

## **Ressignificando conhecimentos profissionais de um professor em pesquisa sobre a própria prática: o ensino de álgebra e o conceito de simetria**

**Marcel Messias Gonçalves<sup>1</sup>**

*Universidade Federal do ABC (UFABC)*

**Alessandro Jacques Ribeiro<sup>2</sup>**

*Universidade Federal do ABC (UFABC)*

**Marcia Aguiar<sup>3</sup>**

*Universidade Federal do ABC (UFABC)*

### **RESUMO**

Esta pesquisa levanta a necessidade e a importância de que professores continuem aprendendo sobre o ofício de ensinar ao longo de sua prática, e toma por base caminhos para oportunizar essa aprendizagem a um profissional já sobrecarregado pelas demandas da sala de aula. Assim, neste artigo busca-se compreender como um professor da educação básica, em um contexto de investigação da própria prática, ressignifica seus conhecimentos profissionais, ao elaborar e implementar tarefas exploratórias que recorram ao conceito de simetria para articular álgebra e geometria. Trata-se de um estudo realizado numa perspectiva qualitativo-interpretativa, em que os dados analisados emergiram da própria prática do professor-pesquisador e são constituídos por tarefas, planos de aula, produções dos estudantes, vídeos e gravações de aula, coletados ao longo de três aulas implementadas em escola pública no município de Praia Grande, SP. Os resultados mostram que a experiência vivenciada oportunizou ao professor-pesquisador ampliar seus conhecimentos sobre os estudantes, sobre os conteúdos trabalhados, sobre a abordagem exploratória de ensino e sobre o próprio ensino de álgebra. Identificou-se ainda a importância de momentos de reflexão pós-aula para ressignificar conhecimentos profissionais que, por sua vez, promoveram aprendizagens sobre a própria prática em sala de aula.

**Palavras-chave:** Ensino de álgebra; Ensino exploratório; Simetria; Professor-pesquisador; Educação matemática.

### **Reframing professional knowledge of one teacher in research from own practice: teaching of algebra and the concept of symmetry**

<sup>1</sup>Doutorando em Ensino e História das Ciências e Matemática na Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André/SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dr. Eptácio Pessoa, 59, apto 61, Boqueirão, Santos, SP, Brasil, CEP: 11045-301. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1404-1060>. E-mail: [marcel.goncalves@ufabc.edu.br](mailto:marcel.goncalves@ufabc.edu.br)

<sup>2</sup>Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professor Associado II na Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André/SP, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida dos Estados, 5001, Bloco A, Sala 542, Bairro Bangú, Santo André/SP, Brasil, CEP: 09210-580. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9647-0274>. E-mail: [alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br](mailto:alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br).

<sup>3</sup>Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora Adjunta da Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André/SP, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida dos Estados, 5001, Bloco A, Sala 533, Bairro Bangú, Santo André/SP, Brasil, CEP: 09210-580. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5824-0697>. E-mail: [marcia.aguiar@ufabc.edu.br](mailto:marcia.aguiar@ufabc.edu.br)

## ABSTRACT

This research raises the need for and importance of teachers to continue learning about the craft of teaching throughout their practice and is based on ways to provide this learning to a professional already overloaded by the demands of the classroom. Thus, this article seeks to understand how a teacher of basic education, in a context of investigation of his own practice, reframing his professional knowledge, when elaborating and implementing exploratory tasks that use the concept of symmetry to articulate algebra and geometry. This is a study carried out in a qualitative-interpretative perspective, in which the analyzed data emerged from the teacher-researcher's own practice and are constituted by tasks, lesson plans, student productions, videos and class recordings, collected over a period of three classes implemented in a public school, in Praia Grande, SP. The results show that the lived experience provided the opportunity for the teacher-researcher to expand their knowledge about the students, about the contents worked, about the exploratory teaching approach and about the teaching of algebra itself. It was also identified the importance of moments of post-class reflection to re-signify professional knowledge that, in turn, promoted learning about their own practice in the classroom.

**Keywords:** Algebra teaching; Exploratory teaching; Symmetry; Teacher-researcher; Mathematics education.

## CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Quando se fala em aprendizagem profissional docente, diversos autores concordam que a formação inicial deve ser compreendida como apenas o começo das aprendizagens, as quais devem ser continuadas ao longo da vida profissional do professor (FIORENTINI; CRECCI, 2017; OPFER; PEDDER, 2011; WEBSTER-WRIGHT, 2009). Com efeito, a ideia de que os professores se tornem pesquisadores em suas práticas tem ganhado cada vez mais espaço no campo investigativo, considerando a proximidade desses profissionais com os reais desafios da sala de aula (BORGES, 2016; FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013; WHITE *et al.*, 2013). Para tanto, aponta-se a investigação da própria prática como metodologia promissora, seja para garantir a profissionalização docente, seja para apresentar um olhar dos próprios professores sobre os problemas enfrentados ao longo de suas práticas de ensino (LIMA; NACARATO, 2009; PONTE, 2004).

