BOLETIM GEPEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Modelagem Matemática Online: uma ambiência construída para promover interações entre professor, alunos e conteúdos matemáticos

Rhômulo Oliveira Menezes[1]
Secretaria de Estado de Educação do Pará (Seduc-PA)

Roberta Modesto Braga[2]
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Adilson Oliveira do Espírito Santo[3]
Universidade Federal do Pará (UFPA)

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma ambiência construída a partir das concepções da Modelagem Matemática e da Educação Online para o ensino de geometria euclidiana, centrada nas interações entre mediador, participantes e conteúdos matemáticos. O objetivo é responder à seguinte questão de investigação: Que/Como poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento no ambiente online VMTcG? Para tanto, integramos a equipe responsável pelo planejamento, elaboração e execução do curso "Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG", realizado no segundo semestre de 2018. Os encontros síncronos no Virtual Math Teams com GeoGebra (VMTcG) contaram com a participação de graduandos do curso de Matemática da Universidade Federal do Pará e da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Os dados foram produzidos no decorrer das tarefas de Modelagem Matemática, ficando registrados no próprio ambiente — em chats, construções no quadro branco e no GeoGebra. Para a análise, adotamos as quatro fases de análise de chats. Os resultados indicam que a tarefa de Modelagem Matemática, desenvolvida de forma síncrona no VMTcG, favoreceu a manifestação de estratégias pedagógicas, poderes matemáticos e temas matemáticos.

Palavras-chave: Ambiência; Tarefas de Modelagem Matemática; Educação Online; VMTcG; Geometria.

[1]Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor de Matemática vinculado à Secretaria de Educação de Estado do Pará (SEDUC-PA), Capanema, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Tv. Três Irmãos, 42, São Pio X, Capanema, Pará, Brasil, CEP: 68702-100. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9042-8323 . E-mail: rhomulo.menezes4542@escola.seduc.pa.gov.br .

[2]Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professora Associada da Faculdade de Matemática do Campus Castanhal da Universidade Federal do Pará (CUNCAST/UFPA), Castanhal, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Manoel Porpino, 181, Cristo Redentor, Castanhal, Pará, Brasil, CEP: 69742-785. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3747-5862. E-mail: robertabraga@ufpa.br.

[3]Doutor em Engenharia Elétrica pelas Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Professor Titular Aposentado pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Visconde de Souza Franco, 1013, Edifício Times Square AP 1102 B, Umarizal, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66053-000. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2728-8169. E-mail: adilson@ufpa.br.

Online Mathematical Modeling: an environment built to promote interactions between teachers, students, and mathematical content

ABSTRACT

In this article, we present an environment built from the concepts of Mathematical Modeling and Online Education for teaching Euclidean geometry, centered on the interactions between mediator, participants and mathematical content. The objective is to answer the following research question: What/How did mathematical powers, pedagogical strategies, and mathematical themes emerge among students, the mediator, and the mathematical content during the development of the Pumping Station task in the VMTcG online environment? To this end we were part of the team responsible for planning, developing, and implementing the course "Modeling Interactions and Strategies in the VMTcG Environment," held in the second half of 2018. The synchronous meetings on Virtual Math Teams with GeoGebra (VMTcG) were attended by undergraduate students from the Mathematics course at the Federal University of Pará and the Federal Rural University of Rio de Janeiro. The data were generated during the Mathematical Modeling tasks and recorded in the environment itself—in chats whiteboard constructions, and GeoGebra. For the analysis, we adopted the four phases of chat analysis. The results indicate that the Mathematical Modeling task, developed synchronously in the VMTcG favored the manifestation of pedagogical strategies, mathematical strengths, and mathematical themes.

Keywords: Ambience; Mathematical Modeling Tasks; Online Education; VMTcG; Geometry.

Modelado Matemático en Línea: un entorno construido para promover interacciones entre profesor, estudiantes y contenidos matemáticos

RESUMEN

En este artículo presentamos un entorno construido a partir de las concepciones del Modelado Matemático y de la Educación en Línea para la enseñanza de la geometría euclidiana, centrado en las interacciones entre mediador, participantes y contenidos matemáticos. El objetivo es responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué y cómo poderes matemáticos, estrategias pedagógicas y temas matemáticos emergieron entre estudiantes, mediador y contenidos durante el desarrollo de la tarea Estación de Bombeo en el entorno en línea VMTcG? Para ello, integramos el equipo responsable de la planificación, elaboración y ejecución del curso "Interacciones y Estrategias de Modelado en el entorno VMTcG", realizado en el segundo semestre de 2018. Los encuentros sincrónicos en Virtual Math Teams con GeoGebra (VMTcG) contaron con la participación de estudiantes de la carrera de Matemáticas de la Universidad Federal de Pará y de la Universidad Federal Rural de Río de Janeiro. Los datos fueron producidos durante el desarrollo de las tareas de Modelado Matemático y quedaron registrados en el propio entorno —en los chats, en las construcciones realizadas en la pizarra y en GeoGebra. Para el análisis, adoptamos las cuatro fases del análisis de chats. Los resultados muestran que la tarea de Modelado Matemático, desarrollada de manera sincrónica en el VMTcG, favoreció la manifestación de estrategias pedagógicas, poderes matemáticos y temas matemáticos.

Palabras clave: Entorno; Tareas de Modelado Matemático; Educación en Línea; VMTcG; Geometría.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este artigo é recorte da pesquisa de doutorado do primeiro autor e problematiza uma vertente identificada na pesquisa da tese que não foi aprofundada por não ser o seu objeto de estudo. A tese teve como objetivo investigar que e como interações apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento síncrono de tarefas de Modelagem Matemática, em um ambiente virtual de aprendizagem online.

Esse objetivo nos levou a perceber que poucos estudos foram encontrados acerca do ensino de geometria por meio de atividades de Modelagem Matemática. Girnat e Eichler (2011) em um estudo qualitativo com nove professores identificou um paradoxo na resposta de sete professores, que consideravam por excelência a geometria como parte aplicada da Matemática, mas não tão adequada para a construção de modelos, sendo os professores entrevistados abertos a Modelagem Matemática em outras partes da Matemática.

Nesse cenário um dos pontos levantado aplicada a geometrias sobre esse conflito se dá pelo fato de que no ensino de geometria existem alguns objetivos, dentre eles a aplicação é apenas um objetivo adicional, sendo a dedução e a solução de problemas vistos como objetivos principais em detrimento de 'obter acesso ao mundo real'. Outro ponto destacado pelos autores refere-se à limitação de uma visão clássica euclidiana aplicada à geometria em que a justificação de toda afirmação deve ser feita puramente e dedutivamente por meio de axiomas e teoremas conhecidos, sendo a referência à experiência um sinal de compreensão deficiente, e dessa forma, algumas partes do ciclo de Modelagem Matemática se opõe a configurações de tarefas de prova ou solução de problemas.

Girnat e Eichler (2011) ressaltam que é compreensível os professores evitarem aplicações geométricas "no meio" pensando na confusão dos alunos com diferentes padrões e desafios de Modelagem Matemática, demonstração e solução de problemas. Ainda complementam afirmando que essa particularidade parece se restringir a geometria por ser uma área da Matemática escolar que permite considerar seus objetos segundo duas perspectivas diferentes, a do ponto de vista teórico euclidiano e de um ponto de vista mais empírico da Modelagem Matemática.

