madruga[2]
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

RESUMO

Nesta pesquisa buscou-se estudar a música e suas possíveis relações com o ensino e aprendizagem da álgebra e do pensamento algébrico, com o auxílio da Modelagem Matemática, tendo como objetivo compreender como a música, por meio da criação de modelo, pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes da Educação Básica. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, em particular um estudo documental, no qual a pesquisadora utilizou-se do processo de Modelagem Matemática, para construir modelos algébricos a partir de cifras musicais. Os dados foram analisados por meio de categorias elencadas *a priori*, oriundas da base teórica estudada, a saber: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; significação e expressão. Os modelos encontrados passaram por um processo de validação, no qual os resultados apontaram que as cifras codificadas geram termos gerais que podem ser utilizados como equações em sala de aula, instigando o desenvolvimento da vertente modelação do pensamento algébrico. No entanto, ao tentar criar modelos de funções do primeiro grau para as mesmas cifras, estes não foram validados. Mesmo assim, pode-se concluir que o ensino da álgebra por meio da música, baseado na Modelagem Matemática, pode ser eficaz para o ensino de equações de primeiro grau e de sequências numéricas.

Palavras-chave: Modelos; Modelagem Matemática; Pensamento algébrico; Música.

Music, Algebra and Mathematical Modelling: the construction of a model as a possibility for Basic Education

ABSTRACT

In this research we sought to study music and its possible relationships with the teaching and learning of algebra and algebraic thinking, with the help of Mathematical Modeling, with the objective of understanding how music, through the creation of a model, can help in the development of algebraic thinking in Basic Education students. This is qualitative research, in particular a documentary study, in

[1]Licenciada em Matemática na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Tendências da Educação Matemática e Cultura (GEPTEMaC). Amargosa, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Nestor de Melo Pita, 535 - Centro, Amargosa, Bahia, Brasil, CEP: 45300-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1518-9251. E-mail: milenasantos9951@gmail.com.

[2] Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Professora adjunta de ensino de Matemática no Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Amargos, Bahia, Brasil. Docente permanente nos Programas de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (UESC) e Educação Cientifica e Formação de Professores (UESB). Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Tendências da Educação Matemática e Cultura (GEPTEMaC). Endereço para correspondência: Av. Nestor de Melo Pita, 535 - Centro, Amargosa, Bahia, Brasil, CEP: 45300-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1674-0479. E-mail: betemadruga@ufrb.edu.br.

which the researcher used the Mathematical Modelling process to build algebraic models based on musical chords. The data were analyzed using categories listed a priori, originating from the theoretical basis studied, namely: perception and apprehension; understanding and explanation; meaning and expression. The models found went through a validation process, in which the results showed that the coded figures generate general terms that can be used as equations in the classroom, instigating the development of the modeling aspect of algebraic thinking. However, when trying to create first degree function models for the same ciphers, these were not validated. Even so, it can be concluded that teaching algebra through music, based on Mathematical Modelling, can be effective for teaching first degree equations and numerical sequences.
Keywords: Models; Mathematical Modelling; Algebraic thinking; Music.

Música, Álgebra y Modelación Matemática: la construcción de un modelo como posibilidad para la Educación Básica

RESUMEN

En esta investigación buscamos estudiar la música y sus posibles relaciones con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y el pensamiento algebraico, con la ayuda del Modelación Matemática, con el objetivo de comprender cómo la música, a través de la creación de un modelo, puede ayudar en el desarrollo. del pensamiento algebraico en estudiantes de Educación Básica. Se trata de una investigación cualitativa, en particular un estudio documental, en el que el investigador utilizó el proceso de Modelación Matemática para construir modelos algebraicos basados en acordes musicales. Los datos fueron analizados utilizando categorías enumeradas a priori, provenientes de la base teórica estudiada, a saber: percepción y aprehensión; comprensión y explicación; significado y expresión. Los modelos encontrados pasaron por un proceso de validación, en el que los resultados mostraron que las figuras codificadas generan términos generales que pueden ser utilizados como ecuaciones en el aula, instigando el desarrollo del aspecto de modelación del pensamiento algebraico. Sin embargo, al intentar crear modelos de funciones de primer grado para los mismos cifrados, estos no fueron validados. Aun así, se puede concluir que la enseñanza del álgebra a través de la música, basada en la Modelación Matemática, puede ser efectiva para la enseñanza de ecuaciones de primer grado y secuencias numéricas.
Palabras clave: Modelos; Modelación Matematica; Pensamiento Algebraico; Música.

INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática pode ser considerada uma estratégia pedagógica que relaciona os conteúdos com situações cotidianas. Segundo Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 9), “a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação sobre a realidade carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador”. A Modelagem Matemática valoriza a bagagem de conhecimentos dos estudantes, relacionando as situações-problemas enfrentadas no cotidiano, e que podem ser resolvidas por meio do conhecimento matemático, com os conteúdos da Matemática escolar, o que pode acarretar benefícios na aprendizagem.

A partir da MM o estudante pode criar autonomia para o desenvolvimento de uma aprendizagem com mais significado. De acordo com Ribas e Veleda (2014, p. 4),

> [...] a escolha pela Modelagem Matemática [...]pode possibilitar ao aluno o desenvolvimento de sua autonomia para tornar-se um indivíduo participativo e atuante e, ao relacionar o conteúdo aprendido no ambiente escolar com a realidade de sua vida, possa realizar intervenções e contribuir na tomada de decisões.

Dessa forma, a Matemática pode se tornar mais interessante para os estudantes, ao passo que contribui não apenas para a aprendizagem do conteúdo desenvolvido pelo professor, mas também, pode contribuir para a formação de um cidadão mais autônomo. Além disso, busca tornar a Matemática menos abstrata, já que está relacionada com o cotidiano do estudante, podendo despertar o interesse pela disciplina.

Algumas pesquisas apresentam relações entre a MM e a música, por exemplo, as investigações de Pontes e Madruga (2019) e de Pereira e Madruga (2020), que tratam sobre notas musicais modeladas em funções trigonométricas através dos *softwares* Audacity e Geogebra; e a construção de modelos de escala por meio de notas musicais, respectivamente. Ambas apresentam implicações pedagógicas para o ensino básico.

A música faz parte da vida da maioria das pessoas, pode ser um *hobbie,* trabalho ou puro lazer. A música é um exemplo de algo relacionado ao cotidiano dos estudantes, assim, pensamos em atrelar a música, a Modelagem Matemática e a álgebra em um mesmo modelo.

Fadin (2021, p 152) afirma que "[...] a Modelagem Matemática se configura como uma alternativa pedagógica que permite o trabalho com o pensamento algébrico antes mesmo do ensino formal". Isto evidencia que o pensamento algébrico a partir da álgebra pode ser desenvolvido por meio da Modelagem Matemática.