Dentre os problemas que emergem da prática de ensino de matemática, este estudo se ampara em pesquisas que destacam as dificuldades enfrentadas por professores de matemática no ensino de álgebra (MCCRORY *et al.*, 2012), tanto na compreensão dos próprios tópicos (LARSEN, 2009; WASSERMAN, 2014) quanto no que refere à discussão com os estudantes em abordagens que vão além do uso de fórmulas (DOERR, 2006; PUIG; RADFORD, 2007). Diante desse cenário, tem-se no presente artigo o objetivo de *compreender como um professor da educação básica, em um contexto de investigação da própria prática, ressignifica seus conhecimentos profissionais, ao elaborar e implementar tarefas exploratórias que recorram ao conceito de simetria para articular álgebra e geometria.*

Sob a ótica do objetivo delimitado para este artigo, pretende-se responder as seguintes questões de pesquisa: (i) *De que maneira os conhecimentos profissionais de um professor-pesquisador são mobilizados em uma abordagem de ensino exploratório?* e (ii) *Como o trabalho de elaboração, implementação e reflexão de tarefas exploratórias, envolvendo o conceito de simetria, possibilita a ressignificação dos conhecimentos profissionais de um professor-pesquisador?*

Nessa perspectiva, a realização da pesquisa de campo se deu ao longo de três aulas que foram planejadas, desenvolvidas e foram objeto de reflexão pelo professor-pesquisador, primeiro autor deste artigo, durante o ano letivo de 2019, em uma turma de 9.º ano do ensino fundamental da qual ele já era professor desde o início do ano letivo.

## **ENQUADRAMENTO TEÓRICO**

### **As etapas da prática letiva**

Considerando que nesta proposta se discutem conhecimentos que sustentam a prática letiva do professor, importa delimitar o que se entende por esse tipo de prática profissional. Ponte e Serrazina (2004) ponderam que as práticas profissionais dos professores são aquelas que perpassam o seu trabalho e têm grande influência na qualidade do ensino e na aprendizagem dos estudantes. Esses autores identificam nas práticas profissionais três campos da atividade do professor, as quais existem de maneira complementar: *práticas letivas*, *práticas profissionais na instituição* e *práticas de formação*. As *práticas letivas*, foco de interesse neste artigo, são aquelas que estão mais diretamente relacionadas com a aprendizagem dos estudantes, destacando-se as tarefas propostas, os materiais utilizados, a comunicação em sala de aula, as práticas de gestão curricular e as práticas de avaliação.

Para a *prática letiva*, Serrazina (2017) sublinha ainda a importância do *planejamento do ensino* que o professor pretende efetivar em sala de aula, levando em consideração as aprendizagens que se busca promover e o papel fundamental das tarefas com as quais os estudantes estarão envolvidos. A autora também destaca, nesse planejamento do ensino, ações do professor para *antecipar* o uso de materiais, de recursos e mesmo as dificuldades dos estudantes e do próprio ensino pelo professor, como “uma maneira de reduzir as incertezas que podem surgir durante a implementação da aula” (SERRAZINA, 2017, p.13).

Serrazina (2017) ressalta ainda que, como o ensino se desenvolve de maneira contínua, depois da implementação da aula é de grande valia que o professor realize a

análise retrospectiva de seu trabalho com os estudantes, levando em conta o que era esperado para a aula e o que efetivamente se realizou. Sob essa análise, depreendem-se três etapas constituintes da prática letiva do professor: a *etapa do planejamento da aula*, a *etapa do desenvolvimento da aula* e a *etapa da reflexão da aula*. Quando se trata de processos formativos que visem valorizar e promover a prática do professor em sala de aula, Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020) consideram tais etapas como constituintes de um ciclo de planejamento, desenvolvimento e reflexão, que denominam como *ciclo PDR*.