Mas, considerando que os professores investigados afirmaram inicialmente que a geometria por excelência é parte aplicada da Matemática, Girnat e Eichler (2011) questionaram o que eles consideravam como sendo 'boas' aplicações geométricas. As respostas dos professores tiveram estruturas similares, podendo ser divididas em duas etapas: a primeira, a geometria usada para calcular comprimentos, áreas ou volumes; a segunda, perguntas não geométricas, como cálculos de preços, peso ou velocidade.

É interessante perceber como a pesquisa de Girnat e Eichler (2011) com professores na Alemanha, de outro contexto social e educacional, refletem posicionamentos próximos aos do Brasil quando se analisa práticas de Modelagem Matemática. Destacamos, por exemplo, o trabalho de Nazaré e Souza (2015), que investigaram quais conteúdos matemáticos eram abordados em Modelagem Matemática em artigos publicados nas edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) entre os anos de 2007 a 2013. As autoras identificaram que a maioria dos trabalhos analisados abordaram o conteúdo de função, seguido por geometria, com cálculos de área e perímetro.

Os resultados de Nazaré e Souza (2015) corroboram o que foi identificado sobre as crenças dos professores no trabalho de Girnat e Eichler (2011), em que se tem uma predominância de aplicações em outras áreas da Matemática, como a álgebra. E que quando aplicações em geometria são enfatizadas em atividades de Modelagem Matemática, a opção mais recorrente é por atividades que primam pelo cálculo de perímetros, áreas e volumes. Dessa forma, existe uma lacuna quando se trata de atividades de Modelagem Matemática que se ocupem de abordar tópicos de geometria euclidiana que pouco se vê discutida em trabalhos da literatura nacional e internacional.

Partindo desse cenário, apresentamos uma ambiência construída para ensejar interações entre ensino e aprendizagem em uma tarefa de Modelagem Matemática voltada para o ensino de tópicos de geometria euclidiana, capaz de responder a seguinte questão de investigação: Que/Como poderes matemáticos[4], estratégias pedagógicas e temas matemáticos apareceram entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, durante o desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento no ambiente online no VMTcG?

REFERÊNCIAL TEÓRICO

A ambiência para o ensino de tópicos de geometria euclidiana foi construída embasada em autores de Modelagem Matemática e Educação Online (EO). Sobre Modelagem Matemática identificamos analisando as concepções de Bassanezi (2012), Biembengut (2016), Barbosa (2001), Burak (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), que são distintas no que tange ao local e nível que são aplicadas, superior ou básico, e se alteram conforme o contexto cultural, social e histórico dos pesquisadores/professores e dos alunos. No entanto, mesmo os autores imbuídos de diferentes modos de perceber, conceber e fazer Modelagem Matemática, foi possível traçar características comuns, que atravessam essas concepções e que influenciam nosso modo de perceber a Modelagem Matemática, sendo elas: o início do processo com situações-problema, referenciados na matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e

[4] Nesse sentido, os poderes naturais entendidos como processos matemáticos que ao serem promovidos e utilizados na sala de aula configuram pares de poderes matemáticos, como: liberdade e limitação; fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança.

aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo

Sobre Educação Online, Souza e Bairral (2016) destacam cinco características que podem auxiliar o professor na arquitetura do *design* de práticas em EO:

> 1. Favorecer a hipertextualidade e a multimodalidade discursiva, com a integração de linguagens diversas (sons, textos, imagens dinâmicas e estáticas, gráficos, mapas etc.).
> 2. Potencializar constantemente a comunicação interativa (síncrona e assíncrona).
> 3. Propor atividades formativas, que estimulem a construção do conhecimento a partir de situações-problema, nas quais o sujeito possa contextualizar e problematizar questões locais e globais do seu universo cultural.
> 4. Criar **ambiências** para a avaliação formativa, nas quais os saberes sejam construídos em um processo comunicativo constante de negociações e de tomada de decisões.
> 5. Favorecer conexões lúdicas e artísticas e incentivar navegações críticas, criativas e autorais. (SOUZA e BAIRRAL, 2016, p. 41, grifo nosso).

A escolha do ambiente, a tarefa, as tecnologias, as estratégias em EO são elaboradas e acompanhadas pelo professor ou a equipe que efetivará as práticas. É importante ressaltar que não basta ter a tarefa perfeita sem um ambiente que ofereça condições para o seu desenvolvimento. Neste sentido, vamos ao encontro do que defende Bairral (2020), ao definir *design* não o resumindo a apenas uma tarefa, mas como:

> (...) um sistema amplo, vivo e articulado, um ecossistema de ensino e de aprendizagem. Por mais que uma tarefa esteja bem planejada, se não houver um ambiente interativo de seu aceite, de pertencimento autêntico e de sua transformação, os silêncios, os distanciamentos e as aversões para aprender online continuarão. (p. 198)

Sobre o conceito de tarefa no contexto da EO, Bairral (2018) a entende como uma peça que constitui a atividade formativa (tarefa+interação+colaboração), em que esta se refere ao "exercício" a ser feito, enquanto que a atividade refere-se ao aceite e a efetivação dessa tarefa, ou seja, o caminhar. Por exemplo, o Virtual Math Teams com GeoGebra (VMTcG) é um AVA que dispõe de três espaços de interação online e síncrono, em que cada espaço tem potencial de enriquecer uma investigação, ao oferecer diferentes formas de comunicação, com diferentes linguagens: as construções no GeoGebra, as possibilidades de edição de textos e imagens no quadro branco, e os diálogos nos chats.

Porém, Bairral (2018) alerta que oferecer opções variadas de comunicação não é garantia de um processo interativo. Para o autor, "a tipologia das tarefas constitui elemento formativo importante no ambiente virtual, à medida que funciona como articuladora dos diferentes aspectos do conhecimento matemático" (BAIRRAL, 2018, p.43). Assim, cada contexto formativo exige tarefas diferenciadas e, consequentemente, deflagram uma atividade formativa diferente. Neste cenário, o autor, a partir de suas experiências com formação inicial de professores, reconhece que a elaboração de tarefas tem sido um desafio.

No contexto da Modelagem na Educação Matemática, a tarefa estimula "a colaboração e interação entre os alunos, professor e objetos investigados" (BRAGA, 2009). O termo "tarefa" para Silva e Oliveira (2012) é entendido como similar ao termo "atividade". Dessa forma, as autoras destacam que é necessário a organização de um ambiente que contenha uma situação-problema e um planejamento da aula, e de estratégias para sua condução. Já para Prado, Silva e Santana (2013) "tarefa de Modelagem Matemática" é entendida como um ambiente de aprendizagem, em que os alunos são convidados a investigar matematicamente situações com referência na realidade, sendo essa definição um segmento da concepção de Modelagem Matemática de Barbosa (2001)

Tanto Silva e Oliveira (2012) quanto Prado, Silva e Santana (2013) pontuam em suas definições sobre tarefas de Modelagem Matemática a necessidade de uma situação-problema. Os últimos acrescentam ainda que essa situação tenha referência na realidade. Sobre referência, Alrø e Skovsmose (2010) abordam diferentes formas de referências, que podem repercutir em diferentes tipos de ambiente de aprendizagem. Nesse contexto, os autores caracterizaram ambientes de investigação segundo três tipos de referências: a matemática pura (atividades puramente matemáticas), a semi-realidades (realidade construída, situação artificial), ao mundo real (realidade com elementos do contexto dos alunos).