A álgebra é uma parte da Matemática a qual generaliza a aritmética. Como aponta Pereira (2017, p. 2), normalmente, a álgebra é apresentada na escola de forma descontextualizada aos estudantes, o que exige um pouco mais de raciocínio e abstração por parte dos mesmos, por vezes levando os estudantes a não compreenderem o conteúdo, e podendo até mesmo, criar um 'desgosto' pela Matemática, assim como possíveis bloqueios para conteúdos futuros (Pereira, 2017).

A primeira associação que houve entre a Matemática e a música foi feita por Pitágoras, filósofo e matemático nascido na Ilha grega de Samos. Pitágoras foi orientado por Tales de Mileto, para ele os números eram a essência de todas as coisas. Depois de ser perseguido por suas ideias revolucionárias, mudou-se para o sul da Itália onde criou uma escola de caráter místico-filosófico, que ficou conhecida como Escola Pitagórica (Abdounur, 2003).

Pitágoras estabeleceu as bases para a compreensão das proporções harmônicas e dos intervalos musicais. Durante os séculos essa teoria se desenvolveu e influencia a música ocidental até os dias atuais. Atualmente a Matemática ainda é muito utilizada na música, seja na composição, na teoria musical, na harmonia, no estudo da acústica e na análise de evolução da indústria musical.

As notas musicais são representações sonoras utilizadas na música, normalmente designadas por letras do alfabeto A, B, C, D, E, F e G na tradição musical ocidental. Essas notas se repetem em diferentes oitavas, ou seja, depois da nota G, o padrão reinicia com a nota A novamente. No Quadro 1 estão apresentadas as notas musicais e as suas respectivas representações com as letras do alfabeto.

Quadro 1 - Notas musicais.

A	LÁ
B	SI
C	DÓ
D	RÉ
E	MI
F	FÁ
G	SOL

Fonte: As autoras (2024).

Cada uma dessas notas pode ser acompanhada por um acidente[3], que pode ser um sustenido (#) ou um bemol (♭). Esses acidentes modificam o tom das notas em meio tom, aumentando ou diminuindo sua altura. Por exemplo, a nota G com um sustenido é chamada de G(sol) sustenido (G#), enquanto a mesma nota com um bemol é chamada de G(sol) bemol (Gb).

Essas notas, juntamente com seus acidentes, compõem a base da notação musical utilizada para representar as alturas sonoras. Elas são organizadas em escalas musicais, tal como a escala diatônica, que se constitui em sete notas com uma sequência específica de tons e semitons entre elas. Essas escalas são a estrutura principal para a composição e compreensão da música tonal[4] na tradição ocidental.

Além das letras do alfabeto e seus acidentes, as notas também podem ser representadas por números em certos contextos. Med (1996) apresenta que na numeração

[3] Acidente musical é um símbolo que altera a altura de uma nota musical. Os acidentes, portanto, representam alterações na altura das notas: existe o acidente ascendente (sustenido: #), e o acidente descendente (bemol: b).
[4] Música tonal é toda música que apresenta uma tonalidade definida, ou seja, uma hierarquia entre as notas, os tons, os acordes e os sons utilizados, girando em torno de uma principal.

de graus[5] de uma escala[6], por exemplo, a tônica[7] é frequentemente representada pelo número I, a segunda nota pelo número II e assim por diante, indicando a posição de cada nota na escala.

Segundo Med (1996), um acorde é a combinação de três ou mais sons simultâneos diferentes. Os acordes mais conhecidos são aqueles que possuem o nome das notas: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si. Existem ainda os acordes suspensos[8], acordes menores[9] e acordes maiores[10]. Quando se pensa em notação utilizando C (dó), tem-se dó maior: C; dó menor: Cm; dó suspenso: Csus.

Além disso tem-se acordes que aparecem com números como Cm6, o que significa que o acorde será dó menor com a 6ª (sexta), ou seja, os números representam o intervalo[11] que o acorde será tocado.

Essa notação é utilizada principalmente nas cifras. Cifra é um sistema de notação musical utilizado para designar os acordes a serem tocados por um ou mais instrumentos em uma determinada música. A notação da cifra fica acima da letra da música e a cifra é utilizada principalmente em músicas populares.

Essas informações serão necessárias para melhor compreensão da criação do modelo, que foi baseado na Modelagem Matemática (MM) e no pensamento algébrico. Nesse sentido, tem-se como questão de investigação: como a música, por meio da criação de modelo, pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes da Educação Básica? Para responder a essa indagação, tem-se como objetivo compreender como a música, por meio da criação de modelo, pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes da Educação Básica.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Modelagem Matemática

[5] Nome dado às notas que formam a escala, são representados por números romanos.
[6] Escala é o conjunto de notas disponíveis num determinado sistema musical.
[7] A tônica é o grau que determina o tom da música e nas escalas modais também estabelece a nota principal, sobre a qual é formada a sucessão intervalar do modo.

[8] O Acorde suspenso é aquele que não possui a terça, ou seja, não pode ser classificado como acorde maior nem menor.
[9] Acorde menor é um acorde formado por uma tríade menor, onde a primeira, a terceira e a quinta notas são de uma escala menor natural, ou seja, tônica, terça menor e quinta justa.
[10] Acorde maior é um acorde formado por uma nota fundamental, à qual se sobrepõe uma terça maior e uma quinta justa, formando uma tríade maior.
[11] Intervalo é a diferença de altura entre duas notas.

Biembengut (2014) afirma que a ideia de modelo está presente em todas as áreas do conhecimento, e pode ser seguida para a representação e a construção de algo, como por exemplo automóveis, aparelhos eletrônicos, roupas, que foram criados a partir de um modelo. Biembengut (2014, p. 21) ainda afirma que,

> A representação ou reprodução de alguma coisa -modelo- requer procedimentos que passam pela observação cuidadosa da situação-problema, fato ou fenômeno a ser modelado, pela interpretação da experiência realizada pela capacitação do significado do que produz. Esse conjunto de procedimentos denomina-se modelagem.

A Modelagem Matemática (MM) pode ser considerada uma estratégia pedagógica que relaciona os conteúdos matemáticos com situações do cotidiano. De acordo com Bassanezi (2010, p. 24), "a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

O processo de modelar segue as mesmas etapas da pesquisa científica, afirma Biembengut (2014): reconhecer e delimitar o problema, estudar sobre o problema criando um referencial teórico, formulação do problema, a criação e desenvolvimento do modelo matemático, a aplicação do modelo e, por fim, a avaliação do modelo. Biembengut (2014) agrupa o processo de modelar em três fases: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; e significação e expressão.