### **Tarefas e a abordagem exploratória de ensino**

Para o *design* da pesquisa cujos resultados são apresentados neste artigo, destacam-se os papéis das *tarefas* elaboradas para as aulas e da *abordagem de ensino* adotada pelo Professor-Pesquisador (doravante, PP) que, segundo Ponte (2005), são pontos centrais para a prática profissional do professor na gestão curricular em matemática. Indo ao encontro do que ressalta Serrazina (2017), é a partir das tarefas que se planeja o ensino e também se oportunizam as atividades com as quais os estudantes devem se envolver no ensino. Para tanto, conforme Ponte (2005), as tarefas atendem a diferentes propósitos e podem ser organizadas em duas dimensões, constituídas pelo (i) *grau de desafio* e (ii) *grau de abertura*.

A dimensão constituída pelo *grau de desafio* está associada com a percepção das dificuldades envolvidas na tarefa pelo seu nível de demanda cognitiva (STEIN; SMITH, 1998) e varia entre os extremos de *desafio reduzido* ou *desafio elevado* (PONTE, 2005). Objetivando compreender como a aprendizagem sobre demandas cognitivas de tarefas pode influenciar o pensamento de professores, ao solucioná-las para a sala de aula, Arbaugh e Brown (2005) envolveram professores na seleção, na resolução e na implementação de tarefas de alto nível cognitivo em sala de aula. A partir desse trabalho, verificaram um refinamento nas práticas dos professores em consequência da reflexão sobre a demanda das tarefas e o consequente aumento da compreensão, pelos estudantes, dos temas trabalhados nas tarefas de alto nível propostas por esses professores.

Já a dimensão que compreende o *grau de abertura* remete à estrutura da tarefa, a qual pode ser *fechada* ou *aberta*, associando-se ao quão diversos ou não são os caminhos que possibilitam a resolução da tarefa, o que é oportunizado em sua estrutura, considerando-se as informações que são dadas e as questões que se colocam (PONTE, 2005). Nessa perspectiva, as tarefas exploratórias seriam aquelas *abertas* e de *desafio elevado*, que oportunizam diversidade de soluções que podem ser apresentadas pelos

estudantes e podem exigir mais do professor nas *antecipações* de possibilidades de resolução no planejamento do ensino (SERRAZINA, 2017; STEIN *et al.*, 2008).

A diversidade de resoluções oportunizadas aos estudantes por *tarefas exploratórias* pode contribuir para que os professores tenham maior contato com diferentes estratégias e raciocínios dos estudantes e, por consequência, levá-los a aprender mais sobre os conteúdos que lecionam (Doerr, 2006). A autora realizou investigação na qual estudou a relação entre a análise do trabalho dos estudantes e as ações realizadas pelos professores em sala de aula. A partir de seu estudo, Doerr (2006, p. 20) concluiu que o maior contato do professor com a diversidade de raciocínios dos estudantes, “contribui para atitudes de ensino voltadas para orientar e ampliar a aprendizagem por meio da negociação de significados ao invés de apenas identificação de erros dos estudantes”.

Quanto à *abordagem de ensino exploratório*, elemento que compõe a prática do PP na pesquisa retratada no presente artigo, Ponte (2005) conceitua que se trata de uma abordagem tradicionalmente menos comum em comparação com a *abordagem de ensino direto*. A *abordagem de ensino exploratório* tende a tirar o professor de seu papel de protagonista – que detém e sistematiza o conhecimento, papel normalmente assumido na abordagem de ensino direto – e atribuir a ele um papel de mediador das discussões nas quais os estudantes se envolvam a partir das tarefas que são convidados a resolver (CANAVARRO, 2011; PONTE, 2005; STEIN *et al.*, 2008).

Dessa forma, a *abordagem de ensino exploratório* pressupõe papéis não apenas ao professor, mas também aos estudantes, deixando estes de ter uma postura passiva de espectador, normalmente presente na abordagem de ensino direto, para uma postura que se torna mais ativa em discussões oportunizadas pelos papéis que são convidados a assumir, e passam a ser protagonistas da própria aprendizagem.

Ao conceitualizar o ensino em que o professor assume uma *abordagem de ensino exploratório*, Stein et al. (2008) identificam três fases que o compõem: (i) *Lançamento*: o professor apresenta a tarefa, buscando assegurar-se de que os estudantes compreendam o que deve ser realizado e o que se espera deles na resolução e para a resolução; (ii) *Exploração*: o professor promove o trabalho dos estudantes (individualmente, em pares ou em grupos) e deve gerenciar as interações, assegurando que seja realizado com oportunidades para todos; (iii) *Discussão e sistematização*: fase em que os estudantes apresentam suas soluções para a tarefa proposta, e o professor deve mediar essas

discussões com a finalidade de sistematizar os aprendizados da aula. Estas são as fases utilizadas neste estudo e sobre as quais o PP irá explorar na seção de análise de dados.

