

Trilhas Matemáticas e Metodologias Colaborativas: possíveis conexões

Edinéia Zarpelon¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Janecler Aparecida Amorin Colombo²

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Gilberto Souto³

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

RESUMO

Este artigo tem como objetivo apresentar as trilhas matemáticas, apoiadas pelo recurso tecnológico do *MathCityMap* (MCM), como uma alternativa pedagógica relacionada às metodologias de aprendizagem colaborativa, visando a promoção de aulas mais significativas aos estudantes da era digital. A investigação partiu do seguinte questionamento: “o que revelam as percepções dos proponentes e dos participantes de trilhas matemáticas, apoiadas pelo MCM?” Para tanto, inicialmente apresenta-se uma revisão bibliográfica com o intuito de descrever o movimento instaurado em 2012 com o desenvolvimento das trilhas matemáticas potencializadas pelo uso do recurso tecnológico MCM. Em seguida, indicam-se algumas possibilidades e limites em sua utilização com base em um estudo piloto realizado em uma cidade do sudoeste do Paraná. Esta pesquisa assume pressupostos metodológicos de caráter qualitativo e exploratório e está amparada pelos relatos de dois professores proponentes das trilhas e de seis participantes do ensaio. Os resultados revelam que há mais possibilidades do que limitações para o desenvolvimento das trilhas, que este tipo de tarefa promove uma verdadeira interação e cooperação entre os participantes, motiva o estudante a buscar respostas e promove sua participação ativa no aprendizado da matemática.

Palavras-chave: Tecnologias digitais; Ensino de matemática; Aprendizagem colaborativa; Trilhas matemáticas.

Math trails and Collaborative Methodologies: possible connections

ABSTRACT

This article aims to present the mathematical trails, supported by the technological resource of *MathCityMap* (MCM), as a pedagogical alternative related to collaborative learning methodologies, aiming

¹Doutora em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Ponta Grossa (UTFPR-PG) e em Ciências da Educação pela Universidade Claude Bernard Lyon 1 (UCBL 1). Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Via do Conhecimento, s/n - KM 01, Departamento de Matemática, Fraron, Pato Branco, Paraná, Brasil, CEP: 85503-390. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4715-1450>. E-mail: ezarpelon@utfpr.edu.br.

²Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Via do Conhecimento, s/n - KM 01, Departamento de Matemática, Fraron, Pato Branco, Paraná, Brasil, CEP: 85503-390. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7729-9501>. E-mail: janecler@utfpr.edu.br.

³Mestre em Matemática e Computação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Via do Conhecimento, s/n - KM 01, Departamento de Matemática, Fraron, Pato Branco, Paraná, Brasil, CEP: 85503-390. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5908-215X>. E-mail: souto@utfpr.edu.br.

to promote more meaningful classes for students in the digital age. The investigation started with the following question: "What do the perceptions of proponents and participants of math trails supported by MCM reveal?" Therefore, initially a bibliographic review is presented to describe the movement started in 2012 with the development of mathematical trails enhanced using the MCM technological resource. In the sequence, some possibilities and limits in its use are indicated, based on a pilot study carried out in a city in the southwest of Paraná. This research assumes methodological assumptions of a qualitative and exploratory nature and is supported by the reports of two teachers who proposed the trails and six participants in the trial. The results reveal that there are more possibilities than limitations for the development of trails and that this type of task promotes real interaction and cooperation between the participants; it motivates them to seek answers and promotes their active participation in math learning. **Keywords:** Digital technologies; Math teaching; Collaborative methodologies; Math Trails.

Rutas Matemáticas y Metodologías Colaborativas: posibles conexiones

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo presentar las rutas matemáticas, apoyadas por el recurso tecnológico del MathCityMap (MCM), como una alternativa pedagógica relacionada a las metodologías de aprendizaje colaborativo, para promover clases más significativas para los estudiantes de la era digital. La investigación partió del siguiente cuestionamiento: "¿qué revelan las percepciones de los proponentes y de los participantes de rutas matemáticas, apoyadas por el MCM?" Para tanto, inicialmente se presenta una revisión bibliográfica con el objetivo de describir el movimiento instaurado en 2012 con el desarrollo de las rutas matemáticas potenciadas por el uso del recurso tecnológico MCM. Luego se indican algunas posibilidades y límites en su utilización con base en un estudio piloto realizado en una ciudad del suroeste de Paraná. Esta investigación asume presupuestos metodológicos de carácter cualitativo y exploratorio y está amparada por los relatos de dos profesores proponentes de las rutas y de seis participantes del ensayo. Los resultados revelan que hay más posibilidades que limitaciones para el desarrollo de las rutas, que este tipo de tarea promueve una verdadera interacción y cooperación entre los participantes, motiva al estudiante a buscar respuestas y promueve su participación activa en el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: Tecnologías digitales; Enseñanza de las matemáticas; Aprendizaje colaborativo; Rutas matemáticas.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o número de reflexões e iniciativas visando contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos aumentou consideravelmente, especialmente no campo da Educação Matemática. Parte das discussões estão voltadas às práticas pedagógicas e às estratégias de ensino utilizadas em sala de aula, muitas das quais ainda estão amparadas no modelo de ensino tradicional apesar dos avanços trazidos pelas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC).

As TDIC estão cada vez mais presentes em diversos âmbitos sociais e alcançando, dia após dia, um número maior de indivíduos e impactando expressivamente suas formas de agir e viver. Assim, é justificável a necessidade de que também ocorram inovações nas salas de aula, a fim de preparar melhor os aprendizes para lidarem com essa realidade imersa pela tecnologia e pautada cada vez mais nos pilares da democracia e inclusão social. É notório que o acesso à informação não depende mais exclusivamente do professor; ao contrário, se dá de forma imediata e em tempo real, ou seja, já não há mais

espaço para uma educação unicamente conteudista e centrada no individualismo. A exigência educacional eminente passa a ser preparar indivíduos ativos, protagonistas na sociedade, capazes de interagir com os outros, de trabalhar cooperativamente, de conviver com a diversidade e de respeitar as diferenças.

É com foco nesse cenário que as metodologias colaborativas de aprendizagem, aliadas o uso das TDIC, vêm se apresentando como ponto central das possibilidades de inovar na educação escolar e universitária. Destaca-se que um modelo pedagógico amparado em metodologias colaborativas de aprendizagem tem por objetivo um aprendizado baseado no aluno; no “aprender” mais do que no “ensinar”; uma abordagem mais significativa que tenha contato e ligação com o mundo real; mais experimentações em projetos, discussões, pesquisa, reflexões (ZARPELON; LUSITANI; COLOMBO, 2019).

