BOLETIM GEPEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Um Estudo Das Sequências Derivadas De Fibonacci Vinculado Ao Fractal De Barnsley

Renata Passos Machado Vieira[1]
Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC)

Milena Carolina dos Santos Mangueira[2]
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

Francisco Regis Vieira Alves[3]
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

Paula Maria Machado Cruz Catarino[4]
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

RESUMO

Neste artigo, trazemos uma análise referente ao processo histórico de algumas sequências lineares recorrentes, a fim de proporcionar a sua compreensão evolutiva e matemática aos professores de matemática. Assim, fundamentada na sequência de Fibonacci, foi possível investigar outras sequências abordadas neste artigo, apresentando um estudo e aplicação em torno de sequências numéricas recorrentes. Por conseguinte, é apresentada a teoria dos fractais de Barnsley, onde por meio da sua visualização geométrica, analisou-se a similaridade de cada uma dessas sequências derivadas dos números de Fibonacci. Contudo, é feito um estudo de caso dessas sequências, relacionando-a com a sequência de Fibonacci, em relação aos seus termos iniciais e coeficientes de recorrência e, interligando com a tecnologia dos fractais gerados nesta pesquisa. Por fim, esta pesquisa pode proporcionar um estudo para formação de professores, no âmbito de sequências, permitindo uma forma de visualização, ampliando assim a investigação em torno desses números e evolução dos mesmos.

Palavras-chave: Fractal de Barnsley; Sequência de Fibonacci; Sequências Derivadas; Sequências Lineares.

---

[1]Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino RENOEN-Polo Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora da Secreatia de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Sargento Hermínio Sampaio, 1415, Monte Castelo, Fortaleza, Ceará, Brasil. CEP: 60326-515. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1966-7097. E-mail: re.passosm@gmail.com.

[2]Mestre em Ensino de Ciências e Matemática- Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Endereço para correspondência: Av. Sargento Hermínio Sampaio, 1415, Monte Castelo, Fortaleza, Ceará, Brasil. CEP: 60326-515. ORCID: http://orcid.org/ 0000-0002-4446-155X. E-mail: milenacarolina@gmail.com.

[3]Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática –Universidade Federal do Ceará. Coordenador do Doutorado acadêmico em Ensino REDE Nordeste –RENOEN –Polo IFCE (IFCE), Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico –CNPq –PQ2, Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Monsenhor Otávio de Castro, 100, Fatima, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60.340-000. ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-3710-1561. E-mail: fregis@gmx.fr.

[4]PhD em Matemática-University of Essex (UE). Professora associada da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal. Endereço para correspondência: Rua Quinta de Prados, 5000-801, Vila Real, Portugal. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6917-5093. E-mail: pcatarino23@gmail.com.

A Study of Sequences Derived from Fibonacci Linked to the Barnsley Fractal

ABSTRACT

In this article, we bring an analysis referring to the historical process of some recurrent linear sequences, in order to provide their evolutionary and mathematical understanding to mathematics teachers. Thus, based on the Fibonacci sequence, it was possible to investigate other sequences addressed in this article, presenting a study and application around recurrent numerical sequences. Therefore, Barnsley's theory of fractals is presented, where through its geometric visualization, the similarity of each of these sequences derived from the Fibonacci numbers was analyzed. However, a case study of these sequences is made, relating it to the Fibonacci sequence, in relation to its initial terms and recurrence coefficients and, interconnecting with the technology of the fractals generated in this research. Finally, this research can provide a study for teacher training, within the scope of sequences, allowing a form of visualization, thus expanding the investigation around these numbers and their evolution.

Keywords: Barnsley Fractal; Fibonacci sequence; Derived Sequences; Linear Sequences.

Un estudio de secuencias derivadas de Fibonacci vinculadas al fractal de Barnsley

RESUMEN

En este artículo traemos un análisis referente al proceso histórico de algunas sucesiones lineales recurrentes, con el fin de brindar su comprensión evolutiva y matemática a los profesores de matemática. Así, con base en la sucesión de Fibonacci, fue posible investigar otras sucesiones abordadas en este artículo, presentando un estudio y aplicación en torno a sucesiones numéricas recurrentes. Por ello, se presenta la teoría de los fractales de Barnsley, donde a través de su visualización geométrica se analizó la similitud de cada una de estas sucesiones derivadas de los números de Fibonacci. Sin embargo, se realiza un estudio de caso de estas sucesiones, relacionándola con la sucesión de Fibonacci, en relación a sus términos iniciales y coeficientes de recurrencia y, interconectando con la tecnología de los fractales generados en esta investigación. Finalmente, esta investigación puede brindar un estudio para la formación docente, en el ámbito de las secuencias, permitiendo una forma de visualización, ampliando así la investigación en torno a estos números y su evolución.

Palabras clave: Fractal de Barnsley; Secuencia Fibonacci; Secuencias Derivadas; Secuencias lineales.

INTRODUÇÃO

A sequência de Fibonacci, é uma das mais conhecidas sequências lineares, sendo, portanto, objeto de estudo há muitos anos, até os dias de hoje. Originada do problema dos coelhos imortais, essa sequência é mostrada em muitos trabalhos de modo sucinto e trivial, não proporcionando ao leitor uma compreensão sobre como essa pode originar outras sequências, a partir de sua evolução.

Diante disso, pode-se perceber o surgimento de diversas sequências lineares e recorrentes, em consequência da mobilização de matemáticos do mundo inteiro com o viés de fornecer novos modelos generalizados. Assim, será realizado um estudo a partir da sequência de Fibonacci, estabelecendo uma fórmula de recorrência generalizada, em que é possível originar outras sequências, tais como: sequência de Lucas, Pell, Jacobsthal e Oresme.