### **Conhecimento profissional docente**

Ponto central desta investigação, a temática conhecimento profissional docente vem ganhando cada vez mais espaço em pesquisas que tratam da formação do professor em articulação com o trabalho que esse profissional realiza em sala de aula (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; SHULMAN, 1986). Ao buscar conceitualizar o conhecimento profissional necessário à docência, diferenciando-o do conhecimento de outros profissionais, Shulman (1986) apresentou uma combinação de pedagogia e conhecimento de conteúdo, ao introduzir o conceito de *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (PCK, na sigla original em inglês). A partir de então, propondo uma mudança de perspectiva para a prática docente, ao valorizar conhecimentos de conteúdos articulados com as demandas da sala de aula, Shulman (1986) influenciou diversos outros autores e trabalhos realizados nas décadas seguintes.

Dentre esses trabalhos, destaca-se a estrutura pela qual se sustentam as análises no presente artigo, o modelo teórico *Conhecimento Matemático para o Ensino* (MKT, na sigla original em inglês) de Ball, Thames e Phelps (2008). Estes autores, partindo da premissa de Shulman (1986), refinaram e direcionaram o PCK e tornaram-se referência para diversos programas de formação de professores que ensinam matemática. No modelo MKT, os autores depreendem seis domínios que sistematizam os conhecimentos necessários ao ensino de matemática: o conhecimento comum do conteúdo (CCK), o conhecimento especializado do conteúdo (SCK), o conhecimento do conteúdo no horizonte (HCK), o conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), o conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC) e o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT). Optou-se por manter as siglas em inglês, formato usualmente adotado na literatura internacional.

Com base na sistematização de Ball, Thames e Phelps (2008), pode-se exemplificar o domínio CCK como o conhecimento sobre conteúdos matemáticos que não estejam necessariamente associados a contextos de ensino, enquanto, por outro lado, o SCK envolve conhecer a origem matemática dos erros em operações, por exemplo, bem como as diversas formas e representações matemáticas dos conteúdos que sejam mais apropriadas ao ensino. O HCK, por sua vez, envolve conhecimento sobre como os tópicos matemáticos são construídos ao longo do currículo e dos anos escolares. Já o KCS aborda



a familiaridade com os erros e as dificuldades mais comuns dos estudantes para cada conteúdo matemático, enquanto o *KCT* é o conhecimento referente às abordagens de ensino que possam ajudar os estudantes a superar tais dificuldades e contornar seus erros. Por fim, o *KCC* é o domínio constituído por conhecimentos sobre os materiais curriculares e as ferramentas existentes e disponíveis para colocar em prática o ensino de matemática.

O *MKT* de Ball, Thames e Phelps (2008) também influenciou outros autores em suas pesquisas e propostas de refinamento. No caso desta pesquisa, ao se focar uma proposta de *articulação entre álgebra e geometria por meio da simetria*, torna-se essencial destacar o trabalho de McCrory *et al.* (2012), que propuseram o *Conhecimento de Álgebra para o Ensino* (*KAT*, na sigla original em inglês). Neste trabalho os autores reconhecem categorias de conhecimentos de conteúdo matemático, como *conhecimento de álgebra escolar*, a álgebra que se aprende na escola; *conhecimento avançado*, a álgebra aprendida em um curso superior, por exemplo; e *conhecimento para o ensino*, a articulação de conhecimento de álgebra com conhecimentos voltados para o ensino dos conteúdos algébricos.

O *KAT* de McCrory *et al.* (2012) inclui ainda os *usos matemáticos do conhecimento no ensino*, que envolvem o conhecimento matemático para ensinar álgebra de maneira eficaz. Para tal, os autores identificam as práticas de *conectar* (no original, *bridging*), como as ações de ensino que buscam fazer conexões entre os tópicos, representações e domínios da álgebra; a prática de *aparar* (no original, *trimming*), reconhecida em ações de ensino de álgebra que objetivam remover as complexidades de um tópico, sem perder a integridade, para adequá-lo ao nível dos estudantes; e a prática de *descompactar* (no original, *decompressing*), que significa evidenciar o significado por trás de fórmulas, expressões e outras representações algébricas, de maneira a tornar o conteúdo compreensível aos estudantes.

Assim, diante do exposto, para apoiar as análises dos dados de nosso estudo, quer seja, compreender conhecimentos mobilizados e ressignificados por um professor, ao articular álgebra e geometria por meio do conceito de simetria, os domínios do *MKT* (Ball *et al.*, 2008) e as práticas do *KAT* (McCRORY *et al.*, 2012) apresentam potencialidades que parecem adequadas na proposta de pesquisa retratada neste artigo.