A primeira fase, *percepção e apreensão*, trata-se da escolha do tema a ser estudado. Para isso é necessário o estudo teórico e a depender do problema, pode-se fazer estudos de campo a fim de conhecer os indivíduos ou entes envolvidos. A imersão no tema é essencial para uma abordagem mais completa e profunda nas próximas fases do processo. Quanto mais compreensão e conhecimento forem adquiridos nessa fase inicial, mais robusta e bem fundamentada será a investigação nas fases seguintes. Isso é vital para o desenvolvimento de soluções, análises ou propostas mais eficazes e pertinentes. Para além disso,

> Na medida em que *percebemos*, nos familiarizamos com os dados. A situação torna-se mais clara e *apreendemos*. Nesta fase, é importante efetuarmos uma descrição detalhada dos dados levantados, pois nos utilizaremos destes durante todo processo de modelagem (Biembengut, 2014, p. 24).

A segunda fase, *compreensão e explicitação*, é responsável pela formulação, criação e aplicação do modelo. Para isso é necessário que haja um bom embasamento teórico principalmente no momento da formulação do problema, que precisa de um olhar criterioso para analisar todas as variáveis envolvidas. Nessa fase, a clareza na explicitação do modelo é essencial. Isso pode envolver o uso de representações gráficas, equações, simulações ou qualquer outra forma de representação que seja mais adequada para o problema em questão. Para mais,

> O objetivo principal dessa fase do processo de modelagem é chegarmos a uma explicitação, um modelo que nos leve a solução ou nos permita a dedução de solução. Este modelo pode conter um conjunto de expressões aritméticas e/ou algébricas, representações gráficas ou geométricas, aplicações computacionais. Uma vez modelada, resolvemos a situação-problema a partir do modelo e realizamos a aplicação (Biembengut, 2014 p.24).

A terceira e última fase, *significação e expressão*, tem como base a aplicação, feita na segunda fase para avaliar o quanto os resultados foram satisfatórios e analisam o quanto foi significativa é a solução. Acaso o modelo obtenha resultados significativos, descreve-se a sua importância; se resultados obtidos não forem os esperados volta-se à segunda fase analisando o que pode ser mudado e melhorado no modelo, ou até mesmo a fase inicial, caso haja necessidade. Além disso, comunicar os resultados é crucial para compartilhar o conhecimento adquirido durante o processo de estudo ou pesquisa.

As três fases do processo de modelar, apesar de serem diferentes são interdependentes, assim é necessário o desenvolvimento de todas para um resultado final satisfatório. Caso não ocorra e o modelo não seja validado, é necessário voltar à(s) fase(s) anterior(es) para refazer o processo

Pensamento algébrico

O fato de um estudante encontrar o resultado de uma equação algébrica, não significa que ele esteja pensando algebricamente. Para isso, ele precisa entender e/ou construir um significado para a equação, compreendendo a equivalência entre os membros e a linguagem algébrica. Almeida e Santos (2017, p. 40-41) afirmam que

> O pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana que surge das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal, usada na argumentação.

Assim sendo, o pensamento algébrico não é algo espontâneo, ou seja, o pensamento algébrico se desenvolve a partir de um ato intencional, pois o mesmo requer habilidade. Para (Radford, 2011 *apud* Almeida, 2016, p. 319)

> [...] o pensamento algébrico é de nenhuma maneira "natural", algo que aparecerá e se desenvolverá uma vez que os estudantes tenham amadurecido o bastante. O pensamento algébrico é um tipo de reflexão

> e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual.

Assim, a intenção de que o estudante desenvolva o pensamento algébrico é necessariamente do professor, não do estudante. Ao aplicar uma atividade de encontrar padrões de sequências, por exemplo, o objetivo do professor, será o desenvolvimento do pensamento algébrico, porém o do estudante será simplesmente encontrar os padrões.

Segundo Blanton e Kaput (2005) e Radford (2009), citados por Almeida e Santos (2017), existem dois aspectos centrais do pensamento algébrico, o primeiro que é a "generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais" (Canavarro, 2007, p. 88), o qual está relacionado com o pensamento representacional, que estabelece os processos mentais que o estudante utiliza para construir um significado num sistema de representação.

E o segundo é o "raciocínio e ação sintaticamente orientados sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados" (Canavarro, 2007, p. 88), o qual está ligado ao pensamento simbólico, que tenta compreender a forma como os estudantes entendem e usam os símbolos. A partir desses dois aspectos surgem três vertentes do pensamento algébrico: "aritmética generalizada ou pensamento quantitativo", o "pensamento funcional" e a "modelação".

A *aritmética generalizada*, segundo Almeida e Santos (2007 p. 42) "tem por base o potencial caráter algébrico da aritmética, que deve ser explorado explicitamente de forma sistemática, revelando a sua generalidade". É a vertente que generaliza operações aritméticas e as suas propriedades.

O *pensamento funcional*, segundo Almeida e Santos (2007 p. 44) "caracteriza-se pela generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, além de perceber as relações de variações e (co)variações. Nessa vertente do pensamento algébrico a generalização surge por meio da ideia de função". O aspecto sintático da álgebra aparece nesta vertente por meio de símbolos, apesar disso, segundo Almeida (2016), o indivíduo pode expressar regularidades por diversas formas de linguagens.

E *modelação*,

> É considerada como um domínio para expressar e formalizar generalizações. Nessa perspectiva, a generalização é realizada a partir de situações matemáticas ou de fenômenos, como, por exemplo, a generalização de regularidades em situações do dia a dia na qual a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa (Almeida; Santos, 2017, p. 45).

Essa vertente utiliza-se de generalizações que podem ser situações cotidianas, levando para a sala de aula a realidade ou semi-realidade (Skovsmose, 2000), o que pode requer menos abstração por parte dos estudantes e despertar interesse, tornando o ensino e a aprendizagem com mais significados. Pode também ser utilizada a construção de modelos, a partir da concepção de Modelagem Matemática.

PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa tem uma abordagem qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (2010). A pesquisa qualitativa é marcada por características fundamentais, como ser descritiva, analítica e interpretativa, sendo centrada no ambiente natural como fonte direta de dados, utilizando o pesquisador como o principal instrumento (Bogdan; Biklen, 2010).

Além disso, tem caráter documental, Oliveira (2007, p. 69) caracteriza a pesquisa documental "pela busca de informações em documentos que não receberam nenhum tratamento científico, como relatórios, reportagens de jornais, revistas, cartas, filmes, gravações, fotografias, entre outras matérias de divulgação". A partir disso, pode-se afirmar que a pesquisa recorre a documentos – cifras - que ainda não foram analisados minuciosamente.

Para análise dos dados foram utilizados os pressupostos do mapeamento na pesquisa educacional, mais precisamente o mapa de análise (Biembengut, 2008), etapa onde procurou-se perceber e compreender a estrutura e os traços dos entes ou fenômenos da pesquisa, na busca por interpretá-los e avalia-los criteriosamente. Biembengut (2008) afirma que explicitar as significações dos dados necessita de percepção e compreensão dos mesmos, bem como de interpretação e avaliação do contexto envolvido e, especialmente, de um julgamento do que é relevante e seu de grau de relevância.

