BOLETIM GEPEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Algumas propriedades sobre os números de Richard Padovan e de François Olivier Raoul Perrin (1910)

Francisco Alves[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

RESUMO

Os autores de livros de História da Matemática costumam desconsiderar, de modo frequente, um amplo conjunto de exemplos de sequências numéricas recorrentes. De fato, aparentemente, a sequência de Fibonacci costuma ser a sequência numérica preferida dos mesmos, em detrimento de vários outros exemplos de sequências. Dessa forma, a presente proposta de sala de aula visa explorar propriedades sobre os números originados das sequências numéricas recorrentes introduzidas por Richard Padovan e pelo engenheiro francês François Olivier Raoul Perrin. Dessa forma, a partir do trabalho de Diskaya & Menken (2022) são propostas um roteiro de situações didáticas visando encetar um projeto investigativo em sala de aula, no contexto da formação inicial de professores de Matemática.
Palavras-chave: História da Matemática; Formação de Professores; Sequências numéricas recorrentes.

Some properties of the numbers introduced by Richard Padovan and François Olivier Raoul Perrin (1910)

ABSTRACT

Authors of History of Mathematics books frequently disregard a wide range of examples of recurring numerical sequences. In fact, apparently, the Fibonacci sequence is usually their preferred numerical sequence, to the detriment of several other examples of sequences. Thus, this classroom proposal aims to explore properties of numbers originating from recurrent numerical sequences introduced by Richard Padovan and the French engineer François Olivier Raoul Perrin. Thus, based on the work of Diskaya & Menken (2022), a script of didactic situations is proposed in order to initiate an investigative project in the classroom, in the context of the initial training of Mathematics teachers.
Keywords: History of Mathematics; Teacher training; Recurring numerical sequences.

Algunas propiedades de los números de Richard Padovan y François Olivier Raoul Perrin (1910)

RESUMEN

Los autores de libros de Historia de las Matemáticas frecuentemente ignoran una amplia gama de ejemplos de secuencias numéricas recurrentes. De hecho, aparentemente, la secuencia de Fibonacci suele ser su secuencia numérica preferida, en detrimento de varios otros ejemplos de secuencias. Así, esta propuesta de aula tiene como objetivo explorar las propiedades de los números que se originan a partir de secuencias numéricas recurrentes introducidas por Richard Padovan y el ingeniero francés François Olivier Raoul Perrin. Así, con base en el trabajo de Diskaya & Menken (2022), se propone un guión de

[1]Doutor em Educação com ênfase no Ensino de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - PQ2. Coordenador do Doutorado em Ensino - Polo RENOEN (IFCE), Fortaleza, CE, Brasil. Endereço para correspondência: Clovis Beviláqua, 100, Edson Queiros, Fortaleza, Ceará, país, CEP: 60000-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561. E-mail: fregis@ifce.edu.br

situaciones didácticas con el fin de iniciar un proyecto investigativo en el aula, en el contexto de la formación inicial de docentes de Matemática.
Palabras clave: Historia de las Matemáticas; Formación de profesores; Secuencias numéricas recurrentes.

INTRODUÇÃO

Em nossos trabalhos temos acentuado um componente de imprescindibilidade na cultura matemática do professor (ALVES, 2017; 2022), quando examinamos seu conhecimento acumulado sobre a noção de número. Reparemos que, não fazemos referência sobre os conhecimentos restritos, por vezes, do professor de Matemática, quando tomamos como referência o cenário de atuação da Educação Básica e, neste caso, por exemplo, sabemos que determinadas simbologias ou relações aparentemente banais, como a seguinte cadeia finita de inclusões de conjuntos $IN \subset Z \subset Q \subset IR$ (*), pode esconder ou encobrir determinadas propriedades formais e estrutura axiomática que, de modo *standard*, não discutimos no interior da escola.

Por outro lado, quando consideramos a noção de número, podemos desenvolver uma perspectiva de compreensão ampliada e aprofundada sobre o mesmo, na medida em que, além da existência dos números reais ou números complexos, existem uma enorme variedade outras entidades e hierarquias que extrapolam, grosso modo, uma simples relação conjuntista que indicamos em (*), mesmo que, de forma precisa, não revelam uma verdade, do ponto de vista axiomático[2]. De fato, quando examinamos um simples conjunto de números, por exemplo, os números indicados por 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... nos questionamos sua origem e, com certa facilidade, descobrimos que tais números são originados pela relação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $n \geq 2$.