Segundo Alves (2018), quando se interliga o objeto matemático com a área de ensino, percebe-se no Brasil cada vez mais problemas referentes ao processo de formação de professores de matemática, apresentando obstáculos que necessitam que sejam superados. Com isso, pesquisas na área de pós-graduação estão sendo cada vez mais desenvolvidas, além da utilização de recursos computacionais como forma de auxiliar esse processo.

Ainda nesse sentido as Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação vem avançando cada vez mais, adquirindo assim, bons resultados em situações de ensino e aprendizagem, quando vinculadas à metodologias de ensino ao serem empregadas em sala de aula. Inúmeras pesquisas estão utilizando recursos tecnológicos como auxílio para visualizar determinados conteúdos matemático. A exemplificar temos o trabalho de Alves e Barros (2019), em que é utilizado o GeoGebra como uma ferramenta para visualizar os números figurados, sendo uma alternativa com o objetivo de facilitar o processo de ensino.

Um recurso que vem sendo bastante utilizado atualmente é a teoria dos fractais, sendo uma alternativa de visualização de sequências lineares e recorrentes. Os fractais apresentam grande importância na área de investigação matemática podendo assumir uma infinidade de formas e difíceis conclusões para elas (BURTON, 2009).

Um fractal consiste num objeto geométrico podendo ser dividido em diversas partes, sendo cada uma dessas semelhante à original. Os fractais aproximados possuem a característica de auto-similaridade ao longo de uma extensa faixa de escalas, como é o caso das samambaias, em que apresentam os folíolos semelhantes à folha em geral. Assim, essa teoria pode ser considerada como representações abstratas de estruturas reais existentes na natureza, como é o caso da samambaia de Barnsley. Segundo Schwingel (2016) o fractal de Barnsley "ressalta a beleza e a riqueza da matemática por trás das formas naturais, e pode ser ilustrado através de processos elementares" (SCHWINGEL, 2016, p. 9).

A samambaia de Barnsley, ou fractal de Barnsley, foi criada, inicialmente, pelo matemático Michael Barnsley, sendo, portanto, uma função fractal que simula a criação de uma estrutura parecida com a planta *Asplenium adiantum-nigrum*. O interessante em utilizar conceito sobre os fractais é que esses funcionam em qualquer escala, podendo sofrer algumas adaptações em seu código fonte, como é o caso dessa pesquisa. Além da análise matemática, é realizada uma outra análise em relação ao fractal de Barnsley, utilizando recursos computacionais para auxiliar nessa pesquisa (BARNSLEY, 2000).

Contudo, são realizados neste trabalho, estudos de caso diante das sequências derivadas de Fibonacci, utilizando a tecnologia do fractal de Barnsley, como uma ferramenta auxiliar, visando identificar e analisar as semelhanças dessas sequências lineares e recorrentes por meio de uma atividade proposta aos professores em formação inicial de Matemática. À vista disso temos então o objetivo deste estudo de caso: analisar as sequências derivadas de Fibonacci, por meio dos fractais de Barnsley.

Vale destacar os trabalhos de Alves (2022) e Bairral (2022) em que tratam de pesquisas referente ao desenvolvimento profissional do professor, seja por meio de leituras e escritas como por meio de avanços matemáticos propostos para sala de aula.

Nas próximas seções é realizado um estudo referente às sequências lineares e recorrentes, estudando ainda a parte histórica das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal e Oresme. Em seguida, é feita uma generalização da fórmula de recorrência matemática dos números de Fibonacci, analisando as sequências que são derivadas desses números. Por fim, é elaborada uma atividade para analisar o fractal de Barnsley com base nas similaridade dos fractais gerados das sequências estudadas nesta pesquisa.

METODOLOGIA

A presente pesquisa visa o estudo das sequências lineares e recorrentes, derivadas de Fiboancci, utilizando a ferramenta do fractal de Barnsley para analisar as suas respectivas semelhanças. Com isso, temos a presença dos recursos tecnológicos para a formação dos professores de matemática, promovendo novas alternativas e conhecimentos didáticos.

Romero e Batallanos (2019) "na Educação Matemática, são reconhecidos os esforços de orientação cognitiva para superar essa situação e procurar diminuir progressivamente a distância entre as realidades interna e externa da compreensão" (ROMERO; BATALLANOS, 2019, p. 100, tradução nossa). Assim, esta investigação segue a estrutura de um estudo de caso, na forma qualitativa e descritiva, seguindo as seguintes etapas: desenho, condução, análise das evidências e escrita (YIN, 2010).

Durante o desenho do estudo de caso, é realizado a organização de ideias que apresentem a compreensão necessária, ou ainda, estruturas cognitivas que orientem a recolha de dados. (STAKE, 1999). Diante disso, realiza-se um plano de ação de como ocorrerá a investigação, mapeando os levantamentos bibliográficos referentes às sequências lineares, bem como ao estudo dos fractais para serem desenvolvidos posteriormente.

A condução refere-se aos instrumentos de coleta de dados da pesquisa, definindo assim os referenciais teóricos que serão utilizados para o estudo do pesquisador, por meio de observações e documentações. Logo, é realizado um estudo inerente às sequências lineares e recorrentes, tendo como base a sequência de Fibonacci (YIN, 2010). A partir daí, são realizados estudos históricos, evolutivos e matemáticos desses números, para que sejam analisados posteriormente.

Na fase de análise de evidências não existe um padrão adotado pelos pesquisadores, contudo a análise de dados deve mostrar o contexto e a riqueza de dados, assim como o encadeamento das evidências coletadas (LUKOSEVICIUS; MARCHISOTTI; SOARES, 2018). Nessa pesquisa, são elaborados os fractais de Barnsley de cada uma das sequências estudadas, relacionando-a com os números de Fibonacci, com o viés de verificar e apresentar as semelhanças desses termos.