Para Biembengut (2008), a descrição e a compreensão são realizadas durante o percurso da pesquisa, e a interpretação e avaliação dos fenômenos ou entes de uma pesquisa dependem do conhecimento do pesquisador sobre a teoria que sustenta o tema em questão, bem como da proposta de outro olhar sobre a teoria.

Dessa maneira, a pesquisa se baseou em estudos detalhados das três fases estruturadas por Biembengut (2014, 2016), as quais foram utilizadas como categorias *a priori*, fornecendo o alicerce para desenvolver e potencialmente aplicar um modelo que generaliza acordes musicais através da Modelagem Matemática.

Na primeira fase proposta por Biembengut (2014), denominada percepção e apreensão, foi feita a escolha do tema: música. Durante essa etapa, análise de documentos (cifras) foram conduzidas para identificar e comparar diferentes padrões de acordes, buscando, assim, desenvolver um modelo geral que os representasse.

A partir da análise de algumas cifras de músicas populares, foi escolhida a música *"Tropicália"* de Caetano Veloso. Música do ano de 1968 e que fez parte do movimento do tropicalismo, movimento cultural da época do regime militar. Seu objetivo era fundir estilos musicais, explorar novas técnicas e sons, questionar as hierarquias políticas e culturais, além de promover uma reflexão sobre a identidade nacional em um momento de grande efervescência política e social no Brasil. Essa música foi escolhida, pela sua importância histórica e também por ter repetições na melodia, o que poderia gerar um modelo a partir de generalizações.

A segunda fase, denominada compreensão e explicitação, foi responsável pela formulação, criação e aplicação do modelo. Nesta fase foram analisados os acordes da música e identificou-se um padrão específico, em um trecho da música, onde ocorria a repetição dos acordes.

Sem recorrer a teorias musicais formais, numerou-se de um a quatro os acordes da música seguindo a ordem em que surgiam. A partir dessa enumeração, foi encontrada uma sequência específica de números representando os acordes. Posteriormente, explorando essa sequência numérica dos acordes, buscou-se identificar padrões e relações entre eles, visando encontrar termos gerais ou uma expressão matemática que representasse essa sequência.

A sequência que foi encontrada possui 25 termos que se repetem três vezes, além disso, dentre os 25 termos existiam repetições que se tornavam sequências limitadas. Com isso, tornou-se complexo encontrar um termo geral para a sequência, sendo assim, foram divididos os 25 termos em quatro blocos. Para cada bloco, foram identificadas propriedades específicas que permitiram a criação de termos gerais representativos de cada bloco da sequência. A escolha dos blocos buscou maximizar a similaridade interna entre os termos, facilitando a definição de modelos algébricos adequados para cada bloco.

Após isso, a partir de manipulações algébricas tentou-se compactar os quatro termos gerais em um só, na tentativa de formar, assim, um só modelo. Como alternativa, cada bloco foi representado por uma função específica, criando assim quatro funções distintas que descrevem o comportamento dos termos em cada bloco.

A terceira fase, de significação e expressão foi destinada à validação do modelo. Nesta fase foi feita a validação do modelo final, substituindo a termo no modelo e verificando se correspondia ao termo correto da sequência. O detalhamento de cada fase consta explicitado na sessão a seguir.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentadas as categorias *a priori* baseadas na MM: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; e significação e expressão.

Percepção e apreensão

Nesta fase foi feita a escolha do tema *'música'* e foi realizado um estudo sobre música e Matemática, a fim de entender como se relacionam. Além disso, foi feito um estudo sobre a música, notas, acordes e cifras. Ademais, foram analisadas cifras de músicas populares, a fim de encontrar regularidades e/ou repetições de acordes na melodia de uma determinada música, com potencial para a criação de um modelo. A partir da análise de algumas cifras de músicas populares, foi escolhida a música de *"Tropicália"* de Caetano Veloso.

As letras das músicas do movimento tropicalismo, constantemente possuíam críticas sociais e políticas, abordando temas como a alienação cultural, a repressão do regime militar e a luta pela liberdade de expressão. O movimento foi, por vezes, visto como controverso e insolente, enfrentando resistência de setores conservadores da sociedade brasileira.

A música "Tropicália", foi uma peça essencial para a identidade e manifesto do tropicalismo. Ela sintetizava os preceitos do movimento, abordando a mistura de influências culturais, a crítica social e a celebração da diversidade brasileira. A música reproduz a ideia de fusão de estilos musicais, fundindo elementos da cultura popular brasileira com a música estrangeira, como o rock, além de trazer uma conduta crítica diante das questões sociais e políticas da época.

Na música a repetição da melodia principal é uma característica marcante. A canção apresenta uma melodia fácil de ser reconhecida e que se repete ao longo da música, atuando como o tema principal da composição. O que foi considerado para a música ser utilizada nessa pesquisa.

Ao analisar cifra de violão e guitarra no tom A (Lá), constatou-se que a melodia da música é composta por quatro acordes Bbm (Si bemol menor), Cm (Dó menor), Eb

(Mi bemol), e Ab (Lá bemol). Foi observado que eles se repetiam de forma regular, portanto uma cifra em potencial para criar um modelo que generaliza os padrões que os acordes fazem.

Após essa fase de percepção e apreensão, passou-se a resolver o problema e o modelo, como detalhado na subseção a seguir.

Compreensão e explicitação

Após a música ser escolhida, foi realizada uma análise mais profunda no padrão dos acordes. Percebeu-se que a melodia da música se repete a cada três estrofes[12] e que mesmo que os acordes se repetissem durante toda a música, havia algumas variações que divergem do padrão identificado.

Como a melodia se repete a cada três estrofes, optou-se por denominar: parte 1, parte 2, parte 3, parte 4 e parte 5. A parte 1 além das três primeiras estrofes, possui também a introdução, e a parte 5 possui uma quarta estrofe que é a repetição de uma das estrofes. O padrão dos acordes encontrados está exposto no Quadro 2.

Quadro 2 - Padrão encontrado.

Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm,Bbm Cm, Bbm Eb,Bbm, Eb,Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Ab,Cm

Fonte: As autoras (2024).

A introdução e as três primeiras estrofes tinham uma estrutura diferente do padrão encontrado. O Quadro 3 mostra como os acordes da parte 1 estão dispostos. Pode-se perceber que a quantidade de termos é maior que a do padrão encontrado, o que se deve aos acordes da introdução também estarem incluídos, que são os acordes que estão em vermelho. Porém, mesmo excluindo os acordes da introdução, já que se está trabalhando de três em três estrofes, os primeiros acordes são diferentes do padrão, que são os acordes que estão em azul.

Quadro 3 - Acordes da parte 1.

Bbm Cm Bbm Cm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm Eb,Bbm, Eb,Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Ab,Cm

Fonte: As autoras (2024).