Para Menezes (2021), tarefas de Modelagem Matemática constituem uma atividade formativa profícua para a manifestação de estratégias pedagógicas, poderes e temas matemáticos. Nesse contexto, os poderes naturais, entendidos como processos matemáticos dos alunos, que ao serem promovidos e utilizados na sala de aula, configuram poderes matemáticos. As estratégias pedagógicas são derivadas de constructos pedagógicos, que informam e embasam práticas pedagógicas, quando o professor se vê diante de acontecimentos do seu cotidiano de sala de aula, e os temas matemáticos são entendidos como intrínsecos aos conteúdos matemáticos, por permeá-los revelando conexões ou elos.

Para Mason e Johnston-Wilder (2004) existem vários temas intrínsecos à Matemática, que foram identificados por pensadores diferentes ao longo dos séculos, que são úteis para revelar conexões ou elos entre conteúdos matemáticos que, de outra forma, poderiam passar despercebidos. São eles: liberdade e limitação, fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança.

Sobre Liberdade e Limitação, Foster et al. (2005) consideram que em Matemática as limitações dos axiomas, leis e propriedades são necessárias para resolver problemas matemáticos. Neste sentido, Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que os problemas começam por algum objeto matemático (talvez um número, ou uma forma), indefinido ou arbitrário, no qual se impõe limitações, e de acordo com cada limitação é possível saber se existe liberdade suficiente para que alguns objetos atendam a essa limitação.

Para Mason (2018), os temas fazer e desfazer referem-se à reversão do que é conhecido e do que é procurado. Assim, dado determinado triângulo é possível construir e encontrar as medianas, alturas, bissetrizes, que são consideradas por Johnston-Wilder e Mason (2005) como um fazer, sendo pré-determinadas pelo triângulo dado. Todavia, cada um pode ser transformado em um desfazer, como exemplificam os autores sobre uma reversão do que pode ser solicitado aos alunos. Neste caso, ao invés de pedir para eles construírem as medianas de determinado triângulo, os autores sugerem que dadas as medianas (ou alturas, ou bissetrizes), se construa todos os triângulos possíveis.

Na Geometria encontramos exemplos de casos específicos (restringir), que podem avançar para casos mais gerais (estender). Por exemplo, é possível chamar a atenção dos alunos para a ideia de quadrado, pontuando propriedades do quadrado, como quatro lados congruentes e ângulos retos. Dessa ideia é possível avançar para a ideia de losango, de retângulo, de paralelogramo. Um como sendo caso especial do outro, já que algo é um caso especial de outra coisa, quando todos os teoremas para o mais geral permanecem verdadeiros para a propriedade particular (JOHNSTON-WILDER; MASON, 2005).

Assim, partindo do que articula Menezes (2021), temos que a combinação de interações do professor (estratégias pedagógicas) e dos alunos (poderes matemáticos) no desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática, potencializam temas matemáticos inerentes aos conteúdos matemáticos trabalhados.

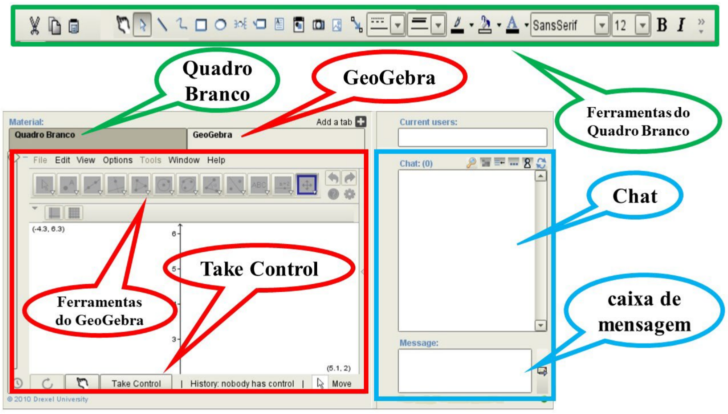
METODOLOGIA

O contexto em que se deu a produção dos dados para a pesquisa foi o curso "Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG", apresentado como projeto de extensão, submetido à Pró-Reitoria de Extensão (PROEXT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Campus Seropédica/RJ.

O curso teve carga horária de 20 horas e foi realizado com graduandos de Matemática no segundo semestre de 2018. Para o curso foram elaboradas cinco tarefas desenvolvidas em seis sessões. Cada tarefa era matematicamente independente uma da outra, com foco em tópicos de Geometria Plana e no desenvolvimento de características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática como estratégia para abordar e resolver situações-problema. Para este artigo optamos em apresentar o desenvolvimento de apenas uma tarefa.

Os encontros aconteceram no VMTcG e duravam em média duas horas, sendo uma sessão por semana. Nesse ambiente online os estudantes interagiam nos espaços quadro branco, GeoGebra, e chat, como apresentados na Figura 1.

Figura 1 – Elementos dos espaços de interação do VMTcG



Fonte: VMTcG, 2018

As ferramentas da aba quadro branco eram semelhantes às de editores de textos conhecidos, como o Word. Nela os estudantes interagiam simultaneamente escrevendo textos, construindo formas, escolhendo o tipo e tamanho da fonte, inserindo figuras, dentre outras interações. A versão do GeoGebra no VMT estava em língua inglesa e os estudantes não manipulavam suas ferramentas simultaneamente, o uso se restringia a um estudante por vez, e para usá-lo era preciso que o estudante clicasse a tecla "take control". A coordenação de interações dos estudantes no quadro branco e GeoGebra se dava por meio de mensagens trocadas no chat.

Os estudantes do curso só ficavam sabendo das tarefas nos dias dos encontros no VMTcG. Como eles não tinham experiência anterior nesse tipo de curso e de cenário online a tarefa do "quadrado" foi pensada para ambientação (familiarização) dos estudantes com as ferramentas do VMTcG. As duas últimas sessões foram de culminância das atividades do curso, com a tarefa "propondo uma nova tarefa". Dessa forma, para a tese nos ocupamos das três tarefas de Modelagem Matemática em que os licenciados precisaram trabalhar em grupos para solucionar as situações-problema das tarefas: "estação de bombeamento", "polígono ABCDE", e "caminhando com Carol".

Entendemos esse estudo qualitativo como sendo uma pesquisa do tipo intervenção pedagógica (DAMIANI et al., 2013), pois envolveu a participação do pesquisador/autor deste trabalho a partir da sua mediação nas sessões do VMTcG com os estudantes, promovendo interações constantes entre todos os sujeitos envolvidos e investigados (mediador, estudantes, conteúdos matemáticos). De acordo com Damiani et al., (2013), a intervenção pedagógica:

> [..] é definida como uma pesquisa que envolve o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI et al., 2013, p. 1)

Partindo dessa definição tarefas de Modelagem Matemática foram planejadas e implementadas ensejando interações dos sujeitos da pesquisa em um contexto pouco explorado no qual as tarefas foram desenvolvidas de forma síncrona e online visando o desenvolvimento cognitivo de todos sujeitos envolvidos, e requerendo do pesquisador/autor criatividade no diálogo traçado com concepções de Modelagem Matemática, conceitos de Educação Online, interações segundo temas, poderes e estratégias, úteis para implementação da intervenção e para avaliação, compreensão, reflexão da intervenção implementada.