Por fim, temos a escrita, onde são relatadas as observações diante dos fractais gerados e das semelhanças matemática das sequências derivadas de Fibonacci, realizando assim o estudo de caso desta pesquisa (YIN, 2010).

SEQUÊNCIAS LINEARES E RECORRENTES

Uma sequência numérica é entendida como uma lista infinita, ordenada por números reais, onde um termo depende do seu antecessor. Já uma sequência linear recursiva é aquela em que apresenta uma quantidade infinita de termos, sendo estes gerados por uma recorrência linear chamada de fórmula de recorrência (ZIERLER, 1959) em que permite a realização do cálculo dos seus termos antecessores. Em toda sequência linear é necessário conhecer os seus termos iniciais.

Lima et. al (2006) apresentam as ordens de uma sequência linear recursiva, em que para uma primeira ordem, existe uma recorrência expressa por $x_{\{n+1\}}$ em função de $x_{\{n\}}$. Ela é dita linear se, e somente se, essa função for do primeiro grau. As sequências de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, têm recorrências da forma $x_{\{n+2\}} + px_{\{n+1\}} + qx_{\{n\}} = 0$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q > 0$, pois caso $q = 0$ tem-se uma recorrência de primeira ordem. Para cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes será associada a equação do segundo grau, $x^2 + px + q = 0$, denominada equação característica. De forma análoga, as sequências de terceira ordem homogêneas, com coeficientes constantes, têm recorrências da forma: $x_{\{n+3\}} + rx_{\{n+2\}} + px_{\{n+1\}} + qx_{\{n\}} = 0$, em que $r, p, q \in \mathbb{Z}$, com $p > 0$ ou $q > 0$. Cada recorrência linear de terceira ordem homogênea, com coeficientes constantes será associada a equação do terceiro grau $x^3 + rx^2 + px + q = 0$, denominada de equação característica.

Essas sequências são facilmente encontradas na área de matemática, podendo ser aplicadas em várias áreas, tais como na biologia, física, ciência da computação, entre outras.

Sequência de Fibonacci

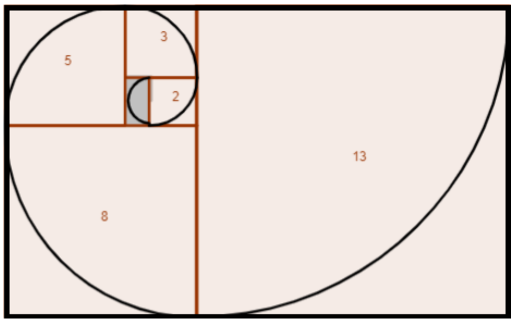
A sequência de Fibonacci foi criada pelo matemático Leonardo Pisano (1180-1250) conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio" nasceu em Pisa na Toscânia (Itália) (ver Figura 1). Leonardo viajou pela Síria, Egito, Grécia e etc adquirindo um conhecimento matemático do mundo árabe, ele iniciou os seus estudos de matemática com professores islâmicos, onde teve a oportunidade de ter contato com os procedimentos matemáticos orientais, com os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas.

Figura 1 - Leonardo Pisano (Fibonacci).

Fonte: Silva (2017, p. 3).

Em 1200 ele voltou a Pisa e passa 25 anos escrevendo trabalhos com todo conhecimento adquirido em suas viagens. Fibonacci escreveu 5 obras, sendo quatro livros e uma carta e, dentre um dos livros, em 1202, ele escreve um dos problemas proposto: "*Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?*" (Boyer, 2006) que ao responder essa pergunta encontra-se uma sequência de números, sequência esta que será chamada de Sequência de Fibonacci que satisfaz a seguinte relação de recorrência: $F_{\{n\}} = F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, com $F_{\{0\}} = 0$ e $F_{\{1\}} = 1$ os seus valores iniciais. Portanto, a situação-problema dos coelhos, a sequência e a recursividade matemática marcam a gênese do Método de Fibonacci. Existe uma representação geométrica desses números, onde são inseridos dois quadrados com lados inicialmente iguais a 1, com isso, é inserido um novo quadrado de acordo com o maior lado do polígono formado com a junção dos dois quadrados iniciais, dando o nome de espiral de Fibonacci ou espiral áurea de Fibonacci, como mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Espiral de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Sequência de Lucas

A sequência de Lucas foi criada pelo matemático francês Édouard Anatole Lucas (1842-1891) (ver Figura 3), em que realizou algumas contribuições matemáticas como a conhecida torre de Hánoi[5], proporcionando métodos para processo de ensino de função exponencial entre outros assuntos matemáticos. Lucas foi professor de matemática das escolas Lycée of Moulins, Lycéés Saint-Louis e Lycéé Charlemagne. Serviu ainda o exército na artilharia após a França ter sido derrotada durante a Guerra Franco-Prussiana (SILVA, 2017).

Provou uma forma recíproca do teorema de Fermat e vários testes para os números primos baseado em sequências lineares e recorrentes, sendo, portanto, capaz de

[5] A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático, por meio de três pinos, contendo peças sobre um dos pinos. O jogo consiste em movimentar as peças, em ordem crescente de diâmetro, passando pelos pinos, de modo que uma peça maior não fique sobre a peça menor em nenhuma hipótese (Piaget, 1977).