12 Estrofe é um conjunto de versos. Verso é cada linha da música.

Os primeiros acordes do padrão encontrado são: Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm Cm. E os primeiros acordes encontrados nas primeiras três estrofes foram: Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm. Identificou-se a falta do Bbm (Si bemol maior) no segundo caso, logo foi decidido excluir a parte 1, para a análise do padrão.

A última parte da música, que se refere às quatro últimas estrofes também são diferentes, por ter a repetições de uma frase e repetição de uma das estrofes. A frase *"que tudo mais vá pro inferno meu bem"* se repete, repetindo também os acordes referidos a ela, quebrando o padrão encontrado nas partes 2, 3 e 4, por isso a parte 5 também foi excluída na análise do padrão. Essas variações podem estar ligadas a essa ser a última parte da música e o desejo do autor pode ter sido diferenciá-la.

O padrão encontrado (Quadro 2) é referente às partes 2, 3 e 4 da música como mostra o Quadro 5. O padrão tem 27 termos e se repete três vezes durante a música, sendo assim a sequência é limitada e possui no total 81 termos como apresentados no Quadro 8.

Quadro 4 - Sequência.

Sn = **{** Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm Cm, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Ab, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Ab, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Ab, Cm **}**

Fonte: As autoras (2024).

Quadro 5 - Trecho da música que foi utilizado - Partes 1, 2 e 3.

```
Bbm Cm
O monumento é de papel
Bbm      Cm
Crepon e prata
                     Bbm Cm
Os olhos verdes da mulata

A cabeleira esconde
         Bbm   Cm
Atrás da verde mata
          Bbm Cm
O luar do sertão

Bbm Eb
      Bbm           Eb
O monumento não tem porta
         Bbm
A entrada é uma rua antiga
           Eb
Estreita e torta
                Bbm
```

```
E no joelho uma criança
                   Eb
Sorridente, feia e morta
          Bbm
Estende a mão

Eb      Bbm    Eb
Viva a mata-ta-ta
              Bbm      Eb
Viva a mulata-ta-ta-ta-ta
         Bbm    Eb
Viva a mata-ta-ta
              Abm      Cm
Viva a mulata-ta-ta-ta-ta

Bbm Cm
                          Bbm Cm
No pátio interno há uma piscina
                    Bbm Cm
Com água azul de amaralina

Coqueiro, brisa
          Bbm   Cm
E fala nordestina e faróis

Bbm Eb
         Bbm             Eb
Na mão direita tem uma roseira
       Bbm                 Eb
Autenticando a eterna primavera
                          Bbm
E nos jardins os urubus passeiam
                     Eb     Bbm
Atarde inteira entre os girassóis

Eb           Bbm    Eb
   Viva a Maria-ia-ia
             Bbm       Eb
Viva a Bahia-ia-ia-ia-ia
          Bbm    Eb
Viva a Maria-ia-ia
             Abm       Cm
Viva a Bahia-ia-ia-ia-ia

Bbm Cm
                        Bbm Cm
No pulso esquerdo o bang-bang

Em suas veias corre
            Bbm Cm
Muito pouco sangue

Mas seu coração balança a um
      Bbm  Cm
Samba de tamborim
```

```
Bbm Eb
       Bbm         Eb
Entre acordes dissonantes
            Bbm        Eb
Pelos cinco mil alto-falantes
              Bbm
Senhoras e senhores!!!
                 Eb
Ele põe os olhos grandes
      Bbm
Sobre mim

Eb           Bbm    Eb
   Viva Iracema-ma-ma
             Bbm     Eb
Viva Ipanema-ma-ma-ma-ma
          Bbm    Eb
Viva Iracema-ma-ma
             Ab        Cm
Viva Ipanema-ma-ma-ma-ma
```

Fonte: Cifra club[13].

Após encontrar o padrão (Quadro 2) e a sequência (Quadro 4), para conseguir generalizar e encontrar um termo geral para o padrão encontrado, sem utilizar teorias musicais, foi feita uma numeração para os acordes de 1 a 4 respeitando a ordem em que aparecem, como mostrado no Quadro 6.

Quadro 6 - Numeração dos acordes.

Acorde	Numeração
Bbm(Sí bemol menor)	1
Cm (Dó menor)	2
Eb (Mi bemol)	3
Ab (Lá bemol)	4

Fonte: As autoras (2024).

A partir do Quadro 6, foram substituídos os acordes do padrão do Quadro 4 e se obteve um padrão numérico apresentado no Quadro 7. Foi obtida também a sequência numérica, substituindo os acordes pela numeração como mostra o Quadro 8.

Quadro 7 - Padrão numérico.

1,2,1,2,1,2,1,2, 1,3,1,3,1,3,1,3,1,3, 3,1,3,1,3,1,3,4,2

Fonte: As autoras (2024).

[13] Disponível em https://www.cifraclub.com.br/caetano-veloso/tropicalia/ Acesso em 20 de novembro de 2023.

Quadro 8 - Sequência numérica.

Sn = 1,2,1,2,1,2,1,2, 1,3,1,3,1,3,1,3,1,3, 3,1,3,1,3,1,3,4,2,1,2,1,2,1,2,1,2, 1,3,1,3,1,3,1,3,1,3, 3,1,3,1,3,1,3,4,2, 1,2,1,2,1,2,1,2, 1,3,1,3,1,3,1,3,1,3, 3,1,3,1,3,1,3,4,2

Fonte: As autoras (2024).

A partir disso iniciou-se tentativas para encontrar o termo geral da sequência (Quadro 8). Entretanto, como o padrão encontrado possui 27 termos, e é composto por 4 números naturais, foram encontradas dificuldades para descobrir um termo geral que contemplasse toda a sequência. Diante disso, o padrão numérico foi dividido em 4 blocos, para facilitar a dedução do termo geral, assim sendo, foram encontrados 4 termos gerais.

Os blocos foram divididos de acordo com as repetições que existem dentro do padrão. Além disso, o padrão se repete a cada três estrofes, ao analisar os blocos notou-se que o bloco 1 (B1) são os acordes referentes a primeira estrofe, o bloco 2 (B2) são os acordes referentes a segunda estrofe e os blocos 3(B3) e 4(B4) são os acordes referentes a terceira estrofe, de cada parte da música.

