Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)
fregis@ifce.edu.br

Resumo
Nesta proposição de aula apresentamos uma abordagem de investigação no contexto da História da Matemática, relativamente a um assunto pouco abordado no âmbito da graduação, envolvendo a Sequência Generalizada de Fibonacci - SGF. Trazemos, pois, alguns artigos da década de 60 que ainda preservam um valor pedagógico, desde que sejam passíveis de adaptação/exploração, sobretudo, com arrimo da tecnologia, num contexto de um curso de licenciatura de Matemática.

Palavras-chave: Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF. História da Matemática. Atividades de investigação.

Discovering mathematical definitions in the context of historical research: the case of generalized Fibonacci sequence

Abstract
In this class proposition we present a research approach in the context of the history of Mathematics, for a subject rarely adressed in the undergraduate context, involving the Generalized Fibonacci Sequence – GFS. We bring, therefore, some articles of the 60 decade that, still preserve a padagogical value, provided they are subject to changes/exploitation especially with the technology´s help, in a context of a mathematics degree couse.

Keywords: Generalized Fibonacci Sequence. History of Mathematics. Research activities.

Introdução

Em alguns dos nossos trabalhos, temos abordado a possibilidade de estender a sequência emblemática de Fibonacci ao conjunto dos números inteiros. De modo específico, estruturamos uma atividade de sala de aula que descreve/indica uma abordagem para a discussão da “sequência extendida” definida por $\left(f_n\right)_{n\in Z}$, em vez de $\left(f_n\right)_{n\in IN}$ (ALVES; BORGES NETO, 2011; ALVES, 2013). Dois elementos devem ser destacados nesses trabalhos, a saber: (i) a influência de um olhar influenciado pela História da Matemática e (ii) o uso de uma abordagem metodológica de ensino com arrimo na tecnologia. Assinalamos, ainda, que uma concepção maior da atividade reside em inserir os alunos numa incursão envolvendo a produção/descrição de definições matemáticas formais e, neste contexto, estruturar situações didáticas que possibilitam a generalização de noções desconsideradas pelos autores de livros de História da Matemática. Para tanto, discutiremos outras sequências recursivas que possuem propriedades relacionadas com a noção de Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF (KOSHY, 2011).

Atividade Proposta

Neste trabalho descrevemos uma atividade a ser realizada com alunos de Ensino Superior que cursam a disciplina de História da Matemática. O problema consiste em considerar os itens envolvendo duas definições que se inserem num contexto de investigação:

(I) Considerar a sequência definida pela seguinte relação $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}, n \geq 3$ (WADDILL; SACKS, 1967, p. 210).

(II) Considerar a sequência dada por $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + \mathrm{q}_{n-4}, n \geq 4$ (WADDILL; SACKS, 1967, p. 210).

(III) Considerar os termos da sequência $(p, q, r, s, t, p+q+r+s+t, p+2q+2r+2s+2t, \ldots)$ e indicar uma fórmula de recorrência para a mesma.

Questionamentos:

1. Escolhendo os seguintes termos $p_0 = 0, p_1 = p_2 = 1, \mathrm{p}_3 = 2, p_4 = 4$, podemos descrever os primeiros dez números desta sequência à direita ($n > 0$) e à esquerda ($n < 0$)?
2. Que nome ou terminologia poderíamos atribuir às sequências numéricas indicadas logo acima por $\{p_n\}_{n \in Z}$ (I) e por $\{q_n\}_{n \in Z}$ (II) ?
3. Definindo a seguinte sequência $\{R_{\tilde{n}}\}_{n \in IN}$ de modo que $\{R_0 = p_1 - p_0$ e $R_n = p_{n-1} + p_{n-2}\}$, que relações/propriedades esta sequência possui com o item (I)? Explique!
4. Semelhantemente ao caso da sequência de Fibonacci, relacionada com o número de ouro, obtido como uma das raízes da função polinomial $x^2 - x - 1 = 0$, que equação polinomial relacionamos com a sequência definida em (I) e (II)?

Discussão

O objetivo desta atividade é explorar as possibilidades de adaptação, adequação e generalização de certas concepções dos estudantes, no contexto de investigação históricas, atinentes ao conceito Sequência Generalizada de Fibonacci - SGF.