## O conceito de simetria como articulador da álgebra com a geometria na escola básica

A proposta de tarefas que oportunizem articulações entre álgebra e geometria fazendo uso do conceito de simetria encontra respaldo nas origens do próprio estudo deste conceito. Conforme aponta Lívio (2011), em seu livro *A equação que ninguém conseguia resolver*, a ideia de simetria “está presente em diversas áreas que vão das artes à ciência, e constitui-se na ferramenta que preencha a lacuna entre áreas tão diferentes” (LÍVIO, 2011, p. 3). Por outro lado, a sistematização do que é simetria na escola básica está associada às maneiras pelas quais o conceito é abordado em sala de aula. Foi o que Rafael e Miranda (2018) identificaram, ao investigarem tais abordagens por meio das orientações curriculares presentes nos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN). Os autores constataram que, embora haja incentivo para o ensino da simetria em diferentes contextos, não é o que se observa em coleções de livros didáticos.

Nesse mesmo cenário, Fonseca (2013) aponta que há uma predominância de “simetria de reflexão” no universo de livros didáticos analisados, assim como uma baixa presença de estudos de isometrias no plano. Por outro lado, entre outros aspectos, Ribeiro, Gibim e Souza (2021), no livro *Reflexão e simetria*, chamam a atenção para a frequente confusão feita justamente entre os termos “simetria” e “reflexão”. Salientam que, enquanto a reflexão trata da ação de construir uma imagem congruente a outra, por meio de uma série de procedimentos, a simetria é a propriedade que se observa da congruência entre as partes de uma figura. Em síntese, os autores assim diferenciam: “[...] quando falamos em Reflexão esta corresponde a algo que se faz (por ser uma das Transformações Geométricas), enquanto que, quando falamos em Simetria será algo que se procura na figura (é propriedade de uma figura/imagem/objeto)” (RIBEIRO; GIBIM; SOUZA, 2021, p. 31).

Por seu lado, Oliveira, Ribeiro e Powel (2016), buscando orientações ou abordagens algébricas para a simetria, concluíram que há escassez de material didático ou que estimule a exploração do conceito de simetria para além da geometria. Paralelamente a isso, importa ressaltar que os primeiros estudos voltados à simetria ocorreram em articulações no campo da álgebra, como desvela Stewart (2012), em seu livro *Uma história da simetria na matemática*.

Na obra de Stewart (2012), destaca-se que, após séculos de estudos em torno da busca das soluções gerais para *equações quinticas*, o matemático francês Évariste Galois resolveu o impasse ao articular as ideias da simetria com a álgebra. Conforme Stewart ressalta, a partir de então a matemática “deixou de ser o estudo dos números e das formas



e tornou-se o estudo das estruturas” (STEWART, 2012, p. 136). Em *História da matemática*, Boyer e Merzbach (2019) apresentam fatos históricos sobre a vida de Galois e as contribuições de seus estudos sobre a simetria no agrupamento das possíveis permutações das raízes de equações irreduzíveis. Tais estudos permitiram a Galois determinar a insolubilidade das equações quínticas por meio de radicais e, assim, chegar à generalização dessa compreensão como um método para determinar quais equações possuem ou não solução por radicais, sendo “sua abordagem do problema, agora chamada teoria de Galois, outra contribuição altamente original à álgebra do século dezanove” (BOYER; MERZBACH, 2019, p. 354).

Sob essa ótica de descobertas, possibilidades e potencialidades a serem desveladas pelo conceito de simetria, ainda pouco explorada no campo da álgebra (OLIVEIRA; RIBEIRO; POWELL, 2016), há, na articulação da álgebra com a geometria, uma estratégia que parece promissora e permeia o contexto das tarefas matemáticas exploradas na investigação discutida neste artigo, explicitada nas seções seguintes.

## O CONTEXTO DA PESQUISA

A experiência de ensino a partir da qual os dados desta pesquisa foram recolhidos foi vivenciada em uma escola pública da cidade de Praia Grande, estado de São Paulo, em turma de 9.º ano do ensino fundamental. A turma contava com cerca de 36 alunos com idades entre 13 e 16 anos, que foram divididos a cada aula em grupos identificados de Grupo A até Grupo F.

Ressalta-se que o PP já trabalhava com essa turma desde o início do ano letivo e, embora atue na docência há mais de 15 anos, essa seria a primeira vez que iria realizar uma “abordagem de ensino exploratório” (PONTE, 2005) em sua prática letiva. As tarefas matemáticas exploratórias (doravante chamadas de TM) contextualizando o conceito de simetria, foram a base para a intervenção na “prática letiva” (SERRAZINA, 2017) do PP, ao assumir a abordagem de ensino exploratório.