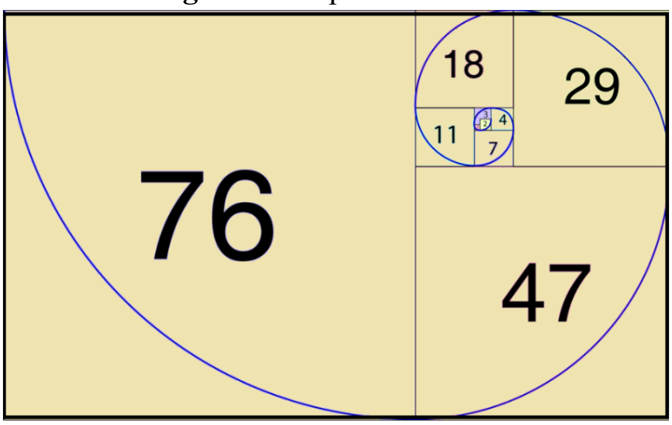
estabelecer uma relação do 12° número primo de Mersenne: $2^{127}-1=170141183460469231687303715884104727$ (EVES, 1969). Um número de 39 dígitos que permaneceu como sendo o maior número primo por muitos anos, e sendo o maior número primo encontrado sem o auxílio de recursos computacionais e tecnológicos.

Figura 3 - Édouard Anatole Lucas.

Fonte: Silva (2017, p. 21).

Em 1876, motivado por assuntos de divisibilidade e fatoração, estudou a sequência de Fibonacci e em uma de suas generalizações, criou a sequência de Lucas, onde alterou os dois valores iniciais para 2 e 1. Os números de Lucas formam uma sequência de segunda ordem, linear e recorrente, possuindo a sua fórmula de recorrência $L_{\{n\}}=L_{\{n-1\}}+L_{\{n-2\}}, n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ com $L_{\{0\}}=2$ e $L_{\{1\}}=1$. Uma representação geométrica desses números é dada pelo espiral de Lucas, como mostrado na Figura 4, de modo similar ao espiral de Fibonacci, porém com os quadrados iniciais de lados, respectivamente 2 e 1 (MICHIEL, 2001).

Figura 4 - Espiral de Lucas.



Fonte: Elaborado pelos autores.

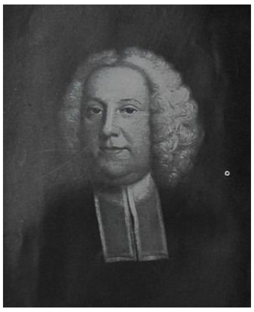
Existe ainda uma relação entre essas duas sequências, obtendo fórmulas matemáticas tais como (CATARINO; BORGES, 2020): $L_{\{n\}} = F_{\{n\}} + 2F_{\{n-1\}}, F_{\{n\}} = \dfrac{L_{\{n-1\}} + L_{\{n-5\}}}{10}$ e $F_{\{n\}} = \dfrac{L_{\{n-1\}} + L_{\{n+1\}}}{5}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Com isso, é possível identificar algumas propriedades que poderão ser investigados em trabalhos posteriores.

Sequência de Pell

O nome Pell da sequência de Pell veio em função ao matemático inglês John Pell (1611 - 1685) (ver na Figura 5), conhecido por ser extremamente reservado, apesar disso, John Pell era respeitado como um matemático competente e se tornou conhecido muito por suas correspondências com outros sábios europeus e atividades de diversas áreas.

Malcolm (2000) pontua que John Pell vivia em condições difíceis, constantemente sem dinheiro e recursos, isso seria uma possível explicação para tão poucas publicações em seu nome. Mas também, Waker (2011) diz que Pell preferia permanecer no anonimato, assim suas publicações não se evidenciaram tanto quanto os trabalhos de seus contemporâneos. Por fim, Gullberg (1997) esclarece que "embora a sequência de Pell foi nomeada após sua morte, nós não encontramos nenhuma outra boa publicação que enfatize sua real e extensiva contribuição." São quase inexistentes as publicações e relatos sobre sua competência, por isso torna difícil determinar especificamente quais contribuições foram suas (MALCOM, 2000).

Figura 5 - John Pell.



Fonte: Walker (2011, p.150)

Malcolm (2000) diz que "Pell manifestou fidelidade aos métodos didáticos apregoados por Comenius, relativamente ao qual, as crianças devem progredir, em níveis crescentes de gradação, usando em cada etapa, uma precognição existente para o ulterior".

Walker (2011) apresenta que Pell mencionou uma atenção a mais a certos problemas envolvendo tábuas de quadrados, somas de quadrados, primos e compostos, logaritmos e antilogaritmos, etc. No trabalho mais conhecido de Pell, denominado *An introduction to Algebra*, ele explica e discrimina regras para o manuseio e simplificação de equações (ALVES, 2016).

A sequência de Pell possui a sua fórmula de recorrência $P_{\{n\}} = 2P_{\{n-1\}} + P_{\{n-2\}}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ com $P_{\{0\}} = 0$ e $P_{\{1\}} = 1$. Realizando uma comparação da sua recorrência com a sequência de Fibonacci, percebe-se que os seus coeficientes iniciais são iguais a 2 e 1, sendo portanto derivada dos números de Fibonacci.

Sequência de Jacobsthal

A sequência de Jacobsthal, recebe esse nome como referência ao matemático, lembrado na Figura 6, Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números e ex-aluno de Ferdinand G. Frobenius, que foi um dos primeiros a estudar os polinômios de Fibonacci (SIEGMUND-SCHULTZE, 2009). No trabalho de Alves (2017), o autor recorda que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para Normandia e Suíça em 1939 e 1943.

Figura 6 - Erns Erich Jacobsthal.

Fonte: Siegmund-Schultze (2009).