Não obstante, ocorrem uma grande quantidade de sequências numéricas recorrentes e que evidenciam inúmeras propriedades com alguns conjuntos numéricos, costumeiramente desconsideradas pelos autores de livros de História da Matemática (ALVES, 2016; 2022). Diante deste problema, nas seções subsequentes buscaremos descrever um itinerário para pesquisa e investigação em sala de aula, a partir de certas sequências numéricas originadas e/ou correlatas ao caso das sequências de Padovan e de

[2] Ferreira (2022) apresenta uma abordagem axiomática pormenorizada e formal dos conjuntos numéricos e, por intermédio da noção de imersão, conseguimos compreender a construção formal de cópias algébricas de determinados conjuntos, de modo especial, uma cópia algébrica do conjunto dos números naturais IN no interior do conjunto dos inteiros Z, definido como um conjunto infinito de classes de equivalências, determinadas por determinada relação formal definida entre tais classes.

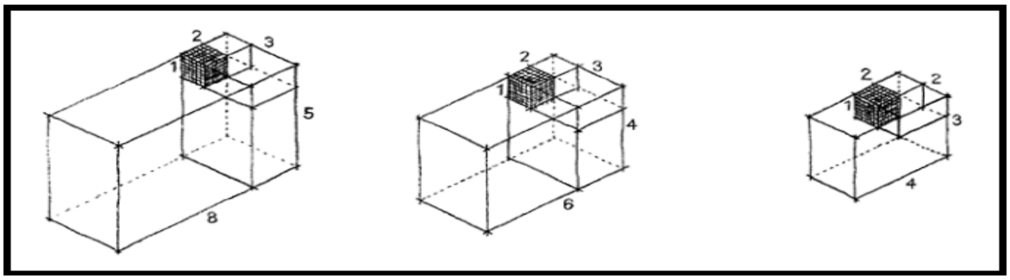
Perrin. Diante disto, se mostra imprescindível algum comentário sobre o arquiteto Richard Padovan e o engenheiro francês François Olivier Raoul Perrin.

RICHARD PADOVAN E FRANÇOIS OLIVIER RAOUL PERRIN (1841 – 1910)

Richard Padovan é um arquiteto e autor de livros, que desenvolveu projetos de arquitetura em vários países da Europa. Ele se interessou por determinadas razões e proporções empregadas em Arquitetura que determinavam valores e números particulares e, por influência do pensamento de Aristóteles, desenvolveu um estudo sistemático de medidas. Na figura 1, Padovan (1999) discute um modelo 3D e que, no contexto da Arquitetura, proporciona lidar com certas razões e magnitudes que produzem, por exemplo, a seguinte lista de números: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, ...

Na figura 1 visualizamos um esboço de figuras 3D produzidas por Padovan (1999) explica a lista de números indicados há pouco possui íntima relação com a seguinte equação $x+1=x^3$, com uma raiz real, cujo valor aproximado, costuma ser indicado $1,324717957244746025960908854478097340734404056 9...$ e cujo comportamento numérico pode ser interpretado com uma série de volumes dispostos, segundo a figura abaixo. Na figura divisamos três sólidos 3D e Padovan (1999) explica que o antigo monge beneditino holandês Dom Van der Laan (1904 – 1991) considerou que apenas uma única de três sequências numéricas realmente se conforma com a natureza da quantidade e medidas tridimensionais. Padovan (1999, p. 52) comenta que, por influência do pensamento aristotélico, lidamos com 4 sistemas de medidas e proporções, envolvendo linhas, planos e volume. Um destes sistemas corresponde, precisamente, ao número plástico. Apesar de uma contribuição indireta, a sequência definida pela recorrência $P_{n+3}=P_{n+1}+P_n, P_0=P_1=P_2=1$ e que determina a seguinte lista de números 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28,... recebeu o nome de sequência de Padovan e, além disso, tal sequência corresponde à sequência A000931 na online *encyclopedia of integer sequences* (OEIS).