Nessa perspectiva, a pesquisa aqui apresentada acompanhou o PP ao longo de três aulas, tendo em cada uma analisado: (i) a *etapa de planejamento da aula*, com a elaboração das TM, seguida por discussões com os orientadores de sua pesquisa (segundo e terceiro autores) e integrantes do grupo de pesquisa ao qual o PP está vinculado, que levavam o PP a refinar as TM e os planos de aula; (ii) a *etapa de desenvolvimento da aula*, momento de implementação das TM com os estudantes pelo PP; (iii) a *etapa da*

*reflexão sobre a aula*, em que o PP realizava reflexões sobre os alunos, os grupos de alunos e acerca dos acontecimentos das aulas desenvolvidas por ele. Sendo assim, as etapas da pesquisa buscaram abranger o ciclo de planejamento, desenvolvimento e reflexão (Ciclo PDR) (TREVISAN; RIBEIRO; PONTE, 2020), em cada uma das três aulas em que as ações e as intenções do PP foram analisadas.

Nesse cenário, foram elaboradas três TM que compuseram as três aulas planejadas, desenvolvidas pelo PP e sobre as quais ele refletiu, com o intuito de explorar “articulações entre álgebra e geometria por meio da simetria” em um contexto de ensino do tópico de “representações de funções”, de acordo com a *BNCC* (BRASIL, 2018). De todas as TM foram analisados os respectivos *planos de aula*, elaborados pelo PP com o propósito de orientar seu trabalho com os estudantes em sala de aula, com possíveis resoluções das TM, além de “antecipações” (SERRAZINA, 2017; STEIN *et al.*, 2008) de prováveis dúvidas e dificuldades dos estudantes. A condução desses procedimentos será objeto da seção seguinte.

## **MÉTODO DA PESQUISA, RECOLHA E ORGANIZAÇÃO DE DADOS**

Considerando os objetivos deste estudo, seguiu-se uma abordagem qualitativo-interpretativa (CRESWELL, 2010; CROTTY, 1998), tendo em vista a natureza dos dados analisados e dos indicadores utilizados para este fim. Considerando que o PP nessa investigação busca desvelar e produzir conhecimentos sobre seu próprio trabalho docente (LEANDRO; PASSOS, 2019), a presente pesquisa se enquadra na metodologia de investigação da própria prática. E, ao incidir sobre problemas da prática, e com o objetivo de construir conhecimentos sobre essa mesma prática, ampara-se em Ponte (2002) para entender que a *pesquisa da própria prática* como metodologia pode contribuir tanto para a melhoria dos ambientes educacionais nos quais o profissional se insere quanto para seu próprio desenvolvimento profissional enquanto professor e pesquisador.

Nessa perspectiva, considerando a necessidade de uma metodologia rigorosa como requisito da investigação (PONTE, 2002), o método consistia em utilizar recursos como gravadores de áudio, câmeras de vídeo e diário de bordo, que pudessem servir como “olhos” e “ouvidos” do PP. Com esses recursos objetivou-se realizar a pesquisa de tal maneira que favorecesse ao PP, enquanto pesquisador, analisar suas ações e intenções enquanto professor, ao longo de sua prática letiva. Tal dinâmica buscava minimizar os conflitos de interesses do professor e do pesquisador, bem como garantir a confiabilidade dos dados recolhidos.

Diante desse cenário, as primeiras ideias sobre os temas das aulas e os primeiros esboços das TM foram inicialmente registrados pelo PP por meio de escritos e de rascunhos em seu *Diário de bordo* – caderno no qual o PP anotava rigorosamente seus passos ao longo da pesquisa. Com seu avanço, revelou-se a necessidade de uma forma mais dinâmica de registros, que pudesse agregar mais informações acerca das ações e das intenções do PP. Com este intuito, o PP passou a realizar registros em vídeo por meio da câmera do próprio celular, que foram chamados de *autogravações*, nas quais foram relatadas ideias, expectativas e impressões acerca do trabalho realizado.