Esses números, possuem a sua fórmula de recorrência dada por: $J_{\{n\}} = J_{\{n-1\}} + 2J_{\{n-2\}}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ com $J_{\{0\}} = 0$ e $J_{\{1\}} = 1$. Assim, observa-se que essa sequência também é derivada da sequência de Fibonacci, diferenciando-a por possuir o segundo coeficiente da recorrência igual a 2, ao contrário dos números de Fibonacci que apresentam o seu coeficiente igual a 1.

Sequência de Oresme

Segundo Horadam (1974) na metade do século XIV o clérigo Nicole Oresme (1320 – 1382), como mostrado na Figura 7, encontrou a soma dos seguintes números racionais $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{8},\frac{4}{16},\frac{5}{32},\frac{6}{64},...,\frac{n}{2^n}$. O autor acrescenta que o Oresme não publicou nenhum desses resultados. Ademais, a referida sequência enigmática possui um caráter, também, de interesse na biologia, na medida em que, a partir dos dois primeiros termos, podemos estimar a quantidade de pais, avós e determinar tal proporção em qualquer geração.

Figura 7 - Nicole Oresme.

Fonte: Mendonça e Neto (2016).

Nicole Oresme é um dos filósofos escolásticos mais eminentes do século XIV. Nasceu por volta de 1320, na Normandia. Estudou Arte com Jean Buridan na Universidade de Paris, onde obteve o título de mestre, tendo, ainda, estudado Teologia no Colégio de Navarra da Universidade de Paris. Tempos depois, assumiu o posto de bispo na cidade de Lisieux. Foi, dentre tantas funções, economista, filósofo, físico, psicólogo, astrônomo, astrólogo e teólogo (CLAGETT, 1964).

Esses números apresentam a sua fórmula de recorrência derivada da sequência de Fibonacci, onde os coeficientes são expressos por 1 e $-\frac{1}{4}$, assim: $O_{\{n\}} = O_{\{n-1\}} - \frac{1}{4}O_{\{n-2\}}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ com $O_{\{0\}} = 0$ e $O_{\{1\}} = \frac{1}{2}$.

A sequência generalizada de Fibonacci

Diante dos estudos referentes às sequências vistas nesta pesquisa, podemos concluir que todas elas são derivadas da fórmula de recorrência da sequência de

Fibonacci, estabelecendo assim uma fórmula generalizada para essa sequência, para que seja possível visualizar melhor essa derivação investigada.

Contudo, podemos generalizar a fórmula de recorrência de Fibonacci como sendo: $F_{\{n\}} = xF_{\{n-1\}} + yF_{\{n-2\}}, n \geq 2$ e a_0, a_1 sendo os termos iniciais da sequência. Assim, é possível estabelecer uma relação para que sejam criadas as sequências estudadas neste trabalho com base na generalização dessa fórmula matemática, como mostrada na Tabela 1, resumindo, portanto, as relações vistas anteriormente em cada um desses números analisados.

Tabela 1 - Sequências derivadas de Fibonacci.

Sequência	**Coeficientes**	**Termos iniciais**
Sequência de Lucas	x=1,y=1	$a_0 = 2, a_1 = 1$
Sequência de Pell	x=2,y=1	$a_0 = 0, a_1 = 1$
Sequência de Jacobsthal	x=1,y=2	$a_0 = 0, a_1 = 1$
Sequência de Oresme	x=1,y=$-\frac{1}{4}$	$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Analisando a Tabela 1 e comparando-a com os números de Fibonacci, é fácil ver que para os números de Lucas é alterado somente o valor de a_0 para 2. Para os números de Pell, é alterado somente o coeficiente x para 2. Em Jacobsthal é alterado somente o valor do coeficiente y para 2. E por fim, para os números de Oresme é alterado tanto o coeficiente y para $-\frac{1}{4}$ como o valor do termo inicial a_1 para $\frac{1}{2}$.

Vale ressaltar que outras sequências de segunda ordem podem ser encontradas na literatura, a exemplificar, temos que a sequência de Leonardo, onde é acrescentado o valor 1 na soma da recorrência, baseada na fórmula de Fibonacci.

A Teoria do Fractal de Barnsley

Nos últimos anos têm surgido a ideia de fractais introduzida por Benoît Mandelbrot (1924 - 2010) como sendo formas geométricas com padrões complexos que repetem-se infinitamente, estabelecendo relações com objetos encontrados na natureza. Um fractal é gerado a partir de fórmulas matemáticas, existindo ainda duas categorias, a saber: os geométricos, que se repetem de forma contínua a partir de um modelo padrão e os aleatórios, que são gerados por códigos computacionais (ALVES, 2007). Essa teoria dos fractais surgiu no século XVII, baseado nos estudos de Newton e Leibniz, em que identificaram que determinadas funções apresentavam um comportamento descontínuo.

Segundo Assis et al. (2008), os fractais caracterizam-se por possuir pelo menos uma das seguintes propriedades: a) auto-semelhança – onde um pedaço do fractal é similar ao restante da figura; b) complexidade infinita – apresentando um número infinito de interações no fractal; c) dimensão fractal – diferente da geometria euclidiana, nem sempre o fractal possui a dimensão inteira, podendo ser fracionária.

Dentre as conhecidas representações de fractais temos a samambaia de Barnsley, como sendo um fractal desenvolvido através de uma iteração de sistema de funções matemáticas, onde um ponto inicial, denominado de semente, é transformado de forma repetida usando transformações lineares. Essas transformações são escolhidas de forma aleatória, segundo uma Função de Densidade e Probabilidade (FDP), definida por Barnsley, ajudando a identificar as regiões de probabilidades superiores e inferiores para os valores de uma variável aleatória (USHAKOV, 2001).