Figura 1 – Padovan (1999) discute um argumento que origina determinadas razões entre magnitudes de alguns sistemas métricos e de proporções

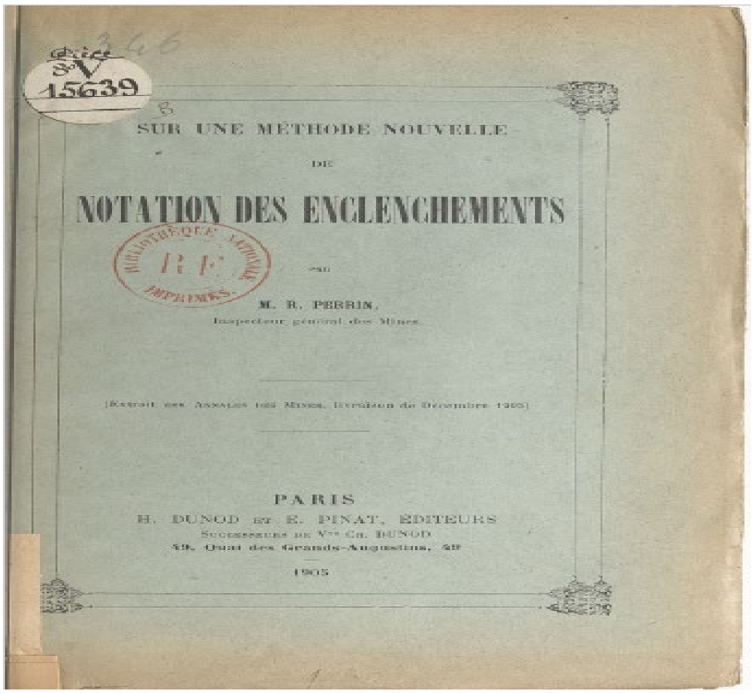


Fonte: Padovan (1999, p. 51 - 52)

FRANÇOIS OLIVIER RAOUL PERRIN (1841 – 1910)

François Olivier Raoul Perrin (1841 – 1910) foi um engenheiro francês e que atuou na Escola Politécnica de Paris (*École Polytechnique*) em 1958. A sequência que, de modo *standard*, recebe a denominação como sequência de Perrin é definida pela seguinte relação $R_{n+3} = R_{n+1} + R_n, R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$ e determina a seguinte lista 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22,,... . Reparemos que seus valores iniciais são diferentes!

Figura 2 – Perrin (1999) discute um argumento que origina determinadas razões entre magnitudes e dos quatro sistemas históricos de proporções



SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE

DE

NOTATION DES ENCLENCHEMENTS

PAR

M. R. PERRIN,

Inspecteur général des Mines.

(Extrait des Annales des Mines, livraison de Décembre 1905)

PARIS

H. DUNOD ET E. PINAT, ÉDITEURS

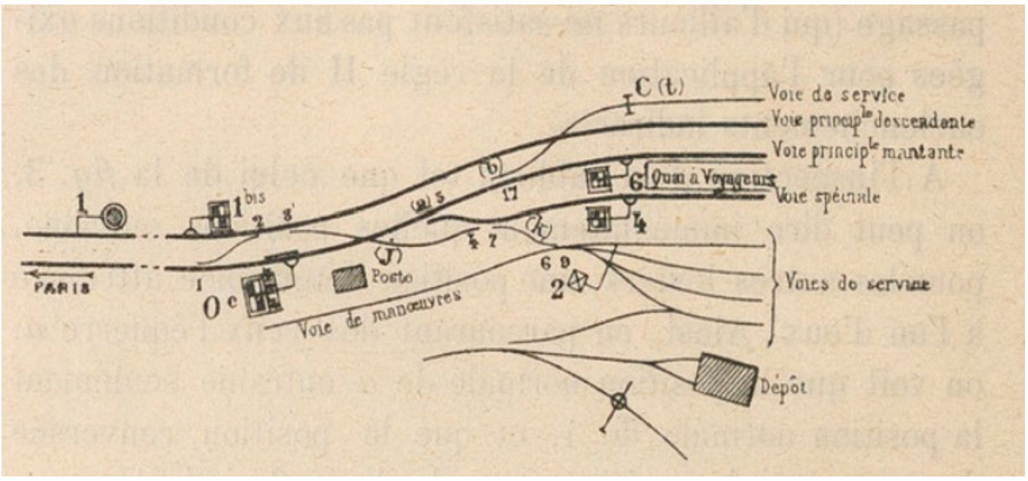
Successeurs de Vve Ch. DUNOD

49, Quai des Grands-Augustins, 49

1905

Fonte: Perrin (1905)