Para Alves-Mazzotti (1999) investigações qualitativas são multimetodológicas. Essa característica permite ao pesquisador seguir ou criar diferentes caminhos metodológicos para seus estudos, dependendo de seu contexto de pesquisa. Carmo e Ferreira (2008, p.117) consideram que "feita a observação, torna-se indispensável o seu rápido registro sob pena de perder informações valiosas". Neste contexto, os dados dessa pesquisa foram produzidos pelos estudantes nas sessões de tarefas de Modelagem

Matemática no VMTcG – materializados nos chats das sessões e nas construções realizadas no quadro branco e no GeoGebra – e reconhecidos por nós, pesquisadores, por meio de observações e anotações no diário de pesquisa, possibilitando posterior análise tanto das observações, quanto dos registros guardados nas salas do VMTcG.

Para análise dos dados produzidos fizemos uso das fases de observação crítica de chats de Menezes e Bairral (2020), a saber: a Fase 1 refere-se ao planejamento do chat; a Fase 2 refere-se à análise no coletivo; a Fase 3 refere-se à análise personalizada; e a Fase 4 refere-se à meta-análise do processo.

Com as Fases 1 e 2 foi possível descrever como se deu o planejamento e o desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática no VMTcG, destacando as ideias dos estudantes na abordagem das tarefas, as interações entre os estudantes e o mediador, e o número de intervenções dos estudantes e do mediador durante as sessões. A realização dessas fases vai ao encontro do que pontuam Bogdan e Biklen (1994), sobre a investigação qualitativa ser descritiva. Paralelo a essas fases e de maneira mais específica, na Fase 3 foi possível agrupar em blocos temáticos episódios pertinentes para na Fase 4 esses episódios serem analisados.

ANÁLISES E RESULTADOS

A seguir apresentamos descrições sobre episódios desencadeados no desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento, apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Tarefa Estação de Bombeamento

Tarefa: Os proprietários de um oleoduto planejam construir uma estação de bombeamento para transportar óleo para três clientes em três cidades. Na tentativa de minimizar o custo de construção das linhas da estação de bombeamento até os clientes eles desejam localizar a estação de bombeamento em uma determinada região em que as distâncias das cidades dos clientes até a estação sejam as mesmas. No mapa abaixo estão localizadas as cidades dos três clientes. Se vocês fossem responsáveis pelo projeto da construção dessa estação de bombeamento, como encontrariam a localização ideal dessa região para construí-la? Analisem e proponham uma possibilidade.

Fonte: Curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, 2018

A tarefa foi planejada para que os licenciandos trabalhassem os conceitos de mediatriz e circuncentro. O objetivo que imaginamos para os grupos era que eles localizassem onde poderia ser construída uma estação de bombeamento, a partir de três cidades em uma determinada região. No entanto, em se tratando da imprevisibilidade do processo de Modelagem Matemática esse objetivo poderia se cumprir, poderia ser modificado durante o andamento da sessão, ou os estudantes poderiam assumir outro objetivo.

A sessão aconteceu no dia 16/10/2018, com todos os estudantes reunidos. Zeca, Pedro e Paula já se conheciam da sessão de ambientação, Ana e Caco vieram de grupos que não prosseguiram no curso, sendo essa a primeira sessão de Ana no ambiente VMTcG, e a primeira sessão de Caco com outros estudantes nesse ambiente, já que na sua ambientação estiveram na sala apenas ele e o mediador.

Episódio 1: transição da aba quadro branco para a aba GeoGebra

No convite feito pelo mediador (analisem e vamos começar a propor formas de solucionar o problema): a palavra “vamos” indica inclusão dele na investigação, assumindo o papel de parceiro dos estudantes. A palavra “formas” indica que ele considerou diferentes caminhos para solucionar o problema, mesmo o comando da situação-problema solicitando apenas uma possibilidade. Feito o convite, o mediador aguardou. As interações iniciais do mediador mostram estratégias como: parceria, chamar atenção para mais de uma solução, aguardar.

O estudante Pedro pensou em algo, mas não queria apresentar ao grupo com receio de não ser a solução mais adequada. O mediador o motivou (exponha, não temos soluções adequadas) tentando deixá-lo confortável, o que fez Pedro apresentar o que tinha pensado (pensei em tratar as três cidades como vértices de um triângulo e após isso encontrar o circuncentro, seria ele então o local onde seria instalada a estação de bombeamento). Da parte de Pedro identificamos referências aos poderes imaginar e expressar o que tinha pensado. No entanto, para que ele expressasse, o mediador precisou garantir que o ambiente estava aberto a propostas, indicando estratégias como: querer saber o que o participante estava pensando, promover um espaço acolhedor de propostas.

Na proposta de Pedro identificamos o uso de outro par de poderes, o classificar e organizar. Partindo das três cidades-clientes da tarefa, o participante as fez sentido no contexto matemático, entendendo-as como vértices de um triângulo e sugerindo encontrar o circuncentro, que no contexto da situação-problema, Pedro julgava ser o local a ser construída a estação de bombeamento. Para organizar o participante precisou classificar as informações da situação-problema, priorizando umas em detrimento de outras.

Como o mediador já tinha motivado Pedro a interagir expressando sua proposta de solução, ele aproveitou a proposta de Pedro, para pedir a opinião dos outros estudantes. Caco, Zeca e Ana afirmaram terem pensado em algo similar, enquanto que Paula apresentou sua proposta (eu pensei em ligar os pontos formando um triângulo e depois marcar os pontos médios de cada lado, daí traçar uma perpendicular a cada lado que passa pelos pontos médios). A proposta de Paula conversa com a de Pedro, à medida que Paula sequenciou matematicamente a proposta de Pedro, indicando como encontrar o circuncentro, e dessa forma, Paula organizou e classificou.

Nas propostas de Pedro e de Paula temos transferências de sentidos das informações da situação-problema para objetos matemáticos, repercutindo na liberdade desses objetos. Os vértices associados às cidades-clientes fixadas no mapa, não podendo ser movimentadas, influenciou na liberdade de construção dos segmentos de retas dos lados da área triangular. Estes, no contexto da situação-problema, foram associados às distâncias entre as cidades-clientes, que por sua vez limitaram as construções das mediatrizes, pois elas se intersectarão no lugar geométrico circuncentro, que segundo a hipótese dos estudantes é o lugar da construção da estação de bombeamento. Observar as limitações impostas aos objetos matemáticos pela situação-problema mostra o potencial da tarefa em restringir a atenção dos estudantes para os conceitos de mediatrizes e de circuncentro.