Essa técnica atribui seu nome ao matemático britânico Michael Barnsley (1946 -) que a descreveu pela primeira vez em seu livro Fractals Everywhere (BARNSLEY, 2000). Um processo aleatório determina qual função de transformação é usada em cada etapa e a imagem final surge à medida que as iterações dão continuidade. Pelo fato da samambaia ser um exemplo clássico de auto-semelhança, ou seja, é um padrão gerado matematicamente podendo ser reproduzível em qualquer ampliação ou redução, assim essas estruturas podem ser construídas a partir de usos repetitivos de fórmulas matemáticas com computadores.

Os fractais são utilizados para modelar uma gama de fenômenos em ciência e tecnologia, especialmente na área das plantas em biologia. Essas descrições computadorizadas são matematicamente muito atrativas, porém, vale ressaltar que as folhas de samambaia reais se desenvolvem diferente dos procedimentos realizados pelos fractais, desenvolvendo-se de dentro para fora e não através dos pontos aleatoriamente, como realizado nos programas de computadores (BEHAV, 2012).

No trabalho de Dorini, Dorini e Schwingel (2017), consta a explicação de toda a parte matemática existente para essa teoria. A fim de adaptar o fractal de Barnsley para as sequências lineares e recursivas, foi estabelecido que a sua respectiva fórmula de recorrência define a função de densidade e probabilidade, sendo necessário somente normalizar os coeficientes da recorrência.

Do ponto de vista da utilização dessa teoria para cursos de formação de professores, ressalta-se a importância de possibilitar a compreensão e abordagem de novos recursos educacionais, para o ensino matemático. Contudo, é importante destacar as dificuldades oriundas ao referenciar este tema, uma vez que é pouco estudado, podendo ainda ocorrer limitações de recursos ao explorá-lo na área de Educação Matemática.

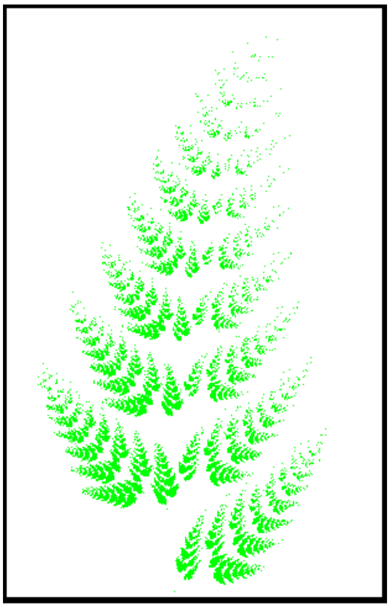
Tomando como exemplo a fórmula de recorrência da sequência de Fibonacci ($F_{\{n\}} = F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}$), organiza-se a fórmula da seguinte maneira: $0 = -F_{\{n\}} + F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}$. De posse disso, definimos os seguintes coeficientes: [-1,1,1,0] e normaliza-se de forma ponderada para gerar a FDP, resultando em [0,0.4,0.4,0.2]. Por fim, essa teoria será explorada, gerando os fractais das sequências derivadas de Fibonacci, com o viés de realizar uma discussão das suas imagens criadas.

ATIVIDADE DE ANÁLISE DO FRACTAL DE BARNSLEY DAS SEQUÊNCIAS DERIVADAS DE FIBONACCI

Segundo Viseu e Ponte (2009), "o professor precisa de saber tirar partido das potencialidades dos materiais tecnológicos ao seu dispor" (VISEU; PONTE, 2009, p. 392). De acordo com o autor, a integração das ferramentas de tecnologia da informação e comunicação com os cursos de formação de professores, potencializam o processo de ensino e aprendizagem em educação matemática. Assim, com base na teoria de Barnsley, podemos interligar a tecnologia ao estudo dessas sequências para a formação inicial de professores de Matemática, abordando a visualização das sequências numéricas.

Logo, os estudantes devem gerar os fractais das sequências discutidas acima, iniciando com o fractal de Barnsley de Fibonacci como mostrado na Figura 8. É notório perceber que essa samambaia apresenta algumas falhas em seu preenchimento, principalmente na parte superior.

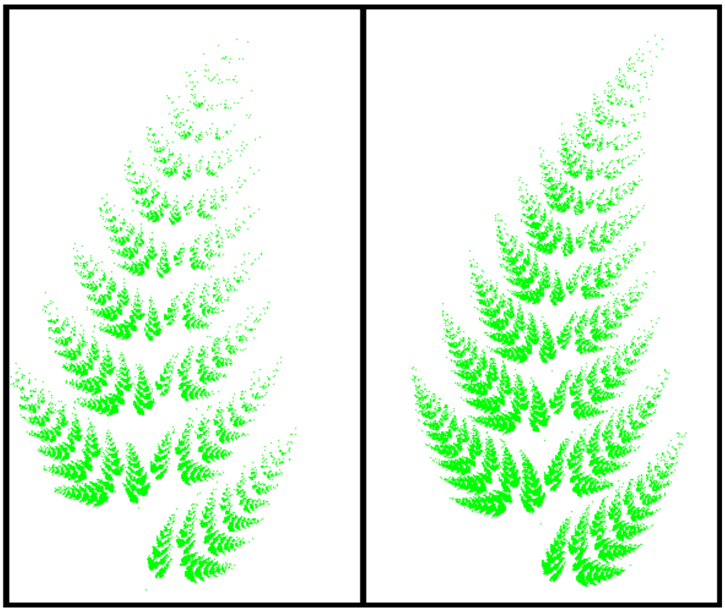
Figura 8 - Fractal de Barnsley de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelos autores.