Sob essa égide, neste trabalho apresenta-se as trilhas matemáticas apoiadas pela ferramenta digital *MathCityMap* (MCM) como uma das possibilidades para esse “inovar” interconectado com a cultura digital. Trata-se de uma proposta que visa contribuir para a superação das abordagens de ensino que estejam centradas unicamente na fala docente, na leitura de um livro e no comportamento passivo do aluno.

TRILHAS MATEMÁTICAS: ORIGEM, DEFINIÇÃO E ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS ASSOCIADOS À APRENDIZAGEM FORA DA SALA DE AULA

Segundo Shoaf, Pollak e Schneider (2004), uma trilha de matemática é uma caminhada para descobrir a matemática e suas aplicações, sendo que a mesma pode ser criada em diversos lugares (por exemplo: ruas da vizinhança, estacionamentos, bairros, shoppings, parques, bibliotecas, prédios governamentais). Em síntese, trata-se de uma combinação de diferentes tarefas matemáticas localizadas a uma curta distância e acessíveis por meio de um mapa ou guia, os quais indicam os locais onde as atividades foram formuladas. Os participantes da trilha deverão coletar os dados pertinentes, formular e testar hipóteses, discutir e resolver os problemas propostos. Qualquer um pode percorrer uma trilha matemática e esse caminhar pode ser individual, com a família ou com outro grupo de pessoas. Nos casos em que a trilha é realizada em grupos, os caminhantes cooperam ao longo do percurso enquanto conversam sobre os problemas estabelecidos.

Factualmente, as trilhas matemáticas estão estabelecidas como ambientes de aprendizagem há mais de trinta anos (ZENDER; LUDWIG, 2016) e surgiram com Blane

e Clark em 1985, em Melbourne na Austrália. Naquela época, Blane e alguns colegas elaboraram uma trilha nas redondezas do centro da cidade com o intuito de que fosse uma atividade de férias para as famílias. Dentre os problemas propostos estavam investigar um padrão circular de tijolos no pavimento (para descobrir a invariância de π), observar o reflexo de uma catedral em um lago (para estimar sua altura), estimar a velocidade da água correndo por um vertedouro, contar o número de janelas na parede de um arranha-céu, estudar os horários em uma estação de trem e procurar padrões no número de caixas postais (SHOAF; POLLAK; SCHNEIDER, 2004).

Após essa primeira proposta, educadores matemáticos australianos propuseram novas trilhas com questões matemáticas instigantes, algumas delas com diferentes possibilidades de resposta. Milhares de australianos as percorreram e atestaram sua popularidade. Ademais, dada a grande demanda pela trilha de Blane, os organizadores a mantiveram por alguns meses, prolongando o período proposto inicialmente, que era de uma semana (SHOAF; POLLAK; SCHNEIDER, 2004).

Destaca-se que, Blane e seus colaboradores tinham como objetivo popularizar a matemática e não estavam preocupados em atender as necessidades das aulas de matemática da escola. As tarefas eram apresentadas no formato físico, isto é, em folhas de papel a serem preenchidas pelos estudantes. Posteriormente, o professor analisava as soluções apresentadas e, em caso de necessidade, ajustava as tarefas em cada uma das folhas e para cada uma das trilhas.

Ao destacar algumas características das trilhas matemáticas, Shoaf, Pollak e Schneider (2004) pontuam, inicialmente, que elas não são destinadas apenas para amantes da matemática ou estudantes graduados; ao contrário, podem e devem ser direcionadas principalmente para aquelas pessoas que não praticam a matemática conscientemente e cujas memórias escolares em relação a ela não sejam tão positivas. Assim, os autores reforçam que as trilhas devem ser elaboradas para todo público, haja vista também que a matemática faz parte do cotidiano de qualquer cidadão. Ao discutir como abordar determinado problema, os participantes comparam seus pensamentos e essa discussão sobre a matemática ajuda a trazê-la com maior evidência à vida e a construir neles maior confiança em suas habilidades (SHOAF; POLLAK; SCHNEIDER, 2004).

Para além dos conceitos matemáticos, as trilhas também visam proporcionar diversão aos participantes e, conseqüentemente, contribuem para a popularização da Matemática e da Educação Matemática informal que, na visão de Shoaf, Pollak e

Schneider (2004, p. 6) “têm sido cada vez mais reconhecidas como auxiliares valiosos para melhorar a educação matemática nas escolas.”

Considerando o contexto escolar, Zender e Ludwig (2016) defendem que, além do aspecto de diversão, ao percorrerem as trilhas matemáticas os estudantes desenvolvem a habilidade de cooperação, haja vista a sugestão de que elas sejam realizadas em pequenos grupos (com, no máximo, três integrantes). Ademais, a matemática sai do livro e passa a entrar na vida real dos estudantes, os quais explorarão seus cotidianos com olhares matemáticos, sendo assim uma experiência motivadora (ZENDER; LUDWIG, 2016). Esse movimento de “sair da sala de aula” em busca de novos espaços para a aprendizagem também sugere o desenvolvimento de emoções positivas em torno, tanto das relações de ensino e aprendizagem da matemática, quanto das relações entre estudantes e professores.

Destaca-se ainda o estereótipo de que a Matemática é uma área do conhecimento inacessível, carregada de emoções negativas (ALVES; DANTAS; OLIVEIRA, 2012) para a qual poucos estudantes apresentam afinidade e conseguem realmente compreendê-la. Nesse sentido, é possível que as ressalvas em relação à Matemática, apresentadas por uma parcela da população, seja decorrente de experiências traumáticas (DE CARVALHO; GONTIJO, 2020; TYTECA, 2012).

Na contramão do exposto, alguns estudos sugerem que a aprendizagem fora da sala de aula, em geral, está associada a emoções positivas e a um maior interesse e compreensão do significado pessoal relacionado aos assuntos matemáticos estudados (CAHYONO; LUDWIG, 2019; CAHYONO; MIFTAHUDIN, 2018), evidenciando, portanto, um caráter mais afetivo.