As propostas de Pedro e Paula foram elogiadas pelo mediador, e antes de serem aprofundadas pelo grupo, o mediador quis saber dos estudantes se havia alguma dúvida sobre o contexto da situação-problema. Os estudantes responderam que a entenderam, e Paula acrescentou que no início não sabia o significado da palavra “oleoduto”, fazendo-a pesquisar no Google.

As interações do mediador mostram-se interessadas no entendimento da situação-problema pelos estudantes, e Paula demonstrou estar confortável a ponto de compartilhar de forma espontânea com o grupo que consultou a internet, para saber o significado de uma palavra. Novamente percebemos o interesse do mediador em querer saber o que os estudantes estavam pensando sobre o contexto da situação-problema. Já a pesquisa de Paula mostrou seu interesse em inteirar-se sobre a situação-problema, fazendo uso do poder particularizar/ especializar, fundamentando dessa forma seu entendimento sobre o contexto da situação-problema, e potencializando uma posterior generalização.

A situação-problema na aba quadro-branco limitava as construções dos estudantes, que ficavam presos às cidades-clientes, marcadas no mapa. Neste cenário, o mediador questionou o grupo sobre a possibilidade de testar as propostas de Pedro e Paula na aba GeoGebra. O mediador direcionou as investigações para o GeoGebra, visando ampliar as interações dos alunos. Desse questionamento, que mascarava a intenção do mediador de ir para o GeoGebra, surgiu o primeiro impasse no grupo, usar pontos quaisquer no GeoGebra ou usar as localizações das cidades-clientes do mapa.

O mediador quis saber dos motivos que levaram Pedro e Ana a defender o uso de pontos quaisquer no GeoGebra. Pedro justificou, dizendo ter optado pela generalização do circuncentro, enquanto que Ana ponderou que a situação-problema era um exemplo qualquer, com objetivo de verificar se os estudantes eram capazes de solucioná-la.

As justificativas não convenceram Caco e Zeca, que replicaram os argumentos. Para Caco era necessário encontrar as localizações das cidades-clientes, e Zeca corroborando Caco, argumentou que se considerassem pontos quaisquer, não estariam considerando as cidades-clientes, que eram o foco da situação-problema. Paula tomou partido de Pedro e Ana e argumentou que ao usar pontos quaisquer no GeoGebra, posteriormente seria possível modelar para a localização das cidades, caso contrário, pelas propostas de Caco e Zeca, era necessário saber as coordenadas referentes às marcações das cidade-clientes do mapa.

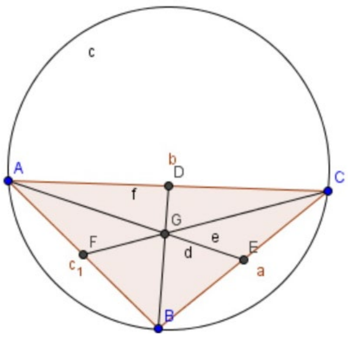
Nos argumentos de Pedro, Ana e Paula foi possível identificar o uso do poder particularizar/especializar, com potencial para o desenvolvimento do poder generalizar, pois os estudantes mostraram domínio sobre elementos da situação-problema, que permitia transitar do caso específico para o geral. No entanto, eles faziam parte de um grupo e precisavam convencer Caco e Zeca, que estavam irredutíveis no entendimento de que era necessário solucionar a situação-problema, considerando apenas as informações dadas no mapa.

O mediador já tinha um partido tomado, no entanto não podia dizer que um lado ou outro estava errado, e dessa forma usando os argumentos de Pedro, Ana e Paula, questionou (se funcionar para três pontos quaisquer, funcionaria para as três cidades do mapa). Assim convenceu a todos sobre o uso de três pontos quaisquer no GeoGebra. O mediador, com a intenção de explorar outros espaços do VMTcG e de ampliar as liberdades possíveis para os objetos matemáticos – vértices de um triângulo, segmentos de seus lados, e o circuncentro –, direcionou os estudantes com perguntas que convenceram Caco e Zeca.

Episódio 2: ausências sobre o conceito de circuncentro e o uso de pesquisas na internet

No GeoGebra Ana assumiu o controle enquanto os outros estudantes e o mediador observavam. As propostas de Pedro e Paula eram referentes à construção do circuncentro e Ana defendia essa proposta, já que pensou algo parecido (pensei também sobre o circuncentro). No entanto, Ana não construiu o circuncentro, ao invés dele, construiu medianas que resultaram em outro ponto notável do triângulo, o baricentro.

Figura 2 – Construção do “circuncentro” de Ana



Fonte: VMTcG, 2018

Nas interações de Ana, a participante testou a proposta acordada pelo grupo no GeoGebra, e especializou-se enquanto construía, sendo esse processo de construção, uma síntese do uso do poder generalizar.

A consciência imediata de Ana sobre o circuncentro remeteu a uma construção equivocada, já que aspectos que ela julgava ser do circuncentro, na verdade eram de outro ponto notável, indicando assim, uma ausência conceitual sobre aspectos do circuncentro. Johnston-Wilder e Mason (2005), ao definirem consciências imediatas como sendo a consciência do sujeito sobre algo, apontaram que em determinadas situações o que vai vir à mente do aluno sobre algo, pode não ser apropriado, ou estar errado, e que pode ser desautorizado, já que as consciências nesses casos são ausências percebidas naquele momento.

Pedro desautorizou a construção de Ana, no entanto, a forma como ele fez isso, tira todo o sentido pejorativo original dessa palavra. Pedro colocou em evidência a ausência de Ana com uma dúvida/afirmação (Uma dúvida: para marcar o circuncentro os segmentos que passam pelo ponto médio não deveriam ser perpendiculares aos lados do triângulo?), que por sua vez, convenceu Ana do seu equívoco (verdade, Pedro). Pedro, na forma como agiu, pareceu imitar o mediador, usando de questionamentos para expressar seu ponto de vista.

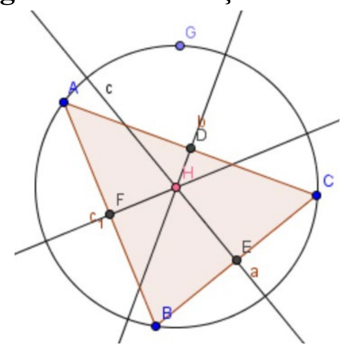
O mediador encerrou esse tópico sobre a construção de Ana questionando se o Ponto G encontrado remetia ao circuncentro, obtendo a reposta não dos estudantes Pedro e Paula. Ana, consciente do seu equívoco, apresentou outra proposta de construção do circuncentro (acho que o ideal seria construir um outro triângulo com os vértices A e C comuns). O mediador a questionou sobre o porquê dessa proposta, e Ana confessou ter aprendido na aula de construções geométricas.

A ausência de Ana não foi algo ruim para o grupo, pelo contrário, foi usada pelos outros estudantes e pelo mediador como pano de fundo para suas interações. Ajudou também a evidenciar outros objetos matemáticos, passíveis de serem considerados ou não, para a resolução da situação-problema, estendendo a possibilidade de encontrar outros pontos notáveis no triângulo, variando de um caso específico para outro caso específico. O mediador, por outro lado, nesse episódio não aproveitou a ausência de Ana para discutir limitações do baricentro no contexto da situação-problema com os estudantes. Talvez isso tenha ocorrido, por eles, o grupo, estarem focados na construção e testagem do circuncentro para solucionar a situação-problema.