Figura 3 – Perrin (1905) ilustra um contexto de aplicação do seu método empregado no contexto do trânsito ferroviário na garagem ferroviária de Laigle (ao lado de Paris)



Fonte: Perrin (1905)

Na figura 2 divisamos a capa de um livro escrito por Raoul Perrin, intitulado "*Sur une méthode nouvelle de notation des enclenchements*" (Sobre um novo método de notação para sinalização ferroviária), que constitui o interesse principal de sua atividade. Logo a seguir, na figura 3, conseguimos divisar um desenho mnemônico, elaborado por Perrin (1905) e que visa explicar a aplicação e eficacidade do seu modelo matemático direcionado para um amplo sistema de funcionamento de uma linha ferroviária nas adjacências de Paris.

Logo a seguir, deparamos algumas sequências que derivam da sequência de Padovan e de Perrin.

ALGUMAS PROPRIEDADES

Na definição 1 trazemos a sequência de Richard, recentemente introduzida por Diskaya & Menken (2022).

Definição 1: A sequência de Richard é definida pela seguinte relação $\wp_{n+3} = \wp_{n+1} + \wp_n + 1$, com os seguintes valores iniciais definidos por $\wp_0 = \wp_1 = \wp_2 = 1$. (DISKAYA; MENKEN, 2022).

Quadro 1 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Richard.

$\wp_0$	$\wp_1$	$\wp_2$	$\wp_3$	$\wp_4$	$\wp_5$	$\wp_6$	$\wp_7$	$\wp_8$	$\wp_9$	$\wp_{10}$	$\wp_{11}$	$\wp_{12}$	$\wp_{13}$	$\wp_{14}$	.
1	1	1	3	3	5	7	9	13	17	23	31	41	55	73	.

Fonte: Elaboração do autor

Na definição 2 trazemos a sequência de Raoul, recentemente introduzida por Diskaya & Menken (2022).

Definição 2: A sequência de Raoul é definida pela seguinte relação $\Re_{n+3} = \Re_{n+1} + \Re_n + 1$, com os seguintes valores iniciais definidos por $\Re_0 = 3, \Re_1 = 0, \Re_2 = 2$. (DISKAYA; MENKEN, 2022).

Quadro 2 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Raoul.

$\Re_0$	$\Re_1$	$\Re_2$	$\Re_3$	$\Re_4$	$\Re_5$	$\Re_6$	$\Re_7$	$\Re_8$	$\Re_9$	$\Re_{10}$	$\Re_{11}$	$\Re_{12}$	$\Re_{13}$	.
3	0	2	4	3	7	8	11	16	20	28	37	49	66	.

Fonte: Elaboração do autor

Diante da introdução e formulação dessas novas sequências, originadas do trabalho de Diskaya & Menken (2022), apresentaremos nosso roteiro para atividade.

ATIVIDADE DE SALA DE AULA

A presente proposta envolve um conjunto de situações didáticas que o professor - formador de Matemática poderá desenvolver com alunos de Licenciatura em Matemática, cuja maior indicação se insere em disciplinas de História da Matemática.

Situação Didática 1: Considerando a sequência de Richard e de Raoul, determine os termos indicados por índices negativos $\wp_{-10}$ e $\Re_{-10}$.

Situação Didática 2: Considerando a sequência de Richard e de Raoul verifique as seguintes relações algébricas: $\wp_{n+4} = \wp_{n+3} + \wp_{n+2} - \wp_n$, $\Re_{n+4} = \Re_{n+3} + \Re_{n+2} - \Re_n$.

Situação Didática 3: Considerando a sequência de Richard e de Raoul e a sequência de Padovan (de Perrin), verifique as seguintes relações $\wp_n = 2P_n - 1$, $\Re_n = 2R_n - 1$.

Situação Didática 4: De simplificado, quando consideramos o trabalho introduzido no artigo científico de Diskaya & Menken (2022) podemos afirmar que, grosso modo, os autores apresentam apenas algumas propriedades das sequências originais de Padovan e de Perrin, a menos de determinadas propriedades e combinações?