Atividades previstas

Com embasamento matemático, apoiado pelos conhecimento prévios acerca da sequência de Fibonacci o aluno poderá perceber que:

Item (I): os valores preliminares da sequência $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}, n \geq 3$ podem ser $p_0 = 0, p_1 = p_2 = 1$ e/ou $p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = 1$, As sequências assim obtidas podem ser indicadas por $(0,1,1,2,4,7,13,24,44,\ldots,\mathrm{k}_n,\ldots)$ e $(1,0,1,2,3,6,11,20,37,\ldots,\mathrm{l}_n,\ldots)$. Ao decorrer da atividade, os alunos devem ser instigados a descobrir ainda outras relações, como $\{l_0 = k_1 - k_0, \text{ n} \geq 2 \text{ e } l_n = k_{n-1} + k_{n-2}\}$. No que concerne ao segundo questionamento, os alunos devem ser estimulados a perceber profundas ligações entre as sequências $\{p_n\}_{n\in Z}$ e $\{q_n\}_{n\in Z}$ com a sequência original de Fibonacci e, com um amparo em discussão pelo grupo, analisar a adequabilidade das terminologias que indicamos por “sequências extendidas tribonacci” e “sequências extendidas tetranacci”. Sugerimos, pois, a exploração aritmética de certas relações que já discutimos (ALVES; BORGES NETO, 2011), para o caso das sequências $\{p_n\}_{n\in Z}$ (I) e $\{q_n\}_{n\in Z}$ (II). Por exemplo, as relações $p_{n-3} = p_n - p_{n-1} - p_{n-2}$ e $\mathrm{q}_{n-4} = q_n - q_{n-1} - q_{n-2} - q_{n-3}$ devem ser exploradas, a fim de obter sua descrição no campo dos inteiros. Ademais, podemos obter: $p_2 = p_1 + p_0 + p_{-1} \therefore p_{-1} = p_2 - p_1 - p_0$. Mas, se assumirmos que $p_0 = 0, p_1 = p_2 = 1$, inferimos que $p_{-1} = 0$. De modo similar, obteremos ainda que $p_1 = p_0 + p_{-1} + p_{-2} \therefore p_{-2} = p_1 - p_0 - p_{-1} = 1$ e $p_0 = p_{-1} + p_{-2} + p_{-3} \therefore p_{-3} = p_0 - p_{-1} - p_{-2} = -1$. Ora, vale assinalar que Waddill e Sacks (1967, p. 215) sugerem, simplesmente, substituir ‘n’ na expressão $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}$ por ‘$-n$’, obtendo $p_{-n} = p_{-n+3} - p_{-n+2} - p_{-n+1}$, para $n > 0$. Doravante, semelhantemente aos trabalhos de Alves e Borges Neto (2011), o grupo de estudantes, participantes da investigação, poderá apreciar a adequabilidade das nomenclaturas sugeridas ou, até mesmo, escolher outra.

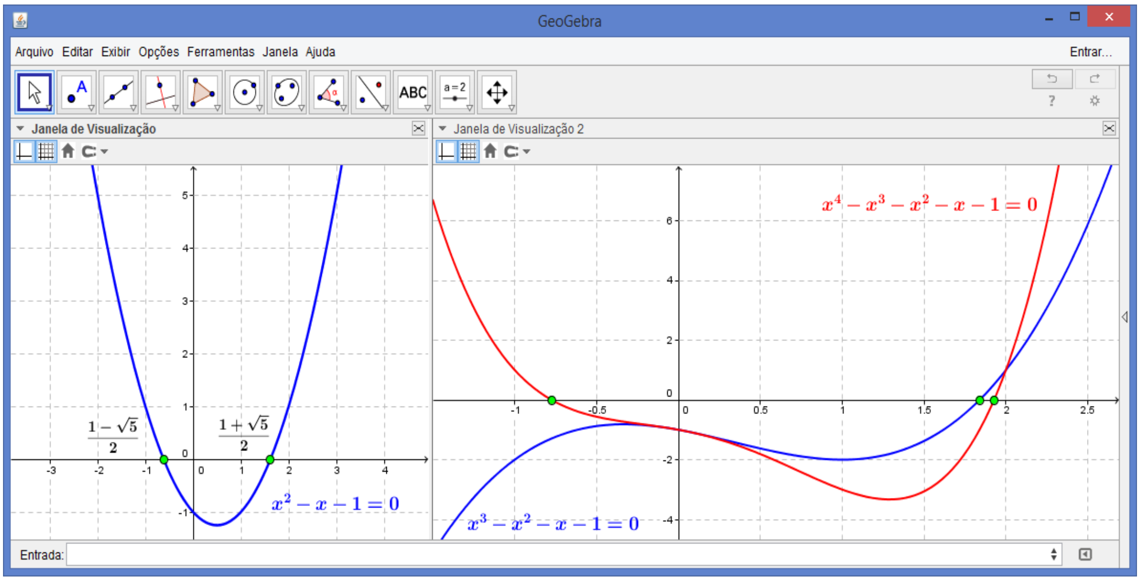
Por outro lado, no 3º questionamento, definindo a sequência sugerida $\{R_{\tilde{n}}\}_{n\in IN}$ de modo que $\{R_0 = p_1 - p_0 \text{ e } R_n = p_{n-1} + p_{n-2}\}$, devemos estimular a identificação das seguintes relações algébricas: $R_n = (p_{n-1} + p_{n-2}) = (p_{n-2} + p_{n-3} + p_{n-4}) + (p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-5}) =$ $= (p_{n-2} + p_{n-3}) + (p_{n-3} + p_{n-4}) + (p_{n-4} + p_{n-5}) = R_{n-1} + R_{n-2} + R_{n-3} \therefore R_n = R_{n-1} + R_{n-2} + R_{n-3}$. Portanto, a sequência recursiva $\{R_{\tilde{n}}\}_{n\in IN}$, semelhantemente à sequência $\{p_n\}_{n\in IN}$ (I), é definida também a partir de três termos consecutivos. O elemento conceitual a ser discutido refere-se ao fato de que, a partir de uma sequência definida a partir do três termos consecutivos, formulamos uma outra que preserva as propriedades (recursividade a partir de três termos antecedentes) da sequência inicial.