Como Ana apresentou essa ausência ao construir o baricentro ao invés do circuncentro, o mediador quis saber qual o conceito de circuncentro dos estudantes. O mesmo entendimento repetiu-se em todas as respostas, (encontro/intersecção das mediatrizes), incluindo a de Ana, que tentou reproduzir o que aprendera em uma aula no curso de graduação, mas não conseguiu, pedindo ajuda para o grupo. Paula ofereceu ajuda, assumiu o controle do GeoGebra, e construiu o circuncentro seguindo os passos delimitados por ela no início da sessão. Paula pôde experimentar sua proposta no GeoGebra, e partindo das limitações iniciais da construção de Ana (pontos médios de um triângulo inscrito em uma circunferência qualquer), traçou as mediatrizes, encontrando o circuncentro.

No momento em que Paula traçou as mediatrizes nos pontos médios construídos por Ana, o circuncentro estava localizado fora da área triangular. Assim, Paula marcou esse ponto com a letra H, e passou a movimentá-lo e conforme ela movimentava o Ponto H, o diâmetro da circunferência alterava e em consequência o triângulo inscrito nela, mostrando triângulos em que o Ponto H ficava dentro, fora, em diferentes lugares da área interna e externa de diferentes triângulos.

Figura 3 – Construção de Paula



Fonte: VMTcG, 2018

As interações de Ana e Paula no GeoGebra evidenciam construções compartilhadas, já que Ana começou e Paula concluiu. Quando focamos no fazer de Paula, temos ela construindo o circuncentro a partir das limitações da construção de Ana, e em seguida ao movimentar o circuncentro (Ponto H), Paula mostrou uma variedade de triângulos possíveis para o circuncentro construído. Assim, a participante ao fazer encontrou o Ponto H, e ao movimentá-lo, e desfazer a construção de Ana, apresentou uma classe de triângulos possíveis para aquele circuncentro. No entanto, a consciência imediata do mediador não o permitiu desenvolver esses temas matemáticos expressos nas construções e manipulações de Paula.

A construção de Paula foi comemorada pelos estudantes Pedro (arrasou, Paula!) e Zeca (show), e para concluir e validar essa construção o mediador perguntou se o Ponto H era o circuncentro, e os estudantes reconheceram que sim. Paula compartilhou que não lembrava da definição do circuncentro (quando pensei em fazer, eu estava pensando em marcar os pontos médios dos lados e depois traçar perpendiculares). É interessante como a participante descreveu o processo, mas não o reconheceu como sendo a definição de circuncentro, mostrando assim, uma ausência que considerava ter, mas que na verdade, ela não tinha, pois ao fazer, ela conseguiu construir o circuncentro, e essa construção era a definição que ela julgava não saber.

Pedro também compartilhou que não lembrava da definição de circuncentro, levando-o a pesquisar no Google para confirmar o que estava pensando. Pela segunda vez pesquisas no Google foram mencionadas, no início da sessão com Paula compartilhando que tinha pesquisado sobre a palavra "oleoduto", e agora Pedro. Essas interações em outros ambientes mostram que os estudantes precisavam antes de propor ao grupo, convencer/confirmar a si próprios das ideias que estavam tendo.

Episódio 3: retomada da solução encontrada para o contexto da situação-problema

Com a construção do circuncentro o mediador levantou questionamentos sobre essa resposta para situação-problema (mas e agora? tarefa concluída). Pedro considerou já terem generalizado o problema e Zeca, corroborando a resposta de Pedro, afirmou que o ponto H era equidistante dos vértices do triângulo inscrito na circunferência. Mas o mediador não se convenceu, e quis de Zeca a prova de que aquele ponto era realmente equidistante dos vértices (será? não sei? tem como mostrar isso?). As interações do mediador, provocando os estudantes a provarem que a resposta era aquela, mesmo as distâncias não estando identificadas na construção, trouxe dúvidas para o grupo. Com as interações de Paula tentaram provar para o mediador que aquela era a resposta mais adequada para a situação-problema. Até então a atenção dos estudantes estava no circuncentro, um ponto notável específico do triângulo.

Paula não conseguiu identificar as medidas, e o mediador visando um objetivo maior, ajudou a participante e identificou as distâncias entre o Ponto H e os vértices. Nesse caso, saber ou não saber usar ferramentas do GeoGebra não era o foco, fazendo o mediador considerar mais importante para o grupo as conclusões a serem tiradas da identificação das medidas. Além das identificações o mediador movimentou o Ponto H apresentando ao grupo uma variedade de triângulos, permitindo observar a variação das medidas de distância dos vértices ao ponto.

Ao levantar questionamentos (acabou?), o mediador provocou incertezas nos estudantes (Pedro: não sei, tá parecendo muito fácil kkkk, geralmente quando eu sinto isso eu estou deixando passar algo kkk; Paula: toda vez que ele pergunta se tem certeza eu leio o enunciado em busca de outra coisa; Ana: sim rsrs; Zeca: ué, falta mais alguma coisa?). No entanto, ele foi mais diretivo e pediu que os estudantes, considerando a construção no GeoGebra, inferissem uma reposta para a possível localização da construção da estação de bombeamento no mapa.

Paula posicionou os vértices do triângulo o mais próximo possível da posição das localizações das cidades-clientes no mapa. A partir disso os estudantes responderam locais específicos ou regiões entre cidades. A construção do circuncentro pelo grupo e as respostas derivadas dela eram coerentes com o que se pedia na situação-problema. Os estudantes conseguiram fazer sentido matemático para generalizar, e com a generalização sintetizada na construção do circuncentro eles conseguiram retornar o objeto matemático para a situação-problema e fazer sentido, segundo aspectos da tarefa Estação de Bombeamento. Resultando, assim, em hipóteses de locais possíveis para a construção da estação (Zeca: Kraolandia; Ana: Kraolandia; Paula: perto das Colinas do Tocantins; Pedro: entre Colinas do Tocantins e Guaraí; Caco: entre Colinas do Tocantins e Kraolandia).

As respostas não garantiram certezas, pois como bem Paula e Zeca pontuaram, para que eles pudessem fazer mais era necessário saber as coordenadas da cidade. Mas isso não era foco da tarefa, que restringiu sua investigação a trabalhar os conceitos de mediatrizes e circuncentro, e as definições foram trabalhadas. O circuncentro na tarefa foi o modelo matemático encontrado pelo grupo. Foi o produto da generalização que eles fizeram dos aspectos da situação-problema, que permitiu interpretar e propor soluções. Johnston-Wilder e Mason (2005) apontam que muitas situações do cotidiano envolvem relações geométricas e que o uso do desenho geométrico ajuda a excluir elementos irrelevantes, para que as relações relevantes possam ser representadas.

O mediador tomando como referência o que tinha acontecido até então na sessão, expandiu e problematizou os objetivos e o enunciado da situação-problema. A princípio usando características do circuncentro do contexto matemático, para o contexto da situação-problema (o circuncentro ficaria dentro do triângulo formado pelas três cidades? é regra ou funciona nesse contexto?). Em seguida, usando elementos que tinham sido desconsiderados pelos estudantes na construção do modelo matemático (vocês acham que os proprietários minimizariam os custos da construção da estação?), trazendo outros objetos matemáticos para serem avaliados pelo grupo (Ana no início da construção encontrou um ponto determinando pelas medianas).