Levando-se tais fatos em consideração, torna-se evidente que as dimensões afetiva e cognitiva no que tange o processo de ensino e aprendizagem precisam coexistir. É então importante que as instituições escolares estimulem a “formação de atitudes positivas em relação à matemática ao longo das séries escolares” (LOOS, 2007, p. 250) a partir de diversas fontes, despertando com isso motivação para os estudantes aprenderem matemática.

Por fim, salienta-se o desenvolvimento da autonomia estudantil (ZENDER; LUDWIG, 2016). A característica da autonomia, aliada à participação efetiva na resolução dos problemas, promovem o que denominamos como aprendizagem ativa, uma tendência cada vez mais forte na educação. Existem estudos empíricos demonstrando que

o uso das trilhas matemáticas ao ar livre leva os estudantes a estabelecerem melhor relação com a matemática e, conseqüentemente, melhorarem seus desempenhos na disciplina (CAHYONO; LUDWIG, 2016; CAHYONO; LUDWIG, 2019).

Destaca-se ainda que a proposta de trabalhar matemática ao ar livre, em situações reais de aprendizagem, remonta alguns princípios do movimento chamado Escola Nova, o qual defendia o uso de metodologias de ensino centradas na aprendizagem pela experiência e no desenvolvimento da autonomia do aprendiz (ALMEIDA, 2018).

Na atualidade nota-se o crescimento do ideário da Escola Nova, por assim dizer, de forma revisitada, levando ao encontro das chamadas metodologias ativas, que hoje podem ser compreendidas como ponto de partida “para processos mais avançados de reflexão, de integração cognitiva, de generalização, de reelaboração de novas práticas” (MORAN, 2015, p. 18).

Veiga e Fernandes (2017) trazem a ideia de que neste processo de evolução, influências como os movimentos evolutivos, tanto na tecnologia como no campo epistemológico e metodológico da Pedagogia, reconfiguraram os princípios da Escola Nova para o que denominam de metodologias colaborativas, participativas e problematizadoras.

De acordo com as autoras, as metodologias colaborativas envolvem também procedimentos e técnicas diversificadas que têm o intuito de promover as relações interpessoais e a participação dos estudantes nas atividades com responsabilidade partilhada. Nestes movimentos de divisão de responsabilidades e de discussões, os estudantes têm a oportunidade de se envolver mais com os conteúdos sistematizados, promovendo uma aprendizagem significativa para eles.

Segundo Almeida (2018), o “aprender fazendo” em experiências com potencial educacional, defendido por John Dewey – um dos pensadores do movimento da Escola Nova – se faz presente em tempos de metodologias ativas e colaborativas integradas às TDIC. Nesta perspectiva, enquadram-se experiências que tenham valor para a aprendizagem, que sejam fomentadas por meio da problematização, que enfatizem a participação do aprendiz despertando a curiosidade e o engajamento; práticas que o leve a fazer e a refletir sobre o fazer; práticas que proporcionem o trabalho colaborativo, a comunicação e o desenvolvimento da autonomia na tomada de decisões, o protagonismo. Todos esses aspectos podem ser contemplados ao se propor ensinar matemática por meio das trilhas matemáticas ao ar livre.

MathCityMap

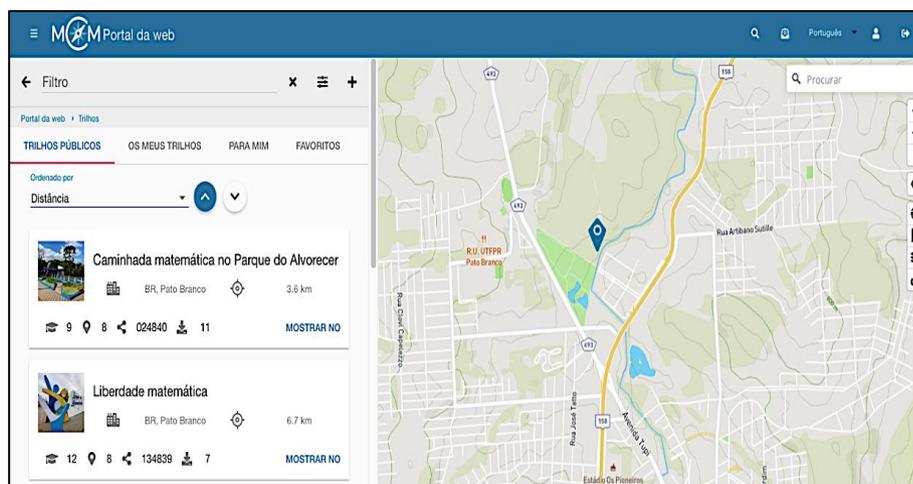
Como já mencionado, as primeiras trilhas foram estabelecidas com o objetivo de popularizar a matemática há mais de trinta anos e, em seguida, devido à repercussão exitosa foram transferidas para o contexto educacional e utilizadas para ensinar matemática nas escolas.

Em 2012 surge uma iniciativa centrada na utilização das trilhas matemáticas no contexto escolar amparada pela tecnologia: o *MathCityMap* (MCM). Desenvolvido na Universidade de Goethe em Frankfurt (Alemanha), em cooperação com outros parceiros internacionais (TARANTO *et al.*, 2021), desponta como a única ferramenta tecnológica gratuita elaborada especificamente para ensinar matemática ao ar livre.

Em síntese, o MCM é um sistema formado por dois componentes: o portal *web* e o aplicativo para dispositivos móveis. O portal *web* destina-se à criação e ao compartilhamento das tarefas (as quais estão sempre relacionadas a objetos reais existentes) e das trilhas. Em setembro de 2021, por exemplo, estavam disponíveis mais de 27.000 tarefas, de mais de 8.800 autores distribuídos em mais de 40 países e abarcando 12 idiomas diferentes (TARANTO *et al.*, 2021).

O ambiente *web* também conta com uma ferramenta de busca a qual permite selecionar as trilhas ou as tarefas matemáticas segundo a distância, a ordem cronológica de criação ou o nível de ensino desejado. A Figura 1 ilustra um exemplo da referida ferramenta e indica as trilhas que estão geograficamente mais próximas do ponto em que o usuário se encontra.