B1 é formado pelos acordes:

Bbm, Cm, Bbm, Cm, Bbm, Cm,Bbm Cm,

Ao fazer a substituição numérica tem-se:

B1 = 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2

Pode-se observar que os números 1 e 2 se repetem 4 vezes cada um. Como não existe razão na sequência de B1, foi utilizado o módulo do resto para encontrar o termo geral de B1. Sendo assim o termo geral de B1 é (com n começando em 1):

$$an(B1) = (n - 1\backslash mod\ 2) + 1$$

Notou-se que B1 tem 8 termos e que quando n é par o resultado é 2 e quando o n é ímpar o resultado é 1. Exemplos:

Quando n é par:

$$n = 6 \Rightarrow (5\ \backslash mod 2) = 1 + 1 = 2$$

Quando n é ímpar:

$$n = 5 \Rightarrow (4\backslash mod 2) = 0 + 1 = 1$$

B2 é formado pelos acordes:

Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb

Ao fazer a substituição numérica tem-se:

B2 = 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3

Pode-se observar que os termos 1 e 3 se repetem e que não existe razão entre eles. Sendo assim, utilizou-se o módulo do resto da divisão para encontrar o termo geral. Obteve-se o termo geral sendo (com n começando em 1):

$$an(\ B2) = (n - 1 \setminus mod2)\ \cdot\ 2 + 1$$

Notou-se que B2 possui 10 termos e que quando n é par o resultado é 3 e quando n é ímpar o resultado é 1. Segue exemplos:

Quando n é par:

$$n = 8\ \Rightarrow\ (7\setminus mod\ 2)\ = 1\ \cdot\ 2 = 2\ + 1 = 3$$

Quando n é ímpar:

$$n = 7\ \Rightarrow (6\setminus mod2)\ = 0\ \cdot\ 2 = 0\ + 1\ =\ 1$$

B3 é formado pelos acordes:

Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb, Bbm, Eb

Ao fazer a substituição numérica tem-se:

B3 = 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3

Pode-se observar que B3 é parecido com B2, por terem os mesmos números se repetindo, porém, a ordem é inversa. É possível observar que 3 e 1 se repetem e não possuem razão, logo para encontrar o termo geral utilizou-se o módulo do resto da divisão. Obteve-se o termo geral (com n começando em 1):

$$an(B3) =\ (n\setminus mod\ 2)\ \cdot\ 2 + 1$$

Notou-se que B3 possui 7 termos, e quando n é par o resultado é 3 e quando o n é ímpar o resultado é 1. Segue exemplos:

Quando n é par:

$$n = 6\ \ \Rightarrow\ (6\setminus mod2)\ = 0 \cdot\ 2 = 0\ + 1 = 1$$

Quando n é ímpar:

$$n = 7\ \Rightarrow\ (7\setminus mod\ 2)\ = 1\ \cdot\ 2 = 2\ + 1 = 3$$

B4 é formado pelos acordes:

Ab, Cm

Ao fazer a substituição numérica tem-se:

B4 = 4, 2

Notou-se que B4 é composto por 4 e 2 e utilizou-se o módulo do resto da divisão para encontrar o termo geral e obteve-se:

$$an(B4) =\ (n\setminus mod\ 2\ )\ \cdot\ \ 2 + 2$$

Pode-se observar que B4 tem dois termos e que quando n é par o an é 2 e quando o n é ímpar o resultado é 4. Segue exemplos:

Quando n é par:

$$n = 2 \Rightarrow (2 \backslash mod\ 2) = 0 \cdot 2 = 0 + 2 = 2$$

Quando n é ímpar:

$$n = 1 \Rightarrow (1 \backslash mod\ 2) = 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$$

Quando se analisa o padrão encontrado como um todo, tem-se que ele se repete 3 vezes e temos 8 termos de B1, 10 termos de B2, 7 termos de B3 e 2 termos de B4. Ao tentar encontrar um termo geral para o padrão, obteve-se:

$$3 \cdot \{8 \cdot B1 + 10 \cdot B2 + 7 \cdot B3 + 2 \cdot B4\}$$

$$\Downarrow$$

$$Zn = 3 \cdot \{8 \cdot [(n-1 \backslash mod\ 2) + 1] + 10 \cdot [(n-1 \backslash mod\ 2) \cdot 2 + 1] + 7 \cdot [(n \backslash mod\ 2) \cdot 2 + 1]$$

$$+2 \cdot [(n \backslash mod\ 2) \cdot 2 + 2]$$

Ao tentar simplificar Zn, não foram obtidos resultados satisfatórios, por não conseguir utilizar a propriedade da distributividade, e nenhuma outra. Observou-se que também seria complicado para um estudante do ensino básico, manipular Zn, e poderia deixar de ser uma atividade interessante e instigante de ser realizada. Por esse motivo decidiu-se continuar fazendo a análise em blocos.

B1 por se repetir oito vezes pode-se escrever:

$$an(B1) = 8 \cdot [(n - 1 \backslash mod\ 2) + 1]$$

$$\Downarrow$$

$$an(B1) = [8 \cdot (n-1 \backslash mod\ 2) + 8]$$

Substituindo $(n-1 \backslash mod\ 2)$ por x e $an(B1)$ por y tem-se:

$$y = 8x + 8$$

Como x é $(n-1 \backslash mod\ 2)$ ele só pode assumir 2 valores 0 e 1. Como agora não está sendo analisado o $an(B1)$ e sim $(n-1 \backslash mod\ 2)$, tem-se que quando n for par $(n - 1 \backslash mod\ 2) = 1$ e quando n for ímpar $(n-1 \backslash mod\ 2) = 0$.

B2 por se repetir 10 vezes pode-se escrever:

$$an(B2) = 10 \cdot [(n - 1 \backslash mod\ 2) \cdot 2 + 1]$$

$$\Downarrow$$

$$an(B2) = [(n - 1 \backslash mod\ 2) \cdot 20 + 10]$$

Substituindo $an(B2)$ por w e $(n-1 \backslash mod\ 2)$ por z tem-se:

$$w = 20z + 10$$

Assim como em B1, como w é $(n - 1 \backslash mod\ 2)$ ele só pode assumir 2 valores 0 e 1. Como agora não está sendo analisado o $an(B2)$ e sim $(n - 1 \backslash mod\ 2)$, tem-se que quando n for par $(n - 1 \backslash mod\ 2) = 1$ e quando n for ímpar $(n - 1 \backslash mod\ 2) = 0$.

Por B3 se repetir 7 vezes pode-se escrever:

$$an\ (B3) = 7 \cdot\ [\ (n \backslash\ mod\ 2)\ \cdot\ 2 + 1\ ]$$

$$\Downarrow$$

$$an\ (B3) =\ [\ (n \backslash\ mod\ 2)\ \cdot\ 14 + 7\ ]$$

Substituindo $an\ (B3)$ por m e $(n \backslash\ mod\ 2)$ por l tem -se:

$$m = 14l + 7$$

Como l é $(n \backslash mod\ 2)$ ele só pode assumir 2 valores 0 e 1. Como agora não está sendo analisado o $an(B3)$ e sim $(n \backslash mod\ 2)$, tem-se que quando n for par $(n \backslash mod\ 2) = 0$ e quando n for ímpar $(n \backslash mod\ 2) = 1$.