A fim de responder ao 4º questionamento, de acordo com a definição, escrevemos $p_{n=1} = p_n + p_{n-1} + p_{n-2} \leftrightarrow \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-1}}\right) = \frac{p_n}{p_{n-1}} + 1 + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$ (*), e, em seguida, semelhantemente ao expediente usado em Feinberg (1963, p. 72 – 73), definimos $\frac{p_{n+1}}{p_n} = t_n; \frac{p_n}{p_{n-1}} = t_{n-1}; \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = t_{n-2}$, tendo ainda que $\frac{p_{n+1}}{p_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_n} \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = t_n \cdot t_{n-1}$. Desse modo, estabelecemos: $t_n \cdot t_{n-1} = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{t_{n-2}} \leftrightarrow t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} \cdot t_{n-2}}$. Feinberg (1963, p. 73) admite a convergência da sequência há pouco definida por $\{t_n\}_{n \in IN}$, digamos, para um valor ‘x’. Então, concluímos que $t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} \cdot t_{n-2}} \to x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Koshy (2001, p. 240) recorda os valores numéricos das raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, indicando-os por $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in IR$. Com auxílio da figura 1, podemos estimular os estudantes a visualizar os valores correspondentes às raízes reais da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ e uma outra, descrita por $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Reparemos ainda que, no uso da descrição das raízes da cúbica, podemos escrever o número $\phi_3 = \frac{\left(1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}\right)}{3} = 1.839286755214...$ que seria uma espécie ou tipo de número “tri-áureo” ϕ_3 e, com isto, ensejar a formulação do número “tetra-áureo” ϕ_4 e, assim sucessivamente, com o escopo de empregar uma terminologia que se aproxima da conhecida descrição e origem do número de ouro $\phi_2 = 1 + \sqrt{5}/2$.

Por outro lado, com arrimo na figura 1, podemos estimular o debate em sala de aula, no sentido de apreciar o comportamento dos outros valores semelhantes ao número de ouro, extraído do processo de divisão de um segmento em razão áurea. Na figura, divisamos uma única raiz real da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Não obstante, com origem ainda no gráfico abaixo, quando nos atemos à equação $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, percebemos a existência de duas raízes reais, uma delas positiva, que denotaremos por ϕ_4.

Item (II): os valores particulares e preliminares da sequência $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + \mathrm{q}_{n-4}, n \geq 4$ podem ser indicados por $(0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, \ldots)$. No que concerne aos termos com índices negativos, escrevemos $q_3 = q_2 + q_1 + q_0 + \mathrm{q}_{-1} \therefore \mathrm{q}_{-1} = q_3 - q_2 - q_1 - q_0 = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$. Pelo mesmo motivo, determinamos $q_{-2} = q_2 - q_1 - q_0 - q_{-1} = 1 - 0 - 0 - 0 = 1$ e seguimos um raciocínio semelhante para $n < 0$.

Figura 1 – Visualização dos valores correspondentes ao raciocínio empregado por Feinberg.



Fonte: Feinberg (1963).