Comentários sobre a Situação didática 1. De acordo com a recorrência indicada na definição 1, vamos substituir o seguinte índice particular e determinar $n=-1 \therefore \wp_2 = \wp_0 + \wp_{-1} + 1 \leftrightarrow \wp_{-1} = \wp_2 - \wp_0 - 1 = 1 - 1 - 1 = -1$, isto é, encontramos que $\wp_{-1} = -1$. Em seguida, para $n=-2 \therefore \wp_1 = \wp_{-1} + \wp_{-2} + 1 \leftrightarrow \wp_{-2} = \wp_1 - \wp_{-1} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$, ou seja, encontramos que $\wp_{-2} = 1$. Em seguida, vemos que se $n=-3 \therefore \wp_0 = \wp_{-2} + \wp_{-3} + 1$, segue que $\wp_{-3} = \wp_0 - \wp_{-2} - 1 = 1 - 1 - 1 = 1$. Sucessivamente, poderemos determinar a seguinte lista de elementos indicados no Quadro 3, logo abaixo.

Quadro 3 – Determinação dos termos da sequência de Richard de índice negativo

...	$\wp_{-12}$	$\wp_{-11}$	$\wp_{-10}$	$\wp_{-9}$	$\wp_{-8}$	$\wp_{-7}$	$\wp_{-6}$	$\wp_{-5}$	$\wp_{-4}$	$\wp_{-3}$	$\wp_{-2}$	$\wp_{-1}$
...	?	?	**5**	-7	3	-1	-3	3	-3	1	1	-1

Fonte: Elaboração do autor

De modo semelhante, quando consideramos a sequência de Raoul, definida por $\Re_{n+3} = \Re_{n+1} + \Re_n + 1$ vamos tomar $n=-1 \therefore \Re_2 = \Re_0 + \Re_{-1} + 1 \leftrightarrow \Re_{-1} = \Re_2 - \Re_0 - 1$ e, assim, encontraremos que $\Re_{-1} = \Re_2 - \Re_0 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$. Em seguida, veremos que $n=-2 \therefore \Re_1 = \Re_{-1} + \Re_{-2} + 1 \leftrightarrow \Re_{-2} = \Re_1 - \Re_{-1} - 1 = 0 + 2 - 1 = 1$. Para o próximo índice, teremos que ocorre $n=-3 \therefore \Re_0 = \Re_{-2} + \Re_{-3} + 1 \leftrightarrow \Re_{-3} = \Re_0 - \Re_{-2} - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$. Sucessivamente, no Quadro 4 exibimos mais alguns valores particulares e o termo $\Re_{-10}$.

Quadro 4 – Determinação dos termos da sequência de Raoul de índice negativo

...	$\Re_{-12}$	$\Re_{-11}$	$\Re_{-10}$	$\Re_{-9}$	$\Re_{-8}$	$\Re_{-7}$	$\Re_{-6}$	$\Re_{-5}$	$\Re_{-4}$	$\Re_{-3}$	$\Re_{-2}$	$\Re_{-1}$
...	?	?	?	?	?	-9	4	4	-4	1	1	-2

Fonte: Elaboração do autor

Comentários sobre a Situação didática 2. Vamos considerar as seguintes recorrências $\wp_{n+3} = \wp_{n+1} + \wp_n + 1$ e $\wp_{n+4} = \wp_{n+2} + \wp_{n+1} + 1$. A seguir, vejamos sua diferença $\wp_{n+4} - \wp_{n+3} = (\wp_{n+2} + \wp_{n+1} + 1) - (\wp_{n+1} + \wp_n + 1) = \wp_{n+2} - \wp_n \leftrightarrow \wp_{n+4} = \wp_{n+3} + \wp_{n+2} - \wp_n$. De modo semelhante, podemos encontrar uma relação semelhante, no caso da definição 2.

Comentários sobre a Situação didática 3. De modo indutivo, os estudantes podem verificar alguns exemplos numéricos particulares que indicamos na tabela abaixo e que indicam a seguinte relação $\wp_n = 2P_n - 1$ e, a seguir, empregaremos um princípio argumentativo *standard* de uma verificação que emprega Indução Matemática.

Quadro 5 – Descrição de relações numéricas entre a sequencia de Padovan e Richard

$\wp_0$	$\wp_1$	$\wp_2$	$\wp_3$	$\wp_4$	$\wp_5$	$\wp_6$	$\wp_7$	.
1	1	1	3	3	5	7	9	.
$2\cdot P_0-1$	$2\cdot P_1-1$	$2\cdot P_2-1$	$2\cdot P_3-1$	$2\cdot P_4-1$	$2\cdot P_5-1$	$2\cdot P_6-1$	$2\cdot P_7-1$	.