Por B4 possui 2 termos pode-se escrever:

$$an(B4) = 2\ \cdot\ [\ (n \backslash\ mod\ 2\ )\ \cdot\ 2 + 2]$$

$$\Downarrow$$

$$an(B4) =\ [\ (n \backslash\ mod\ 2\ )\ \cdot\ 4 + 4]$$

Substituindo $an(B4)$ por r e $(n \backslash\ mod\ 2\ )$ por s tem-se:

$$r = 4s + 4$$

Assim como em B1 e B2, como como s é $(n \backslash mod\ 2)$ ele só pode assumir 2 valores 0 e 1. Como agora não está sendo analisado o $an(B3)$ e sim $(n \backslash mod\ 2)$, tem-se que quando n for par $(n \backslash mod\ 2) = 0$ e quando n for ímpar $(n \backslash mod\ 2) = 1$.

A partir do que foi descrito é viável afirmar que é possível estabelecer relações entre álgebra e música por meio da MM. Nesta pesquisa desenvolveu-se modelos através de cifras musicais que resultaram neste momento em funções do primeiro grau, as quais serão validadas (ou não) na próxima seção.

Para mais, os modelos desenvolvidos a partir das cifras musicais concedem oportunidades para enriquecer o ensino de álgebra e música na sala de aula. Essa abordagem pode ser incluída à sala de aula, proporcionando aos estudantes uma forma envolvente de compreender os conceitos algébricos por meio de contextos musicais familiares.

Significação e expressão

Para assegurar a validade do modelo, torna-se necessário avaliar o grau de concordância entre os modelos e as sequências encontradas anteriormente. A sequência de B1 é apresentada no Quadro 9.

Quadro 9 - Sequência de B1.

N	Na	Acorde
1	1	Bbm
2	2	Cm
3	1	Bbm
4	2	Cm
5	1	Bbm
6	2	Cm
7	1	Bbm
8	2	Cm

Fonte: As autoras (2024).

O termo geral de B1 é

$$y = 8x + 8$$

Sendo que y é $an(B1)$ e x é $(n - 1 \backslash mod\ 2)$, para verificar a veracidade do modelo de B1, foi feita a substituição de x e checado se o y seria o correspondente, comparando o Quadro 9. Para isso foi levado em consideração as particularidades de $(n \backslash mod\ 2)$ o qual se está chamando de x . Então se *n* for par $x = 1$ e se *n* for ímpar $x = 0$. A partir disso foi mostrado a invalidade do modelo de B1 como mostra o Quadro 10.

Quadro 10 - Sequência de y.

n	y = 8x + 8	Acorde
1	8	Não há acorde referente na sequência
2	16	Não há acorde referente na sequência
3	8	Não há acorde referente na sequência
4	16	Não há acorde referente na sequência
5	8	Não há acorde referente na sequência
6	16	Não há acorde referente na sequência
7	8	Não há acorde referente na sequência

8	16	Não há acorde referente na sequência

Fonte: As autoras (2024).

Pode-se perceber que os valores de y encontrados não pertencem a sequência de B1, portanto o modelo $y = 8x + 8$ não é válido. Isso se deve pelo número 8, que representa a quantidade de termos, ter sido multiplicado pelo termo geral o que acabou modificando-o. Pois percebe-se que quando n é ímpar o y é 8 e quando n é o par y é 16, ao observar o Quadro 9, conclui-se que os valores referentes ao termo geral são oito vezes maiores que os correspondentes no Quadro 10. Sendo assim volta-se ao primeiro termo geral encontrado:

$$an(B1) = (n - 1 \backslash mod\ 2) + 1$$

A validação do modelo foi feita a partir da substituição dos valores de n, como mostra o Quadro 11, e verificando se correspondia aos valores da sequência expostos no Quadro 9. A partir disso foi verificado que o modelo $an(B1) = (n - 1 \backslash mod\ 2) + 1$ é válido, pois os valores correspondentes ao Quadro 9 são iguais.

Quadro 11 - Sequência de an(B1).

N	an(B1) = (n-1 \ mod 2) + 1	Acorde
1	1	Bbm
2	2	Cm
3	1	Bbm
4	2	Cm
5	1	Bbm
6	2	Cm
7	1	Bbm
8	2	Cm

Fonte: As autoras (2024).

Foi feito o mesmo processo de verificação nos blocos seguintes

O termo geral de B2 é

$$w = 20z + 10$$

Sendo que w é $an(B2)$ e z é $(n - 1 \backslash mod\ 2)$, para verificar a veracidade do modelo de B2, foi feita a substituição de z e checado se o w seria o correspondente a sequência. Para isso foi levado em consideração as particularidades de $(n - 1 \backslash mod\ 2)$

o qual se está chamando de z . Então se n for par $z = 1$ e se n for ímpar $z = 0$. A partir disso foi percebida a invalidade do modelo de B2.

Pode-se perceber que os valores de w encontrados não pertencem a sequência de B2, portanto o modelo $w = 20z + 10$ não é válido. Isso se deve pelo número 10, que representa a quantidade de termos, ser multiplicado pelo termo geral, o que acabou modificando-o. Pois percebe-se que quando n é ímpar o z = 10 e quando n é o par z = 30, conclui-se que os valores referentes ao termo geral são 10 vezes maiores que os correspondentes da sequência. Sendo assim, volta-se ao primeiro termo geral encontrado:

$$an(\ B2) = (n - 1 \setminus mod2)\ \cdot\ 2 + 1$$

A validação do modelo foi feita a partir da substituição dos valores de n, e verificando se correspondia aos valores da sequência. A partir disso foi verificado que o modelo $an(\ B2) = (n - 1 \setminus mod2)\ \cdot\ 2 + 1$ é válido, pois os valores são correspondentes a sequência.

O termo geral de B3 é

$$m = 14l + 7$$

Sendo que m é $an(B3)$ e l é $(n \setminus mod\ 2)$, para verificar a veracidade do modelo de B3, foi feita a substituição de l e checado se o m seria o correspondente. Para isso foi levado em consideração as particularidades de $(n \setminus mod\ 2)$ o qual se está chamando de l . Então se n for par $l = 0$ e se n for ímpar $l = 1$. A partir disso foi mostrado a invalidade do modelo de B3.

Pode-se perceber que os valores de m encontrados não pertencem a sequência de B3, portanto o modelo $m = 14l + 7$ não é válido. Isso se deve pelo número 7, que representa a quantidade de termos, ser multiplicado pelo termo geral, o que acabou modificando-o. Pois percebe-se que quando n é ímpar m = 21 e quando n é par m = 7, conclui-se que os valores referentes ao termo geral são sete vezes maiores que os correspondentes a sequência. Sendo assim volta-se ao primeiro termo geral encontrado:

$$an(B3) =\ (n - 1 \setminus mod\ 2)\ \cdot\ 2 + 1$$

A validação do modelo foi feita a partir da substituição dos valores de n, e verificando se correspondia aos valores da sequência. A partir disso foi verificado que o modelo $an(B3) =\ (n - 1 \setminus mod\ 2)\ \cdot\ 2 + 1$é válido, pois os valores são correspondentes a sequência.