A movimentação anterior do mediador no circuncentro mostrou aos estudantes que as medidas das distâncias, quando o circuncentro era interno ao triângulo, eram menores que as medidas das distâncias quando era externo. Desta forma todos concordaram que para a estação de bombeamento o circuncentro precisava ser interno, mas que isso não era uma regra do circuncentro, funcionando apenas para aquele contexto (Pedro: funciona nesse caso; Zeca: não é regra não; Pedro: porque o ponto poderia ficar fora; Ana: nesse caso). As movimentações do circuncentro no GeoGebra convenceram os estudantes.

Sobre reduzir ou não os gastos, Zeca apontou que isso dependeria do trajeto. No entanto, quando interpelado pelo mediador, Zeca não conseguiu explicar de forma clara. Paula auxiliou Zeca, explicando que tinha entendido o que ele tinha apontado (eu entendi o que ele disse, como se fosse algo do tipo, a gente consegue encontrar um ponto equidistante das cidades, porém estamos considerando retas, e nem sempre pode ser possível fazer um caminho reto). Caco contextualizou o entendimento de Paula com elementos que não estavam diretamente no comando da situação-problema, mas que o contexto sugeria a existência (como se trata de tubulações feitas para transportar petróleo, pode ser que em algum ponto do trajeto essas tubulações não poderão seguir em linha reta). A situação-problema da estação de bombeamento produziu uma generalização justificada na construção do circuncentro pelo grupo. Neste ponto da sessão os estudantes interagiram entre eles, de modo a um dar sentido ao que era dito pelo outro.

Os questionamentos levantados pelo mediador não estavam no comando da situação-problema, e os estudantes reforçavam isso (Caco: considerando o ambiente; Zeca: isso Paula, mas no enunciado não comenta disso, por isso não dá pra saber), como se quisessem que o mediador entendesse que havia essas possibilidades de interpretação, mas que eles não tinham sido cobrados na tarefa da construção da estação de bombeamento. Por outro lado, o mediador queria que os estudantes questionassem o circuncentro no sentido dos custos, se estes realmente seriam minimizados ao considerarem a estação de bombeamento a uma mesma distância das três cidades.

As respostas dos estudantes deram conta de questionar o contexto da construção do circuncentro, ao compararem um cenário ideal quando construído no Geogebra ao cenário da situação-problema. O mediador reforçou essa comparação (Porque entra na questão geográfica, liberações ambientais, quando estávamos no GeoGebra não tinha essas variáveis), mesmo ainda não alcançado o ponto que queria discutir, que era o circuncentro como redutor de gastos. O mediador então direcionou ainda mais sobre o uso do circuncentro para minimizar custos, e contextualizou seus questionamentos retomando a ausência de circuncentro de Ana na construção do baricentro (se a tarefa não considerasse essa mesma distância da estação para as três cidades, o ponto encontrado por Ana economizaria custos).

Ana, respondendo ao mediador, desfez a construção de Paula e refez sua construção de baricentro, Ponto J. A estudante justificou a limitação do baricentro em relação à condição da situação-problema de localizar a estação a uma mesma distância das cidades-clientes, usando aspectos conceituais sobre as medianas, para mostrar ao mediador a impossibilidade de se usar o baricentro (BJ tem 2/3 da medida de BE, por exemplo; e como necessariamente as distâncias das cidades são iguais, então J não estaria equidistante dos vértices). Mesmo trazendo aspectos matemáticos específicos sobre as medidas das medianas do baricentro, Ana não conseguiu reconhecê-lo como opção para minorar os custos, atendo-se à condição imposta pelo comando da situação-problema.

Como os estudantes não conseguiam chegar a uma conclusão sobre os questionamentos do mediador, Paula, para efeito de comparação, pediu para construir o circuncentro junto com o baricentro e, novamente auxiliada por Ana e também por Pedro, construíram o circuncentro no mesmo triângulo que estava o baricentro. Com isso, Ana conseguiu justificar o baricentro como sendo mais viável para diminuir custos (eu acho que quanto maior a distância maior será o custo né?; o circuncentro sempre estará a mesma distância, então o gasto seria proporcional a 3 vezes, por exemplo; mas o baricentro está a 2/3 do valor da mediana distante dos vértices; o baricentro sempre está dentro do triângulo certo?; então as distâncias nunca serão muito absurdas; enquanto o circuncentro pode ser que seja). Suas justificativas começaram a influenciar nas opiniões dos outros estudantes, como identificado no posicionamento de Paula (eu acho que o baricentro gastaria menos, mas só serviria se considerássemos distâncias diferentes), caracterizando assim, o uso por Ana dos poderes conjecturar e convencer a si e aos outros.

A tarefa restringia a atenção dos alunos aos conceitos de mediatrizes e circuncentro, e dessa forma as interações entre os estudantes fez surgir a ausência de Ana, estendendo a possiblidade de solução da situação-problema para outro ponto notável do triângulo. Dessa forma, as interações do mediador, subsidiadas por consciências imediatas surgidas na sessão, o embasou para discutir a ausência de Ana, que por sua vez fez Ana justificar respostas usando restrições referentes a relações de comprimento entre as medianas do baricentro. Em meio a restringir e estender características do circuncentro e baricentro, estas puderam ser analisadas segundo possibilidades de variação, e dessas sendo considerado as que podiam ser pautadas pelas liberdades e limitações da situação-problema e das intervenções do mediador.

Percebido a inclinação de Paula mobilizada pelas justificativas de Ana, como fizera antes, priorizando objetivos maiores e não a técnica, o mediador identificou as medidas das distâncias do baricentro e do circuncentro aos vértices. Com isso os estudantes discutiram sobre possibilidades do baricentro, Ponto J, do circuncentro, Ponto K, segundo características da situação-problema. Paula, Pedro e Ana consideraram que dependendo da condição do terreno, o Ponto J economizaria mais, já que usando o Ponto J as distâncias são menores. Zeca também considerou a uniformidade do terreno e avaliou o circuncentro mais viável.

Por estar no campo das divagações, Ana entendia que para ter certeza de que ponto usar, J ou K, somente sabendo as coordenadas das cidades. Mas, como as localizações reais da cidade não foram pensadas para esta tarefa, e como o mediador já tinha conseguindo atingir objetivos da tarefa e outros que surgiram durante a mediação, ele encaminhou a sessão para o seu final.

Esse episódio exigiu mais provocações do mediador, que as embasou segundo duas fontes, dos seus constructos pedagógicos e da ausência de Ana, tendo consciência imediata que subsidiaram suas estratégias pedagógicas nas intervenções, fazendo com que os estudantes usassem poderes para questionar, replicar, justificar, convencer. Essas movimentações do mediador e dos estudantes deflagraram mais temas matemáticos pertinentes aos pontos notáveis circuncentro e baricentro, e as características da situação-problema da estação de bombeamento.