Fonte: Elaboração do autor

Basta verificar que $\wp_{n+3}=\wp_{n+1}+\wp_n+1=(2P_{n+1}-1)+(2P_n-1)+1=2(P_{n+1}+P_n)-1$, portanto, para todo inteiro positivo $n\geq 0$, vale a relação $\wp_{n+3}=2P_{n+3}-1$. De modo semelhante, ao considerarmos a recorrência fundamental dos números de Perrin, indicada anteriormente por $R_{n+3}=R_{n+1}+R_n$, podemos escrever a seguinte relação $\Re_{n+3}=\Re_{n+1}+\Re_n+1=(2R_{n+1}-1)+(2R_n-1)+1=2(R_{n+1}+R_n)-1=2R_{n+3}-1$. Por conseguinte, por Indução Matemática, verificamos que $\wp_n=2P_n-1$, $\Re_n=2R_n-1$, para quaisquer inteiros positivos $n\geq 0$.

Comentários sobre a Situação didática 4. Considerando as relações determinadas na situação anterior, por exemplo, a relação $\wp_n=2P_n-1$, podemos interpretar que, por intermédio de determinadas operações realizadas sobre certos vetores, podemos determinar uma outra sequência numérica recorrente e que, segundo a definição 2, foi nominada por sequência de Richard.

Por exemplo, vamos considerar o seguinte vetor infinito e indicado pela lista (solução da recorrência) $v=(1,1,1,2,2,3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 12,\ 16,...)$. A seguir, vamos tomar a seguinte operação multiplicativa $2\cdot v=(2,2,2,4,4,6,\ 8,\ 10,\ 14,\ 18,\ 24,\ 32,...)$ e, em seguida, definindo o seguinte vetor $1=(1,1,1,1,1,1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,...)$, podemos determinar a seguinte espressão $2\cdot v-1=(1,1,1,3,3,5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 17,\ 23,\ 31,...)$ cujas entradas correspondem, de modo preciso, aos valores numéricos indicados no Quadro 1.

Ademais, quando consultamos, de modo pormenorizado, o trabalho de Diskaya & Menken (2022), encontramos as seguintes afirmações presentes no seu resumo.

> In this study, we define and examine the Richard and Raoul sequences and we deal with, in detail, two special cases, namely, Richard and Raoul sequences. We indicate that there are close relations between Richard and Raoul numbers and Padovan and Perrin numbers. Moreover, we present the Binet-like formulas, generating functions,

summation formulas, and some identities for these sequences[3]. (Diskaya & Menken, 2022, p. 256)

Não obstante, questionamos os avanços científicos apresentados pelos autores, na medida em que, de modo prosaico, a sequência numérica recorrente denominada por sequência de Richard e a sequência de Raoul são provenientes de combinações e operações a partir das sequências originais de Padovan e de Perrin. De modo particular, tanto a Richard e a sequência de Raoul são ditas não homogêneas[4], enquanto que as sequências numéricas recorrentes de Padovan e de Perrin são homogêneas (não possuem termos constantes), pois não possuem termos constantes.

Outrossim, quando examinamos um amplo universo de outras sequências numéricas recorrentes (sequência de Lucas, Pell, Jacobsthal, Mersenne, Oresme, Narayanna, Leonardo, etc..) podemos verificar, com algum empenho, que tais sequências determinam novos conjuntos de números que não admitem operações semelhantes, tendo em vista a determinação de alguma delas a partir das outras.

Finalmente, sugerimos, aos alunos interessados, uma consulta ao livro de Vorobiev (2002) e um exame do seguinte teorema apresentado por Vorobiev (2002).

Teorema: Considerando duas listas (soluções) v, v' de uma determinada sequência recorrente. Então, para duas constantes quaisquer c_1, c_2 e determinadas condições de não proporcionalidade entre as soluções v, v', teremos que $c_1 v + c_2 v'$ também é solução da mesma recorrência.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de sala de aula descrita nas seções predecessoras foi amparada por um interesse precípuo do incremento de uma cultura matemática do professor (em formação inicial) e se mostra correlacionada com a noção de número e, de modo particular, determinados conjuntos numéricos originados por recorrência e que concorrem para o inscremento de inúmeros exemplos de sequências numéricas recorrentes, no âmbito da História da Matemática (ALVES, 2016; 2017, 2022).