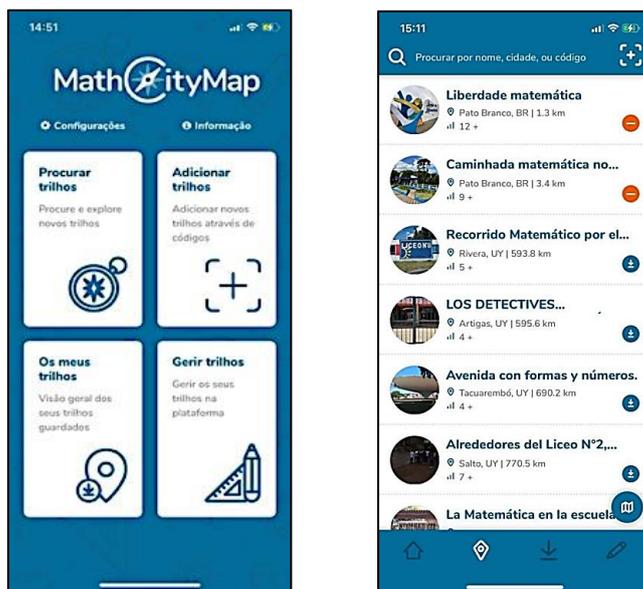
Figura 1 - Interface para pesquisa das trilhas no portal *web* do MCM



Fonte: os autores (2021)

Por sua vez, os estudantes acessam as tarefas por meio do aplicativo móvel do MCM para *smartphones* (Figura 2), o qual serve como guia e direciona-os para os locais onde as tarefas foram elaboradas. Ressalta-se que, para realizar as tarefas disponíveis no sistema é necessário o participante estar próximo ao objeto ou local, os quais são indicados via satélite (GPS) e/ou imagem pelo aplicativo móvel.

Figura 2 - Interfaces iniciais do aplicativo MCM para dispositivos móveis



Fonte: os autores (2021)

Como alternativa, por meio do aplicativo do MCM, também é possível obter um arquivo em formato PDF da trilha e, assim, as atividades podem ser executadas completamente sem acesso à internet. Além disso, para evitar que os estudantes fiquem bloqueados ou desmotivados diante de dificuldades relacionadas a alguma tarefa, os professores podem fornecer pistas para a sua resolução, as quais são passíveis de acesso e visualização pelos participantes durante a realização da trilha. Destaca-se, ainda, a possibilidade de criação de uma “sala de aula digital”, a qual possibilita aos docentes acompanharem em tempo real o progresso dos estudantes em relação ao desenvolvimento das atividades. Em síntese, esse recurso permite que os professores interajam instantaneamente com os seus estudantes por meio de *chat*, verifiquem quais foram as respostas inseridas para as tarefas e também tenham informações sobre a localização dos grupos na trilha (TARANTO *et al.*, 2021).

Quanto às tarefas do MCM, atualmente estão disponíveis dez modalidades, distribuídas em função dos formatos de respostas, a saber: (1) valor exato, (2) múltipla escolha, (3) intervalo, (4) vetor – intervalo, (5) vetor – valor exato, (6) fração, (7) estação de informação, (8) preenchimento de espaços em branco, (9) conjunto, (10) tarefa GPS. Ademais, existe a possibilidade de que tarefas mais elaboradas sejam divididas em subtarefas menos complexas e complementares.

Em particular, destaca-se que o formato “estação de informação” não se constitui exatamente como uma tarefa a ser resolvida, pois tem por objetivo apresentar fatos importantes relacionados, por exemplo, aos monumentos, construções ou personagens históricos presentes ao longo da trilha. Portanto, é uma modalidade de tarefa de cunho exclusivamente informativo.

É importante mencionar ainda que a resposta inserida para uma determinada tarefa é imediatamente verificada pelo aplicativo e um *feedback* instantâneo é fornecido aos estudantes. Além disso, após validarem a sua resposta, os usuários têm acesso ao “Exemplo de solução”, fornecida no MCM, que permite a comparação das respostas e das estratégias utilizadas na resolução da respectiva atividade. Outra possibilidade prevista no aplicativo é atribuir pontos para a resolução das tarefas, ou seja, a gamificação está incluída no pacote do MCM.

O ENSAIO E AS CONEXÕES PENSADAS

As trilhas que suportam o presente estudo foram elaboradas por dois professores de uma universidade pública brasileira, os quais participaram de um curso online denominado “*Task Design for Math Trails*”⁴, ofertado gratuitamente pela Universidade da Catania (Itália) no primeiro semestre de 2021. A elaboração de uma trilha, constituída por oito tarefas, era um dos requisitos necessários para fins de certificação no curso citado. No entanto, para além da certificação, no decurso da formação emergiram inquietações nestes docentes acerca da eficácia dessa proposta, as quais levaram ao planejamento de uma investigação inicial centrada nas possibilidades e nos limites das trilhas enquanto estratégia para ensinar e aprender matemática.

⁴ Na língua portuguesa, o curso denomina-se “Design de tarefas para trilhas matemáticas” e informações mais detalhadas sobre o referido curso podem ser encontradas em Taranto *et al.* (2021).

Neste primeiro ensaio⁵, apresentado em tela, os esforços estarão concentrados na análise de aspectos englobando a elaboração das tarefas, assim como a proposição e a aplicação de duas trilhas matemáticas. Para tanto, duas perspectivas serão consideradas: a dos proponentes (n=2) e a dos participantes (n=6).

Cabe esclarecer que o termo “proponentes” será utilizado para fazer referência aos dois docentes que elaboraram as duas trilhas que são foco desta investigação, e “participantes” para os seis indivíduos que as percorreram, realizando as tarefas propostas. Destaca-se que dois professores universitários e quatro estudantes do quarto ano de um curso técnico integrado em nível médio constituem o grupo dos participantes. Em particular, salienta-se que os discentes envolvidos eram maiores de idade e a concordância em relação à pesquisa foi formalizada por meio da assinatura de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Importante explicitar ainda que o número reduzido de participantes é decorrente da situação imposta pela pandemia da Covid-19 e das restrições sanitárias adotadas na época de aplicação da proposta.

Em síntese, os dados deste estudo foram produzidos em três momentos específicos, sendo que o primeiro se refere à fase de elaboração das tarefas e à produção das trilhas; o segundo concerne à fase de execução das trilhas pelos participantes acompanhados pelos proponentes e o último diz respeito ao relato dos participantes. As percepções dos proponentes, descritas enquanto resultados desta pesquisa, amparam-se nas observações advindas nas fases de elaboração (fase 1) e de execução (fase 2) das trilhas, ao passo que as percepções dos participantes decorrem das fases de execução (fase 2) e de relato (fase 3).