O fractal de Barnsley de Lucas, será semelhante ao fractal de Fibonacci, isso dar-se pelo fato das recorrências serem idênticas, visto que não é analisado os termos iniciais nesta teoria. Logo abaixo, temos a Figura 9 mostrando o fractal de Barnsley de Fibonacci do lado esquerdo, e o fractal de Barnsley de Pell do lado direito, percebendo o aumento da intensidade na samambaia de Pell.

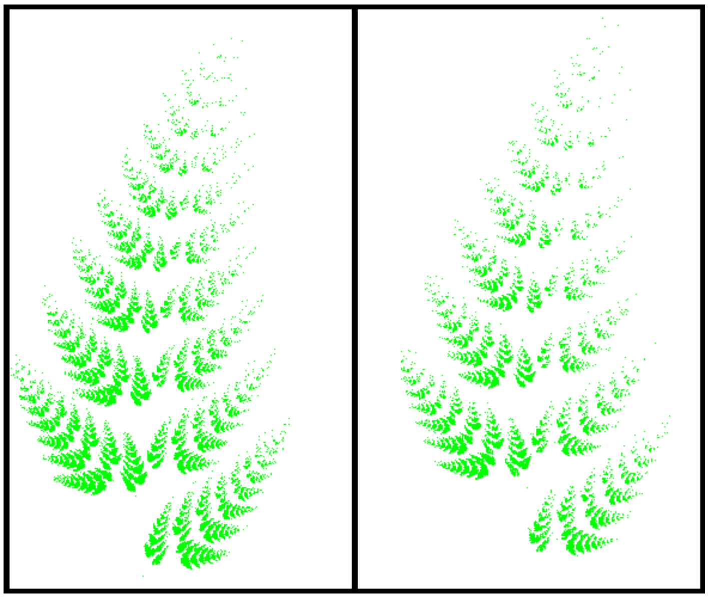
Figura 9 - Fractal de Barnsley de Fibonacci (lado esquerdo) e Pell (lado direito).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Gerando o fractal de Jacobsthal, como mostrado na Figura 10, visualizamos uma alteração da intensidade de preenchimento da samambaia, mas permanecendo o formato da samambaia semelhança com Fibonacci.

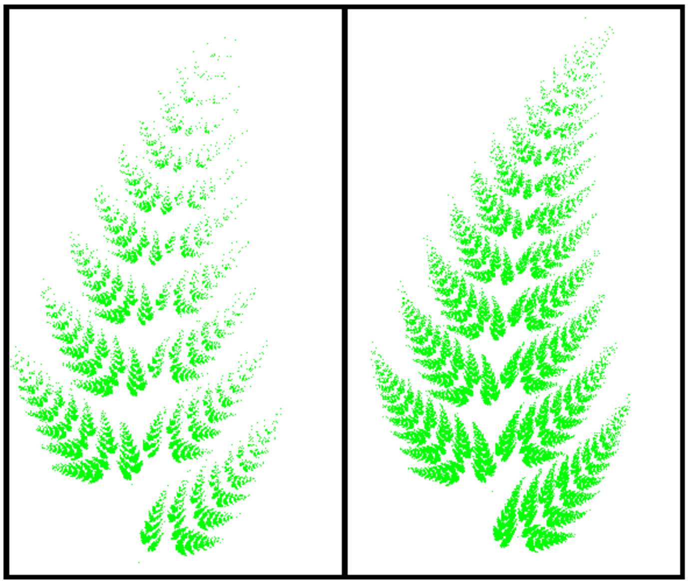
Figura 10 - Fractal de Barnsley de Fibonacci (lado esquerdo) e Jacobsthal (lado direito).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 11, comparamos o fractal de Fibonacci do lado esquerdo, com o fractal de Oresme ao lado direito. Nela percebemos o aumento da intensidade do preenchimento dos ramos da samambaia, destacando ainda que a coloração fica menos intensa somente nas pontas dos ramos.

Figura 11 - Fractal de Barnsley de Fibonacci (lado esquerdo) e Oresme (lado direito).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Diante dessas análises, percebemos um aumento da intensidade da coloração somente nos fractais de Pell e Oresme. Já para o fractal de Jacobsthal houve uma diminuição da intensidade da coloração, enquanto o fractal de Lucas permaneceu idêntico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve início com um breve estudo histórico sobre algumas sequências lineares e recorrentes, visando identificar similaridades com a sequência de Fibonacci. Além disso, foi possível analisar a fórmula de recorrência de algumas sequências lineares e recorrentes e, a partir da sequência de Fibonacci, pôde-se obter uma nova relação generalizada. Diante dessas análises, percebeu-se que a sequência de Lucas, utiliza a mesma fórmula de recorrência de Fibonacci, alterando apenas os valores iniciais da sequência. Os números de Pell, apresentam os mesmos valores iniciais, porém a recorrência possui o primeiro coeficiente alterado. Já os números de Jacobsthal, apresentam uma alteração apenas no segundo coeficiente da recorrência, quando comparado à sequência de Fibonacci. E por fim, os números de Oresme, apresentam alterações tanto em um valor inicial, quando no segundo coeficiente da sua recorrência.

Após essa análise, um estudo referente ao fractal de Barnsley é proposto como atividade para a formação inicial de professores de Matemática, permitindo uma observação e comparação das similaridades e diferenças existentes nessas sequências, em relação ao fractal de Barnsley de Fibonacci.

Desse modo, os estudantes poderão comparar a recorrência (e diferenças matemáticas) com os fractais e suas respectivas visualizações. Assim, pode-se concluir que alguns fractais apresentam sua área com coloração mais intensa, ao contrário de outra que apresentou coloração menos intensa. Para a sequência de Lucas, observou-se que o fractal é idêntico ao de Fibonacci, visto que são analisados somente os coeficientes da fórmula de recorrência, e os números de Lucas diferenciam-se apenas em relação aos seus termos iniciais. Essa técnica permite uma novidade para a área de formação de professores de Matemática, partindo da ideia da recorrência de Fibonacci.