Durante a etapa do desenvolvimento da aula, foram utilizadas duas câmeras de vídeo na sala de aula: uma posicionada na frente da sala, voltada para os estudantes, e outra posicionada ao fundo da sala, voltada para a lousa. Para registrar as interações dos estudantes em seus grupos, gravadores de áudio foram ligados durante a implementação das TM, em cada uma das três aulas. Também buscando obter mais registros dos acontecimentos em sala de aula – e impossibilitado de realizar *autogravações* devido à condução da aula – o PP passou a utilizar seu celular atado ao braço, favorecendo que a câmera de vídeo do aparelho registrasse de perto as interações com os estudantes. Nesses casos, a câmera servia como uma *lente* (CHAN; MESITI; CLARK, 2019), para que fosse possível registrar toda a complexidade das ações envolvidas nessa etapa. Com isso, o PP pôde executar seu papel de professor, enquanto as câmeras de vídeo e gravadores de áudio registravam todas as ações, servindo como os “olhos” e “ouvidos” do PP, enquanto pesquisador.

Assim, considerando o foco deste artigo, os dados que contribuíram para a reconstituição e posterior análise das três aulas implementadas foram compostos por (i) registros no diário de bordo (incluindo as TM), (ii) autogravações no celular, (iii) registros das câmeras de vídeo da sala de aula, (iv) registro em áudio dos gravadores distribuídos aos estudantes e (v) produções escritas dos estudantes, referentes às soluções para as TM propostas em cada aula.

Para a análise, os dados recolhidos por áudios e vídeos foram ouvidos e assistidos na íntegra e tiveram seu conteúdo “transcrito e traduzido” em momentos nos quais se identificaram contextos de mobilização de conhecimentos profissionais. Esses dados eram complementados pelas produções escritas dos estudantes e pelas anotações do PP no diário de bordo. Esses momentos foram codificados como *Momentos Marcantes* (MM), com as categorizações *MM1*, *MM2*, *MM3*, *MM4* e *MM5*, cujos indicadores

apresentados na Tabela 01 permitiram identificar os contextos em que os conhecimentos profissionais (BALL *et al.*, 2008) foram mobilizados e ressignificados pelo PP em suas ações e intenções ao longo das três aulas.

**Tabela 1** - Categorização, contextualização e indicadores dos momentos marcantes

<i><b>Categoria</b></i>	<i><b>Contexto</b></i>	<i><b>Indicador</b></i>
<b>MM1</b>	Momentos em que o Conhecimento do Conteúdo e o Currículo (KCC) se fizeram evidentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- conhecer o currículo em suas finalidades e objetivos;</li> <li>- conhecer a organização dos conteúdos;</li> <li>- conhecer a diversidade e a variedade de materiais disponíveis e programas existentes;</li> <li>- conhecer os materiais e formas de avaliação.</li> </ul>
<b>MM2</b>	Momentos em que o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) se fizeram evidentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- compreender a relação entre os tópicos e sua evolução ao longo da escolaridade;</li> <li>- perceber grandes ideias e estruturas disciplinares;</li> <li>- entender como os tópicos matemáticos são construídos conceitualmente ao longo do currículo.</li> </ul>
<b>MM3</b>	Momentos em que o Conhecimento do Conteúdo e o Ensino (KCT) se fizeram evidentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- abordagem para superar dificuldades do conteúdo;</li> <li>- abordagem para explorar determinados aspectos do conteúdo;</li> <li>- conhecimento de indicação e contraíndicação de opções didáticas;</li> <li>- escolha de exemplos para começar e exemplos para aprofundar o ensino do conteúdo.</li> </ul>
<b>MM4</b>	Momentos em que o Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes (KCS) se fizeram evidentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- antecipa o que os estudantes estão propensos a pensar;</li> <li>- antecipa quando e quais dificuldades os alunos encontrarão;</li> <li>- tem familiaridade com erros comuns e entende por que os alunos os cometem;</li> <li>- conhece o que prende a atenção do estudante;</li> <li>- conhece o comportamento do estudante pela convivência e acompanhamento do estudante em sua trajetória;</li> <li>- compreende matemática específica e tem familiaridade com o pensamento dos alunos.</li> </ul>
<b>MM5</b>	Momentos em que o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) se fizeram evidentes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- identifica as ideias matemáticas nas quais se baseia um problema;</li> <li>- identifica diversidade de raciocínios, caminhos e representações para os conteúdos abordados nas aulas;</li> <li>- identifica os conceitos matemáticos em conexão com suas operações e relações (descompacta);</li> <li>- identifica fontes de erros em resoluções;</li> </ul>

---

- utiliza determinadas representações apropriadas que tornam o conteúdo compreensível.

---

**Fonte:** Elaborado pelos autores, com base em Ball, Thames e Phelps (2008), Mello, Moriel Júnior e Wielewski. (2017), Pazuch, Lima e Albrecht (2018), Ribeiro (2012) e Shulman (1986).