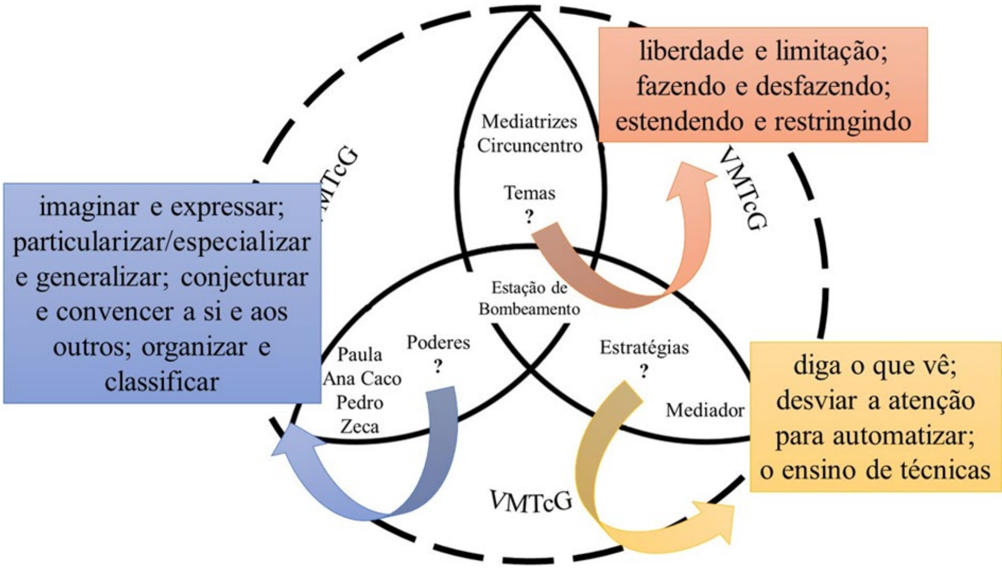
REFLEXÕES FINAIS

O desenvolvimento da tarefa Estação de Bombeamento no VMTcG figurou como uma atividade formativa online e síncrona, na medida em que os estudantes aceitaram o convite de investigar uma situação-problema, referenciada na semi-realidade da construção de uma estação de bombeamento, a partir da localização de três cidades em uma determinada região.

Em grupo, estudantes e mediador formaram uma parceria no uso de conteúdos matemáticos, que resultaram nas generalizações circuncentro e baricentro. Dessa maneira os estudantes e o mediador conseguiram capturar a estrutura essencial de uma situação-problema, resultando em modelos matemáticos, que permitiram ao grupo inferir respostas de acordo com características do enunciado da situação-problema.

Observamos também que o trabalho colaborativo dos estudantes, do mediador, e dos conteúdos matemáticos deflagrou poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos, apresentados na Figura 4.

Figura 4 – Poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos emergidos da tarefa Estação de Bombeamento no VMTcG



Fonte: (MENEZES,2021)

Reconhecemos, partindo das interações identificadas no desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática, que a manifestação dos poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos aconteceu por causa de aspectos da tarefa Estação de Bombeamento, elaborada e desenvolvida no VMTcG, como:

- as mediatrizes e o circuncentro não foram indicados no comando da situação-problema, muito menos os outros conteúdos que emergiram na sessão, o baricentro e as medianas;
- não foi indicado como os estudantes deveriam conduzir a investigação, pois as discussões foram debatidas, avaliadas, negociadas, aceitas, recusadas pelo grupo;
- houve possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução, como observado na ausência de Ana, que permitiu discutir o ponto notável derivado dos encontros das medianas de um triângulo inscrito em uma circunferência qualquer;
- houve opções de estratégias, resolução e solução;
- o controle das interações comunicativas não esteve centrado no mediador, oportunizando aos estudantes apresentarem e defenderem seus posicionamentos, bem como contestarem argumentos do mediador, caracterizando dessa forma, uma comunicação dialógica entre mediador e estudantes.

Essa combinação repercutiu nas interações dos estudantes fazendo-os usar seus poderes matemáticos, que em consonância com as estratégias pedagógicas do mediador, expressaram os temas matemáticos intrínsecos à tarefa Estação de Bombeamento. Isto porque estavam em potência e foram desenvolvidos em meio a essa combinação de poderes matemáticos e estratégias pedagógicas nos espaços do VMTcG, revelando uma dependência entre as interações dos estudantes, do mediador e dos conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 2ed. Belo Horizonte – MG: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências sociais. In: ALVESMAZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Thomson, 2 ed, 1999.

BAIRRAL, M. A. Algumas postagens para sair provisoriamente do ambiente, mas para potencializar a educação *online*. In: BAIRRAL, M. A. (Org.). **Ambiências e redes online**: interações para ensino, pesquisa e formação docente. 1ed.São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 197-207.

BAIRRAL, M. A. **Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distância.** 2ed. Seropédica/RJ: Edur, 2018.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP. Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Temas e modelos**. Campinas, SP: UFABC, 2012.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias**. 2009. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina/PR, **Anais...** Londrina/PR, 2004.

CARMO, H. & FERREIRA, M. **Metodologia da investigação**: guia para autoaprendizagem. Lisboa: Universidade Aberta, 2008.

DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação** (45), 57-67. 2013.

FOSTER C., GALLIGAN L., MACKRELL K., MASON J., MELVILLE A., PIGGOTT J., RODD M., WATSON A. Freedom and Constraint. **Mathematics Teaching**, 191, June, 2005. p. 37-40.

GIRNAT, B. & EICHLER, A. Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. In: Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (Eds.), **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**, ICTMA14 (pp. 75-84). Dordrecht: Springer, 2011.

JOHNSTON-WILDER, S.; MASON, J. **Developing Thinking In Geometry**. USA: SAGE, 2005.

MASON, J. Combining Geometrical Transformations: a meta-mathematical narrative. In: ZAZKIS R.; HERBST P (Eds). **Scripting approaches in mathematics education**: Mathematical dialogues in research and practice. Switzerland: Springer International, 2018. p. 21-52.

MASON, J., & JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. Milton Keynes, England: Open University Press, 2004.

MENEZES, R. O. **Modelagem matemática online**: temas matemáticos, poderes naturais e estratégias pedagógicas. Orientador: Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo. 2021. 185 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2021.

MENEZES, R. O.; BAIRRAL, M. A. Interações em um ambiente de aprendizagem online e síncrono: que tarefa propor com o GeoGebra?. **Revista Paradigma**, v. 41 (Nº Extra 2), 2020. p. 277-304.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

NAZARÉ, B. G.; SOUZA, E. G. Quais conteúdos matemáticos são abordados em modelagem matemática? In: IX Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2015.

PRADO, A. S.; SILVA, L. A.; SANTANA, T. S. Uma Análise Bernsteiniana de Tarefas de Modelagem Matemática no Caso 1. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 7. **Anais...**Santa Maria: 2013.

SILVA, L. A; OLIVEIRA, A. M. P. As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro (SP), 2012.

SOUZA, R. M. de; BAIRRAL, M. A. Acessar ou Interagir? Uma Análise em Disciplinas da Licenciatura em Matemática no Cederj. **EAD em Foco**, v. 6, p. 39-49, 2016.