O termo geral de B4 é

$$r = 4s + 4$$

Sendo que r é $an(B4)$ e s é $(n \backslash mod\ 2)$, para verificar a veracidade do modelo de B4, foi feita a substituição de s e checado se o r seria o correspondente. Para isso foi levado em consideração as particularidades de $(n \backslash mod\ 2)$ o qual se está chamando de *s*. Então se *n* for par $s = 0$ e se *n* for ímpar $s = 1$. A partir disso foi mostrado a invalidade do modelo de B4.

Pode-se perceber que os valores de *m* encontrados não são correspondentes a sequência de B4, portanto o modelo $r = 4s + 4$ não é válido. Isso se deve pelo número 2, que representa a quantidade de termos, ser multiplicado pelo termo geral, o que acabou modificando-o. Pois percebe-se que quando *n* é ímpar r = 8 e quando *n* é par r = 4, conclui-se que os valores referentes ao termo geral são duas vezes maiores que os correspondentes. Sendo assim volta-se ao primeiro termo geral encontrado:

$$an(B4) = (n \backslash\ mod\ 2\ ) \cdot\ 2 + 2$$

A validação do modelo foi feita a partir da substituição dos valores de *n*, e verificando se correspondia aos valores da sequência expostos na tabela 13. A partir disso foi verificado que o modelo $an(B4) = (n \backslash\ mod\ 2\ ) \cdot\ 2 + 2$ é válido, pois os valores são correspondentes a sequência.

Dessa forma, conclui-se que as funções do primeiro grau encontradas na busca pela generalização não são modelos válidos para o estudo em questão, mas os termos gerais (equações) inicialmente encontrados, estes sim, refletem um modelo adequado à cada uma das estrofes estudadas. A partir destes resultados e das relações aqui estabelecidas, pode-se traçar algumas implicações pedagógicas para o ensino e aprendizagem de álgebra na Educação Básica.

Com o desenvolvimento dos modelos matemáticos para representar as sequências dos acordes, obteve-se equações do primeiro grau. Este resultado concede oportunidades para a sala de aula. A obtenção de equações de primeiro grau a partir de padrões musicais é uma maneira concreta de comprovar como a Matemática está ligada a situações reais e que a Matemática não se limita somente a números e fórmulas abstratas, mas pode estar conectada de forma intrínseca a áreas supostamente distintas, como a música.

O professor pode desenvolver atividades práticas em sala de aula para apresentar como os padrões musicais se traduzem em equações de primeiro grau e como resolver essas equações para encontrar valores específicos relacionando-os aos acordes.

Explorar padrões musicais e transformá-los em equações de primeiro grau é um convite ao pensamento crítico e à criatividade dos estudantes. A música é uma expressão artística que propicia inúmeras interpretações. Ao analisar os padrões, os estudantes são desafiados a buscarem maneiras criativas para encontrar padrões em estruturas matemáticas coerentes.

Além disso, essa abordagem adéqua-se a vertente da Modelação do pensamento algébrico, abordado por Blanton e Kaput (2005) e Radford (2009), citados por Almeida e Santos (2017), a qual é considerada como habilidade de formalizar e expressar generalizações, as quais estão relacionadas a generalizações em situações do dia a dia.

Ao aplicar essa abordagem à música, os estudantes aprendem a representar padrões melódicos por meio de equações de primeiro grau e, também, desenvolvem a habilidade de encontrar regularidades, expressá-las numericamente e extrair conclusões gerais. Esse processo vai além da mera manipulação de equações, estimulando uma compreensão mais profunda da Matemática enquanto instrumento para descrever e interpretar o mundo ao nosso redor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo *compreender como a música, por meio da criação de modelo, pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes da Educação Básica.* Para isso foi feita uma análise de cifras de músicas populares e criados modelos a partir dos padrões dos acordes que foram encontrados.

A partir das fases de Modelagem Matemática (MM) designadas por Biembengut (2014, 2016), a criação, desenvolvimento e validação dos modelos matemáticos partindo de sequências dos padrões dos acordes evidenciam conexão da álgebra com a música. Apesar da ideia inicial de criar um modelo para a música inteira não ter sido contemplada e os modelos finais terem sido invalidados, os resultados da pesquisa foram satisfatórios.

Os modelos iniciais dos blocos foram validados e o processo da pesquisa é o mais importante, e pode ser utilizado em sala de aula. A pesquisa possui implicações pedagógicas que podem proporcionar caminhos para despertar o interesse e aprendizado dos estudantes em relação à Matemática, destacando sua eficiência e importância em contextos diversos, como a música, e incentivando a percepção da Matemática como um instrumento versátil na compreensão do mundo.

Com base na pesquisa, pode-se afirmar que a MM pode ser uma abordagem eficiente para o ensino da álgebra e o desenvolvimento pensamento algébrico, principalmente pela vertente da modelação, que é considerada como habilidade de fazer generalizações com situações cotidianas. A vertente da modelação mostrou-se ser uma junção da Modelagem Matemática e do pensamento algébrico.

A partir dos modelos criados, como perspectiva de continuidade, pode-se desenvolver uma proposta pedagógica para o ensino de sequências e/ou equações de primeiro grau. Além disso, pode-se pensar em enumerar os acordes de maneiras diferentes, com singularidades ou restrições, como somente números primos ou somente números pares, o que pode aumentar o desafio da abordagem.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: Proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de doutorado em Ensino das Ciências e Matemática. UFRPE, Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p. 34-60, jan./jun. 2017.

BIEMBENGUT, M. S. **Mapeamento na Pesquisa Educacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática**: no Ensino Fundamental. Blumenau: Edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto Codex: Porto Editora, 2010.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In: **Quadrante,** v. VXI, n. 2. Portugal, 2007.

FADIN, C. **Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental**. 2021. 164 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

MED, B. **Teoria da música**. 4. ed. Brasília: Revista e Ampliada, 1996.

PEREIRA, C. A. Dificuldades do ensino da álgebra no ensino fundamental: algumas considerações. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**, Medianeira, v. 8, n. 15, 21 nov. 2017.

PEREIRA, A. A.; MADRUGA, Z. E. de F. Música e Modelagem Matemática: Representação de uma escala musical por meio de modelo matemático. **Ensino Da Matemática em Debate,** v. 7, n. 1, p. 1–33, 2020.

PONTES, F. L.; MADRUGA, Z. E. de F. Música e Modelagem Matemática: representações de notas musicais por meio da função seno. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, [S. l.], v. 2, n. 4, p. 79–95, 2019.

RIBAS, S. C. A. VELEDA, G. G. **Modelagem Matemática:** Desenvolvendo a autonomia do saber a partir do tema vida saudável. In: Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2014. Curitiba: SEED/PR., v.1. (Cadernos PDE), 2016.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, 2000.