Para trabalhos futuros, estimula-se o estudo e a pesquisa em torno dos fractais relacionado às sequências lineares e recorrentes, podendo ainda utilizar um outro método diferente da teoria de Barnsley. Além disso, busca-se ainda investigar outras sequências de ordens superiores, visando obter novas derivações.

AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

REFERÊNCIAS

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário.** 324f. (Dissertação) Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade de Lisboa, 2007.

ALVES, F. R. V. (2016). Sequência generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema,** vol. 13, n. 2, p. 27-41, 2016. http://dx.doi.org/10.15536/thema.13.2016.27-41.324

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, vol. 51, p. 83-106, 2017. http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

ALVES, F. R. V. The Professional Didactics (PD) and Didactics of Sciences (DS) in Brazil: some implications for the professionalization of the science teacher. **Acta Didactica Napocensia**, vol. 11, n. 2, p. 105-120, 2018. https://doi.org/10.24193/adn.11.2.9.

ALVES, F. R. V. Sequência de Fibonacci, Tribonacci, etc. e Tabuleiros. **Boletim GEPEM**, vol. 80, p. 311-323, 2022. https://doi.org/10.4322/gepem.2022.055.

ALVES, F. R. V.; BARROS, F. E. (2019). Plane and Space Figurate Numbers: Visualization with GeoGebra´s help. **Acta Didactica Napocensia**, vol. 2, n. 1, p. 57-74, 2019. https://doi.org/ 10.24193/adn.12.1.4

ASSIS, T. A., et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 30, n. 2, p. 1-10, 2008. https://doi.org/10.1590/S1806-11172008000200005

BAIRRAL, M. A. O valor das pequenas coisas, aprendizagens matemáticas e olhares hiperconectados. **Boletim GEPEM**, vol. 81, p. 118-141, 2022. https://doi.org/10.4322/gepem.2022.033.

BARNSLEY, M. **Fractals everywhere**. Morgan Kaufmann, 2000.

BEHAV, P. S. Fern leaves and cauliflower curds are not fractals. **Plant Signaling & Behavior**, vol. 7, n. 5, p. 533-534, 2012. https://doi.org/ 10.4161/psb.19796

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Ed Edgard Blücher, 2006.

BURTON, A. **Newton's method and fractais.** Technical manuscript, Whitman College, 2009.

CATARINO, P. M. M. C. C.; BORGES, A. On Leonardo Numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, vol. 1, n. 89, p. 75-86, 2020.

CLAGETT, M. Nicole Oresme and medieval scientifc thought. **Proceedings of the americam prhilosophical society, Philadelphia**, vol. 108, n. 4, p. 298-309, 1964.

DORINI, F., DORINI, L.; SCHEWINGEL, J. C. da S. A Samambaia de Barnsley. **Proceeding Series of the Brazilian Society Computational and Applied Mathematics**, vol. 15, n. 1, p. 1-7, 2017. https://doi.org/ 10.5540/03.2017.005.01.0562

EVES, H. **In Mathematical Circles**, Boston: Prindle, 1969.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

LUKOSEVICIUS, A. P.; MARCHISOTTI, G. G.; SOARES, C. A. P. Framework metodológico para estudos de caso em administração. **REA-Revista Eletrônica de Administração**, vol. 16, n. 2, p. 256-276, 2018.

MALCOM, N. The publications of John Pell, F. R.S (1611 – 1685): some new lights and some old confusions. **Notes and Records of the Royal Society of London**, vol. 54, n. 3, p. 275–292, 2000. https://doi.org/10.1098/rsnr.2000.0113

MENDONÇA, A. F.; NETO, H. B. Nicole Oresme: Perspectivas históricas para uso em sala de aula. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, vol. 3, n. 9, p. 48-62, 2016. https://doi.org/ 10.30938/bocehm.v3i9.53

MICHIEL, H. **Lucas polynomials, Encyclopedia of Mathematics**. Springer Science+Business Média B.V. / Kluwer Academic Publishers, 2001.

PIAGET, J. **A tomada de consciência.** São Paulo: Melhoramentos e EDUSP, p. 172-178, 1977.

ROMERO, J. G.; BATALLANOS, V. A. Q. Desenvolvimento do Conhecimetno Didáctico do Futuro Professor de Matemática com apoio das TIC. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, vol. 22, n. 1, p. 97-122, 2019. https://doi.org/10.12802/relime.19.2214

SCHWINGEL, J. C. da S. **A matemática da Samambaia de Barnsley**. (Dissertação) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

SIEGMUND-SCHULTZE, R. **Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact**. Princenton: Princenton University, 2009.

SILVA, B. A. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 99f. (Dissertação) Mestrado em Ciências - Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2017.

STAKE, R. E. **Investigación con estudio de casos.** Madrid: Morata, 1999.

USHAKOV, N. G. **Density of a probability distribution**. In: Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001.

VISEU, F.; PONTE, J. P. da. Desenvolvimento do Conhecimetno Didáctico do Futuro Professor de Matemática com apoio das TIC. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** vol. 12, n. 3, p. 383-413, 2009.

WALKER, I. **Explorations in Recursion with John Pell and the Pell Sequence: Recurrence Relations and their Explicit Fórmulas**, (Master's of Teaching Mathematics). Portland: Portland State University, 2011.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 4a ed. Tradução: Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZIERLER, N. Linear recurring sequences. **Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics**, vol. 7, n. 1, p. 31–48, 1959. https://doi.org/10.1137/0107003