A presente investigação caracteriza-se como um estudo piloto, haja vista que este tipo de pesquisa, em geral, é realizado em pequena escala e ajuda a testar, avaliar, refinar e aprimorar um ou mais aspectos de um estudo final (YIN, 2016; CANHOTA, 2008).

Quanto aos objetivos, trata-se de um estudo exploratório (GIL, 2016), pois busca-se maior familiaridade e compreensão sobre a elaboração, aplicação e desenvolvimento das trilhas matemáticas, pretendendo estabelecer fundamentos para uma investigação posterior, mais ampla e sistemática.

⁵ Entendido como uma experimentação prévia, realizada com o intuito de coletar informações que nos permitam inferir se a utilização de um conjunto de tarefas ao ar livre (trilhas) pode contribuir para a melhoria no ensino de Matemática.

As análises partem de pressupostos metodológicos de caráter qualitativo (GOLDENBERG, 2004), pautadas na avaliação de relatórios envolvendo a resolução das tarefas que compunham as trilhas matemáticas.

O interesse na realização dessas trilhas⁶, mesmo com uma amostra inicial limitada, estava amparado nos seguintes objetivos: (1) avaliar as percepções iniciais dos proponentes em relação aos limites e às possibilidades de ensinar matemática por meio de trilhas apoiadas pelo recurso tecnológico MCM; (2) verificar a aceitação ou não da proposta de “aprender matemática ao ar livre” por parte dos participantes, (3) familiarizar os proponentes e os participantes com o aplicativo móvel do MCM, (4) verificar a interação entre o aplicativo móvel MCM e o portal da *web*, (5) identificar possíveis falhas na formulação das tarefas, fornecimento das dicas, descrição das soluções e dos tipos de respostas, bem como na utilização do MCM, (6) avaliar a adequação do tempo estipulado para a realização das trilhas, e (7) verificar se as ferramentas de apoio indicadas para a resolução dos problemas eram adequadas e se foram utilizadas pelos participantes.

Importante mencionar que as duas trilhas matemáticas que deram suporte para a realização desse ensaio estão localizadas em pontos turísticos de uma cidade localizada no sudoeste do Paraná e são constituídas por oito tarefas, englobando conceitos matemáticos do sexto ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio. Uma das trilhas tem um percurso total de 1,8 km, enquanto a outra tem um percurso de 400 m.

Quanto à realização das trilhas, os participantes foram organizados em duplas e a execução das atividades se deu em diferentes dias da semana, sempre acompanhada pelos proponentes. Para cada dupla foram fornecidas ferramentas de apoio (prancheta, folhas de papel, lápis, borracha, caneta, calculadora, transferidor, trena, nível, fita métrica e barbante) que pudessem auxiliar na resolução das tarefas.

Os proponentes das trilhas acompanharam as duplas participantes, porém mantiveram uma distância razoável de modo a permitir que elas discutissem as atividades com maior autonomia e liberdade. Em caso de dificuldades, havia intervenções no sentido de auxiliá-las (quer seja na coleta das informações e manuseio dos instrumentos, quer seja na compreensão dos conteúdos envolvidos nas tarefas).

Algumas resoluções foram registradas pelos participantes nas folhas de papel e a resposta final de cada uma das tarefas foi inserida no aplicativo do MCM.

⁶ Disponíveis em: <https://mathcitymap.eu/pt/portal-pt/#!/trail/024840> e <https://mathcitymap.eu/pt/portal-pt/#!/trail/134839>

Por fim, após a conclusão das trilhas, os participantes foram convidados a escrever um relato, destacando suas percepções quanto ao desenvolvimento da proposta de “aprender matemática ao ar livre”. Esses relatos foram encaminhados via *e-mail* para uma das pesquisadoras, alguns dias após a execução das duas trilhas.

Os dados produzidos a partir deste estudo piloto foram analisados por meio da metodologia da Análise de Conteúdos de Bardin (1977, p. 31) que a define como “um conjunto de técnicas de análise das comunicações”. Segundo a autora, não se trata de um único instrumento de análise, mas sim de um leque de opções marcados por uma grande disparidade de formas e adaptável ao vasto campo das comunicações. Este tipo de análise se mostra bastante relevante nas pesquisas em educação, inclusive as que tratam sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

A organização da análise seguiu em torno dos três polos sugeridos pela autora: (a) a pré-análise, na qual foi realizada a organização dos relatos, a leitura flutuante e escolha dos documentos que fariam parte da segunda fase; (b) a fase de exploração do material que consiste na categorização das informações, apresentadas nos quadros 1 e 2, e (c) a última fase que trata da interpretação e atribuição de significados aos resultados brutos, ou seja, a discussão das categorias.

O Quadro 1 apresenta as categorias e subcategorias emergentes dos dados analisados, relacionadas às percepções dos proponentes nas fases 1 (elaboração das tarefas e das trilhas) e 2 (execução da trilha) da pesquisa.

Quadro 1 - Categorias produzidas nas fases 1 e 2 da pesquisa - proponentes

Questão de Pesquisa	Categorias de Análise	Subcategorias de Análise
O que revelam as percepções dos proponentes de trilhas matemáticas, apoiadas pelo MCM?	Potencialidades	Baixo esforço para a criação de alguns tipos de tarefas
		Incorporação de elementos históricos e culturais
		Manuseio de diferentes instrumentos
		Recurso “sala de aula digital”
		Dinamicidade do aplicativo
		Cooperação
	Limites	Impossibilidade de inserção de questões abertas
		Tempo para a execução da trilha

		Questões inadequadas para o público-alvo
		Problemas técnicos

Fonte: os autores (2021)

Por sua vez, o Quadro 2 apresenta as categorias e subcategorias resultantes das percepções dos participantes, relacionadas às fases 2 (execução da trilha) e 3 (relato) da pesquisa.

Quadro 2 - Categorias produzidas nas fases 2 e 3 da pesquisa - participantes

Questão de Pesquisa	Categorias de Análise	Subcategorias de Análise
O que revelam as percepções dos participantes de trilhas matemática, apoiadas pelo MCM?	Potencialidades	Estilo de tarefa motivadora
		Cooperação
		Competição saudável
		Local de desenvolvimento
		Dinamicidade do aplicativo
	Limites	Conteúdo das questões
		Falhas no aplicativo

Fonte: os autores (2021)

As principais considerações tecidas, acerca das subcategorias listadas nos Quadros 1 e 2, seguem apresentadas na sequência do documento em tela.