Item (III): na expressão fornecida $(p, q, r, s, t, p+q+r+s+t, p+2q+2r+2s+2t, \ldots)$, os estudantes deverão reconhecer o padrão generalizante dos itens anteriores, à medida que, nas listas dos itens (I) e (II), podemos divisar uma relação de recorrência entre cada termo e os três (respectivamente, quatro) elementos antecedentes. Para testar alguns desses valores, podemos sugerir, por exemplo, que $p = q = r = s = t = 1$ o que fornecerá: $(1,1,1,1,1,5,9,17,33,65,129,253,\ldots)$. Com arrimo no tirocínio mobilizado nos itens (I) e (II), o grupo deverá atingir o estabelecimento da formulação $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + r_{n-4} + r_{n-5}$, para $n \in Z$, que possui ainda características semelhantes à sequência Fibonacci, como a dependência de cinco termos antecessores e poderá proporcionar a descrição do número "penta-áureo" ϕ_5, extraído de uma das raízes da equação $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Repetindo-se o argumento de Feinberg (1963, p. 72–73), proporcionamos a generalização dos argumentos descritos anteriormente.

Considerações

Na atividade proposta, observamos a ideia de proporcionar aos estudantes um raciocínio envolvendo o estabelecimento/descrição de definições, no contexto da investigação histórica envolvendo a noção SGF. Com efeito, de pouca divulgação na cultura acadêmica de graduação, outras noções de sequência nominadas por *tribonacci*, *tetrabonacci*, *pentabonacci*, *hexbonacci*, etc. (FENG, 2011; FEINBERG, 1963; MENDELSOHN, 1967; SARISAHIN; NALLI, 2014;

WADDILL; SACKS, 1967), possibilitam um raciocínio generalizador, tomando como referência a emblemática sequência de Fibonacci $\left(f_n\right)_{n\in IN}$. Por outro lado, a atividade proposta visa instigar os alunos à ação de generalizar, formular descrições e nomenclaturas, nomes derivados do número de ouro "ϕ", obter outros termos que indicaremos por $\left(\phi,\phi_3,\phi_4,\phi_5,\ldots,\phi_n,\ldots\right)$, bem como a elaborar definições formais (ALVES; BORGES NETO, 2011) para as propriedades descobertas no campo dos inteiros, num contexto de investigação histórica.

Referências

ALVES, F.R.V; BORGES NETO, H. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM**. nº 59, 135 – 140, 2011. [online] <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647>. Acesso: 02/02/2015

ALVES, F.R.V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da Sequência de Fibonacci apoiada na Tecnologia. **Anais do VI HTEM**. 1 – 17, 2013. [online] <http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/anais_do_vi_htem_ufscar_2013.html>. Acesso: 12/03/2015

FENG, J. More identities on the Fibonacci Numbers. **Ars Combinatoria**. nº 100, 73 – 78, 2011. [online] <http://www.researchgate.net/profile/Jishe_Feng/publication/236343468_More_Identities_On_The_Tribonacci_Numbers/links/004635190c3a853293000000.pdf>. Acesso: 20/04/2015

FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quartely**. v. 1, nº 3, October, 209 – 222. 1963. [online] < http://www.fq.math.ca/Scanned/1-3/feinberg.pdf>. Acesso: 02/02/2015

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: John Wiley and Sons, 2011.

MENDELSOHN, P. N. The pentanacci numbers. **The Fibonacci Quartely**. v. 5, nº 3, October, 209 – 222. 1967. [online] < http://www.fq.math.ca/Books/Collection/mendelsohn.pdf> 2/02/15

SARISAHIN, T.; NALLI, A. On the pentanacci numbers. **Mathematical and Computational Application**. v. 19, nº 3, 255 – 262, 2014. [online] <http://mcajournal.cbu.edu.tr/volume19/255.pdf>. Acesso: 12/04/2015.

SINGH, B.; BHADOURIA, P.; SIKHWAL, O.; SISODIYA, K. A Formula for Tetranacci-Like Sequence. **General Mathematics Notes**. v. 20, nº 2, 136 – 141. 2014. [online] <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/GMN/yahoo_site_admin/assets/docs/10_GMN-4642-V20N2.93181718.pdf> Acesso: 8/03/2015.

WADDILL, M. E; SACKS, L. Another Generalized Fibonacci Sequence. **The Fibonacci Quartely**. v. 5, nº 3, October, 209 – 222. 1967. [online] <http://www.fq.math.ca/Scanned/5-3/waddill.pdf>. Acesso: 12/05/2015.

Submetido em janeiro de 2016
Aprovado em junho de 2016