[3] Neste estudo, definimos e examinamos as sequências de Richard e Raoul e tratamos, em detalhe, de dois casos especiais, nomeadamente as sequências de Richard e Raoul. Indicamos que existem relações estreitas entre os números de Richard e Raoul e os números de Padovan e Perrin. Além disso, apresentamos as fórmulas do tipo Binet, funções geradoras, fórmulas de soma e algumas identidades para essas sequências. (Diskaya & Menken, 2022, p. 256)

[4] Uma relação de recorrência geral é expressa por $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n)$, em que identificamos os coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_r$ e uma função $f(n)$. Quando tal função é identicamente nula, dizemos que a sequência é homogênea, caso contrário, será chamada não homogênea.

De modo especial, a presente proposta buscou enfatizar propriedades decorrentes dos números de Padovan e dos números de Perrin originados/determinados pelas correspondentes relações de recorrência, cuja terminologia adquiriu popularidade, no âmbito da pesquisa e de publicações científicas em Matemática Pura, como decorrência dos trabalhos de Richard Padovan e do engenheiro francês François Olivier Raoul Perrin (1910), embora, no caso do primeiro, a maior contribuição ocorreu a partir das descobertas do antigo monge beneditino holandês Dom Van der Laan (1904 – 1991), que proporcionou a introdução do número plástico ao campo da arquitetura.

Quadro 6 – Descrição resumida das sequências numéricas recorrentes relacionadas com a atividade de sala de aula

Sequência numérica recorrente	Fórmula de recorrência
Padovan	$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n, P_0 = P_1 = P_2 = 1$
Perrin	$R_{n+3} = R_{n+1} + R_n, R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$
Richard	$\wp_{n+3} = \wp_{n+1} + \wp_n + 1$, $\wp_0 = \wp_1 = \wp_2 = 1$ DISKAYA & MENKEN (2022)
Raoul	$\Re_{n+3} = \Re_{n+1} + \Re_n + 1$, $\Re_0 = 3, \Re_1 = 0, \Re_2 = 2$ DISKAYA & MENKEN (2022)

Fonte: Elaboração do autor

Finalmente, a proposta de sala de aula visa assinalar um roteiro de investigação que se ampara em duas novas "pseudo" sequências numéricas, uma vez que, podemos empregar uma abordagem essencialmente vetorial e, a partir de algumas noções da Álgebra Linear (KAUERS; PAULE, 2011; VOROBIEV, 2002), conseguimos determinar os mesmos resultados pretensamente discutidos por Diskaya & Menken (2022) em seu artigo científico. De modo particular, o conjunto de todas as sequências indicadas no Quadro 6 admitem um processo de extensão e determinação do seu comportamento, segundo índices inteiros negativos (ALVES; CATARINO, 2022).

AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que contribuiu para a realização desta pesquisa desenvolvida no Brasil, Processo nº 305495/2022-4.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. (2016). Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci, **Boletim GEPEM**, v. 68, nº 2, 112 – 117.

ALVES, F. R. V. (2017). Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, 17(1), 1-16.

ALVES, F. R. V. (2022). Didactic Engineering and Professional Didactics: a proposal of historical research in Brazil on recurring number sequence, **Mathematics Enthusiasts**, v. 19. nº 1, 239 – 274.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. (2022). A Sequência de Padovan ou de Coordonier. **Revista Brasileira de História da Matemática – RBHM**, 22(45), 1 – 22.

DISKAYA, O.; MENKEN, H. (2022). On the Richard and Raoul numbers, **Journal of New Results in Science**, v. 11, nº 3, 256-264. Disponível em: https://dergipark.org.tr/en/pub/jnrs/issue/74875/1201184

KAUERS, M.; PAULE, P. (2011). **The Concrete Tetrahedron: ymbolic Sums, Recurrence Equations, Generating Functions, Asymptotic Estimates**, Germany: Springer-VerJag/Wien.

OEIS, **The on-line encyclopedia of integer sequences.** https://oeis. org/A000931.

PADOVAN, R. **Proportion: Science, Philosophy, Architecture**. New York: Taylor & Francis, 1999.

PERRIN, F. O. R. (1905). **Sur une méthode nouvelle de notation des enclenchements**, Paris: H. Dunod et E. Pinat editeurs.

VOROBIEV, N. N. (2002). **Fibonacci numbers**, New York: Springer. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-0348-8107-4