O ENSAIO E AS CONEXÕES POSSÍVEIS

Os dados produzidos e analisados revelaram duas grandes categorias a respeito das percepções, tanto dos proponentes quanto dos participantes: as potencialidades e os limites. A primeira categoria demonstra os pontos que mereceram destaques positivos e que poderão servir como norte para as novas pesquisas, e a segunda categoria indica as limitações da proposta e os aspectos que podem ser repensados e melhorados.

Em se tratando da categoria “Potencialidades”, identificadas na fase de elaboração das atividades, os proponentes das trilhas destacam: (a) o baixo esforço exigido para a criação de algumas tarefas e (b) a possibilidade de inserir uma descrição do objeto relacionado à atividade.

O primeiro aspecto faz alusão a um recurso disponível no MCM denominado “assistente de tarefas”, o qual comporta modelos específicos de atividades padronizadas, para as quais é necessário inserir apenas algumas informações numéricas, sendo o enunciado da questão e as dicas de resolução gerados automaticamente.

Em relação ao segundo aspecto, os proponentes enfatizam a existência de um campo no MCM que permite a inclusão de informações adicionais relacionadas aos objetos específicos de uma tarefa. Essa funcionalidade foi ampliada recentemente com a criação de um novo formato de tarefa (já citado anteriormente e que não estava disponível na época de realização deste estudo) denominado “estação de informação”, o qual possibilita a incorporação de informações históricas ou culturais associadas aos objetos distribuídos ao longo de uma trilha. Tais recursos enriquecem ainda mais a experiência desse “caminhar” e proporcionam a aquisição de conhecimentos relacionados a outros componentes curriculares, para além da matemática.

Em relação à fase 2 – de execução das trilhas – os proponentes apontam cinco subcategorias como potencialidades da proposta: (a) o contato e manuseio de diferentes ferramentas como, por exemplo, trena, fita métrica, barbante, nível; (b) o recurso “sala de aula digital” disponível no portal *web* do MCM, o qual permite o acompanhamento em tempo real do desempenho dos participantes; (c) a dinamicidade do aplicativo MCM; (d) a cooperação; e (e) a competição saudável.

Importante mencionar que as três últimas potencialidades citadas pelos proponentes também foram percebidas pelos participantes das trilhas, os quais destacam ainda como aspectos positivos da proposta: o estilo da tarefa motivadora e o local de desenvolvimento da tarefa (Quadro 2).

Em particular, o “estilo da tarefa motivadora” esteve presente nos relatos de todos os participantes. Destaca-se o texto da Dupla A: *“a atividade despertou o interesse pelos próximos exercícios e conteúdos que poderiam aparecer (...)”* que, a nosso ver, representa este aspecto.

Conforme sublinham Silva e Teixeira (2008), o “querer fazer” relaciona-se diretamente com o aspecto afetivo e independe, ao menos aparentemente, do “saber fazer”, ou seja, quanto mais motivado e interessado pela realização de uma tarefa estiver o estudante, mais forte será o seu “querer fazer”. Ele pode não ter o conhecimento necessário naquele momento, mas terá a motivação necessária para buscar aquele conhecimento. Nesse sentido, em suas pesquisas envolvendo a emoção e a matemática, Chacón (2003) coloca que grande parte das dificuldades do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina reside nas emoções (positivas ou negativas), nas atitudes e nas crenças envolvidas nesse processo.

A subcategoria “cooperação” - também apontada tanto pelos proponentes quanto pelos participantes da proposta - destaca uma potencialidade para o uso das trilhas também observada por Zender e Ludwig (2016). De certa forma, aceita-se que a cooperação está associada também ao “estar motivado” para o fazer a trilha, uma vez que contar com a colaboração dos colegas, havendo a possibilidade de trocar ideias e discutir com os parceiros (já que as trilhas são realizadas em pequenos grupos), traz a sensação de completude, conforto e segurança.

Atenta-se ainda ao fato de que a cooperação, a colaboração e o trabalho em pequenos grupos potencializam as chances de que cada integrante se sinta protagonista pela sua aprendizagem. Estes são aspectos relevantes, associados diretamente às metodologias ativas e revelados nos relatos dos participantes.

Parecendo estar na contramão da subcategoria anterior, aparece a “competição saudável” como um fator potencial para a utilização de trilhas matemáticas. Todavia, neste caso específico, a possibilidade de competição promovida pela ludicidade inerente à atividade e ao uso do aplicativo, é denotada como um fator positivo, pois, ao mesmo tempo que se tem a cooperação entre os parceiros nos grupos, se tem a competição entre os grupos. Portanto, o fato de o MCM comportar a gamificação como uma possível estratégia na execução das trilhas é um diferencial benéfico, apontado por todos os sujeitos que constituem a amostra deste estudo piloto.

Destaca-se ainda que as subcategorias “local de desenvolvimento da tarefa”, identificada nos relatos dos participantes, e “incorporação de elementos históricos e culturais”, apontada pelos proponentes, mostraram-se interligadas como potencialidades das trilhas. O comentário da Dupla B ilustra esta asserção: “o *‘tour’ pelo Parque e Largo, além de incorporar elementos históricos da cidade foi uma experiência cativante*”. Em particular, o discurso dos participantes revela a importância dada ao local de realização da tarefa, haja vista não ser usual aprender matemática em ambientes fora da sala de aula padrão e, assim, uma mudança nesse cenário, viabilizada pelo uso de tecnologias e pela resolução de problemas reais, parece ser um elemento altamente positivo para o processo de ensino e aprendizagem.

Por fim, os proponentes e os participantes apontam o aplicativo MCM em si também como uma potencialidade devido ao fato de ele apresentar uma interface esteticamente agradável e permitir uma certa interatividade e dinamismo. Em especial, o fornecimento de *feedbacks* imediatos aos participantes, após a conclusão de cada tarefa,

e a interação síncrona entre o proponente e os participantes, realizada por meio de um *chat*, foram indicados como aspectos favoráveis associados às trilhas matemáticas amparadas pela tecnologia.

De outra parte, alguns aspectos surgiram como limitações ao uso das trilhas, ao menos neste estudo piloto. Os proponentes indicaram a impossibilidade de inserir questões abertas como um primeiro obstáculo. No entanto, após a realização e aplicação desta pesquisa, o MCM foi atualizado e, ao que tudo indica, essa limitação parece ter sido superada por meio da incorporação de um novo formato de tarefa, intitulada “preenche espaços em branco”.

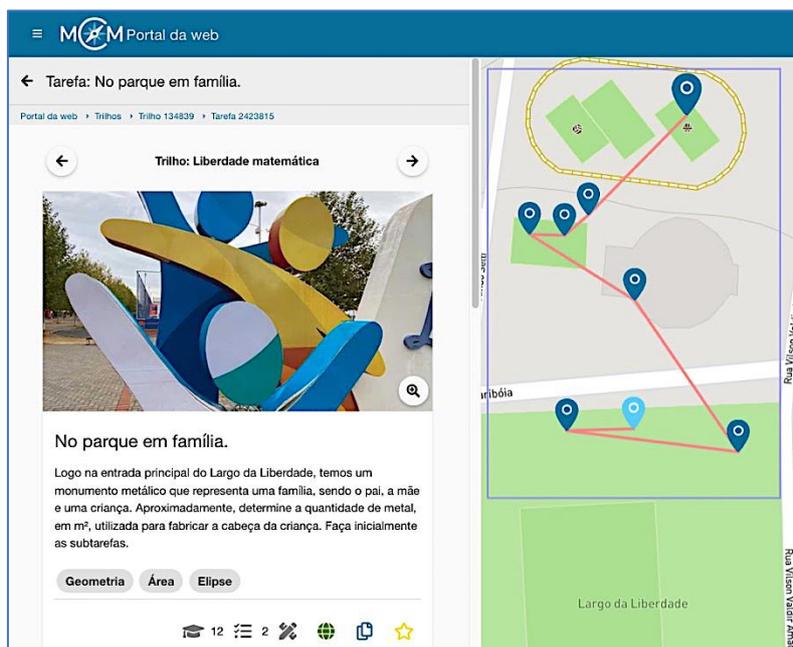
Um segundo limite observado refere-se ao tempo estimado para a realização completa das trilhas. Nas duas situações avaliadas, os proponentes relataram que o tempo aproximado para a conclusão das oito atividades pelos participantes foi de 2h o que, no contexto escolar, pode ser considerado um tempo excessivo para a realização de atividades de uma disciplina. Nesse sentido, elenca-se alguns motivos que podem justificar o tempo despendido nas trilhas: (a) o percurso é demasiadamente longo, ou (b) as tarefas são mais elaboradas e exigem maior esforço dos participantes para solucioná-las, ou (c) os participantes não possuem familiaridade com o aplicativo MCM.

Ressalta-se ainda a importância de que as tarefas que constituirão uma trilha matemática sejam cuidadosamente planejadas e estejam apoiadas nos objetivos almejados pelo docente proponente. O nível de ensino e os conhecimentos matemáticos prévios dos participantes também são variáveis relevantes nesse contexto e sempre devem ser considerados na formulação das tarefas, a fim de evitar questões inadequadas para o público-alvo.

A título de exemplificação expõe-se uma situação que ilustra essa limitação, vivenciada por um dos proponentes e por duas duplas de participantes da presente investigação. Durante a execução da tarefa “No parque em família”, ilustrada por meio da Figura 3, o proponente da trilha observou que a primeira dupla discente a realizar a atividade estava com dificuldades pelo fato de o conteúdo matemático exigido ser desconhecido pelos estudantes. Assim, o professor interveio imediatamente, explicando o conteúdo e fornecendo verbalmente outras dicas relacionadas ao conteúdo pré-requisito.

Posteriormente, o docente reformulou e atualizou a questão no MCM, inserido novas informações e dicas, que possibilitaram a resolução da tarefa pela segunda dupla de estudantes.

Figura 3 - Exemplo de uma atividade proposta na trilha do Largo da Liberdade



Fonte: os autores (2021)

Destaca-se que o “conteúdo das questões” também foi apontado como uma limitação pelos participantes das trilhas e, em especial, pela primeira dupla supramencionada. Assim, reforça-se novamente a necessidade de que, ao planejarem utilizar as trilhas com seus estudantes, os professores estejam atentos durante a seleção ou a elaboração das tarefas; devem ser privilegiadas aquelas que estão em consonância com os conhecimentos discentes.

Por fim, outra limitação relatada tanto pelos proponentes quanto pelos participantes refere-se aos “problemas técnicos” ou “falhas no aplicativo”. Nesse sentido, os proponentes relataram que uma das duplas participantes, ao realizar uma das trilhas no modo online, não teve a resposta de uma tarefa reconhecida pelo MCM. Em seguida, na tentativa de atualizar o aplicativo, todas as respostas registradas anteriormente para as outras tarefas foram perdidas. Essa situação aconteceu apenas para uma das duplas participantes, o que pode representar um caso isolado.

Salienta-se que o acesso à internet é um requisito fundamental se o proponente desejar acompanhar simultaneamente os participantes das trilhas. No entanto, não é um impeditivo para a execução da trilha, uma vez que é possível baixar a sua versão PDF e executá-la, por meio do aplicativo MCM, off-line.

Sob a ótica dos proponentes, o único problema detectado em relação ao MCM foi que, para duas duplas, o registro das soluções incorretas se dava de forma satisfatória (representada por um círculo vermelho na interface de acompanhamento simultâneo) enquanto para a terceira dupla, não.

As limitações mencionadas podem ser consideradas pontuais e são passíveis de aprimoramento, quer seja pelos proponentes das trilhas (melhor planejamento para a formulação das tarefas) ou pelos criadores do MCM (incorporação de novos formatos de tarefas e superação de alguns problemas técnicos).

CONSIDERAÇÕES

Ao findar o ensaio, os indicadores encontrados junto aos proponentes e aos participantes das trilhas levam a crer que identificar a matemática oculta em diferentes locais e objetos que fazem parte da realidade estudantil, mas que estão fora das paredes da sala de aula, é uma forma motivadora e de grande potencial tanto para ensinar quanto para aprender Matemática.

A combinação das trilhas matemáticas com as tecnologias móveis (que estão cada vez mais presentes em nossa vida e dão a impressão de serem inseparáveis dos estudantes) é um dueto que possibilita a realização de experiências de ensino exitosas.

Além disso, compartilha-se da premissa relatada por Taranto e seus colaboradores (2021) de que o surgimento de currículos fundamentados em metodologias que enfatizam a necessidade de abordagens baseadas em problemas, trabalhos colaborativos e conteúdos transdisciplinares – a título do que também acontece em vários países da Europa – favorece o desenvolvimento de iniciativas como a relatada, com foco na matemática ao ar livre.

Este trabalho vai na direção da perspectiva mencionada, uma vez que teve por objetivo apresentar as percepções dos proponentes e dos participantes de uma proposta piloto, envolvendo a prática de trilhas matemáticas com o suporte do recurso tecnológico *MathCityMap*.

Os resultados desta investigação revelaram que, em termos de potencialidades e limitações para o desenvolvimento das trilhas matemáticas, há mais possibilidades do que obstáculos. Em particular, é possível concluir que as tarefas distribuídas ao longo das trilhas promoveram interações cooperativas entre os participantes e uma competição saudável entre eles, instigando e motivando ainda mais a busca pelas respostas. Além

disso, as tarefas realizadas em ambientes diferentes da sala de aula e externos a ela motivaram a participação ativa e o “querer fazer” dos participantes do estudo.

Em síntese, o MCM possibilita que professores e estudantes vivenciem a matemática fora da sala de aula de uma forma bem estruturada. Em relação ao trabalho docente despendido, sinaliza-se que o esforço para criar uma trilha matemática é relativamente baixo devido ao suporte tecnológico do MCM. Um exemplo para ilustrar essa afirmação é a oferta do “Assistente de Tarefas”, um conjunto de atividades genéricas ou padrão, vinculadas ao aplicativo, as quais exigem apenas que o docente insira os dados relacionados às medidas dos objetos, sem a necessidade de especificar, por exemplo, o enunciado da atividade que, por sua vez, é gerado automaticamente.

Como campo de pesquisa, especialmente na área de Educação Matemática, almeja-se ampliar o escopo deste projeto inicial e investigar de modo mais profundo como essa proposta de aplicar a Matemática em situações reais e autênticas por meio das trilhas matemáticas relaciona-se com a aprendizagem ativa. Ademais, também pretende-se explorar possíveis interconexões com: (a) a modelagem matemática, (b) a resolução de problemas, (c) o raciocínio e a demonstração, (d) a comunicação, as conexões e as representações, (e) a colaboração, e (f) a emoção, motivação e interesse.

Esses serão os próximos passos a serem delineados pelos pesquisadores e autores do estudo em tela. A ampliação e continuidade do projeto, enfatizando novas perspectivas, permitirá que outras leituras e novos focos de análise sejam apresentados e discutidos, visando contribuir para o ensino e a aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. E. B. de. Apresentação. In: BACICH, L.; MORAN, J. (Org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018, p. 14-21.
- ALVES, J. A. A.; DANTAS, V. A. O; OLIVEIRA, M. S. Influências afetivas no ensino - aprendizagem de matemática. In: Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”, 6., 2012, São Cristovão. **Anais...** São Cristovão: EDUCON, 2012. Pp.1-12.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70 Lda, 1977.
- CAHYONO, A. N.; LUDWIG, M. MathCityMap: Exploring mathematics around the city. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., 2016, Hamburg. **Anais...**Hamburg (Germany): 2016. p. 24 –31.

CAHYONO, A. N.; LUDWIG, M. Teaching and Learning mathematics around the city supported by the use of digital technology. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 15, n. 1, p. 2-8, 2019.

CAHYONO, A. N.; MIFTAHUDIN, M. Mobile technology in a mathematics trail program: how does it works? **Unnes Journal of Mathematics Education**, v. 7, n. 1, p. 24-30, 2018.

CANHOTA, Carlos. Qual a importância do estudo piloto? In: SILVA, E. E. (Org.). **Investigação passo a passo: perguntas e respostas para investigação clínica**. Lisboa: APMCG, 2008. p. 69-72.

CHACÓN, I. M. G. **Matemática emocional**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

DE CARVALHO, A. T.; GONTIJO, C. H. Discursos nas aulas de matemática e a construção de barreiras para o desenvolvimento da criatividade compartilhada. **Cenas Educacionais**, v. 3, p. e7469, 2020.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LOOS, H. Cognitiones e afetos no aprendizado da Matemática escolar: sobre o papel das crenças e da emocionalidade na determinação das atitudes. **Contrapontos**. Itajaí. .v. 7. n.2, p. 235-253, 2007.

MORAN, José M. **Mudando a educação com metodologias ativas**. In: SOUZA, C. A.; TORRESMORALES, O. E. (Orgs.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens**. Ponta Grossa: UEPG, 2015. (Mídias Contemporâneas, v. 2). p. 15-33

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

SILVA, M. M.; TEIXEIRA, R. R. P. Diagrama afeto-performance (DAP): uma ferramenta para inclusão da afetividade no processo de ensino-aprendizagem da matemática. **Zetetiké – Cempem**. Unicamp. v. 16. n. 30, p. 45-62, 2008.

SHOAF, M. M.; POLLAK, H.; SCHNEIDER, J. Purposes and organization of a Math Trail. In: ____ **Math Trails**. Bedford: COMAP, 2004.

TARANTO, E.; JABLONSKI, S.; RECIO, T.; MERCAT, C.; CUNHA, E.; L ZARO, C.; LUDWIG, M.; MAMMANA, M.F. Professional Development in Mathematics Education - Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics. **Mathematics** 2021, 9, 2975. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/math9222975>>. Acesso em: 14 jan. 2021.

TYTECA, P. P. **La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras**. 2012. Tese (Doutorado) – Departamento de Didáctica da Matemática, Universidade de Granada, Granada, 2012. Disponível em:

<https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/23293/2108144x.pdf?s>. Acesso em: 26 ago. 2021.

VEIGA, I.P.A.; FERNANDES, R. C.de A. Painel Integrado ou Grupos rotativos: caminhos para a integração horizontal-vertical. In: VEIGA, I.P.A. (Org.) Metodologia Participativa e as técnicas de ensino-aprendizagem. Curitiba: CRV, 2017, p. 75-102.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZARPELON, E.; LUSITANI, K.; COLOMBO, J. A. A. C. Tecnologia e metodologias ativas: evidências de uma relação simbiótica em pesquisas relacionadas às Engenharias. In: COLÓQUIO LUSO-BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO, 5., 2019, Joinville. **Anais...** Joinville (Brasil): 2019. p. 1 – 18.

ZENDER, J.; LUDWIG, M. MathCityMap (MCM): from paper to smartphone – a new approach of an old concept. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., 2016, Hamburg. **Anais...**Hamburg (Germany): 2016. p. 24 –31.