Ao longo das análises que se apresentam a seguir, sempre que os *indicadores* ou *momentos marcantes (MM)* forem mencionados, sugere-se que, se necessário, o leitor recorra à Tabela 1 para que possa se localizar e melhor compreender a quais conhecimentos e contextos se fará referência.

## **ANÁLISE DOS DADOS E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS**

As análises apresentadas nas seções a seguir estão divididas em três episódios: o primeiro deles busca evidenciar os conhecimentos mobilizados pelo PP (*Episódio 01: Mobilizando conhecimentos em uma nova experiência de prática*); em seguida, discute-se a ampliação e a ressignificação dos conhecimentos do PP (*Episódio 2: Ampliando e ressignificando conhecimentos por meio da experiência na prática*); por fim, expõe-se como a ressignificação de conhecimentos contribuiu para mudanças de ações do PP em mediações de discussões matemáticas (*Episódio 3: Mobilizando e ampliando conhecimentos em mediações de discussões matemáticas*).

Com essa forma de apresentação, pretende-se fornecer ao leitor as circunstâncias em que os conhecimentos profissionais foram mobilizados e ressignificados ao longo das aulas, em decorrência do trabalho do PP, de planejamento, desenvolvimento e reflexão, de uma TM para a TM da aula seguinte.

### **Episódio 01 – Mobilizando conhecimentos em uma nova experiência de prática**

O primeiro registro trata do momento ocorrido na etapa de *planejamento da aula* em que o PP inicia os trabalhos de elaboração da TM1 (Apêndice A), tendo documentos curriculares como norteadores de suas decisões. Para tanto, o PP recorreu ao seu *planejamento anual* e à *BNCC*, com o intuito de selecionar os tópicos trabalhados e as habilidades desenvolvidas, relacionados à *reta numérica real*. As intenções do PP, registradas em *autogravação*, são transcritas a seguir:

**PP:** *a primeira tarefa que eu estava buscando trabalhar seria a reta real. Por quê? No elenco de temas que tenho de trabalhar com minhas turmas de 9.º ano eu vou trabalhar com eles o gráfico que terá a ver com funções e por sua vez tem a ver com o plano*

*cartesiano e, para que eles compreendam bem o plano cartesiano, penso que eles têm de resgatar a reta numérica real. [...] também vou dar uma olhada nos anos anteriores aos 9.ºs anos 'pra' tentar resgatar alguma ideia que possa ser potencializadora, potencializada com a simetria.*

Desse registro, observa-se que as ações do PP, ao se orientar pelo seu *planejamento anual* na composição dos tópicos da aula, envolvem o indicador *conhecer o currículo em suas finalidades e objetivos* ao fazer uso da BNCC, juntamente com o indicador que aborda o *conhecimento da organização dos conteúdos*. Na interpretação que se faz aqui, esses elementos são indicadores da *mobilização do KCC* que torna essa ação de uso de documentos curriculares um importante momento da *etapa de planejamento* da TM1 que se classificam como *MM1*.

Ao associar funções, gráficos e reta numérica, percebe-se que o PP o faz com propriedade, pois explicita em suas intenções o indicador *compreensão das relações entre esses tópicos e sua evolução ao longo da escolaridade*. Ainda, ao buscar conexões ente os tópicos trabalhados, as ações do PP desvelam o indicador *entendimento de como os tópicos matemáticos são construídos conceitualmente ao longo do currículo*, quando expressa a intenção de explorar a ideia de simetria como potencializadora das aprendizagens pretendidas e valoriza os conhecimentos prévios dos estudantes. Assim, a mobilização do *HCK* se faz presente por meio desses indicadores que desvelam o olhar do PP para os tópicos ao longo do currículo e os anos de escolaridade. Portanto, as ações e as intenções do PP ao planejar a TM1, pontuadas aqui por esses indicadores, caracterizam, assim se entende aqui, o *MM2* na *etapa de planejamento* da aula.

Em continuidade ao planejamento, buscando proporcionar um contexto que motivasse os estudantes na realização da TM1, o PP selecionou uma tarefa envolvendo o cálculo do *índice de massa corporal* (IMC) por meio da expressão  $\frac{\text{massa}}{\text{altura}^2}$  e a localização desse resultado em uma reta numerada. Todavia, ponderando sobre as ações que esperava que os estudantes realizassem na resolução da TM1, o PP considerou que somente esse desafio da tarefa inicial não oferecia grau de abertura (PONTE, 2005) ou nível de desafio suficiente para uma *abordagem de ensino exploratório*.

Como estratégia foram realizadas pelo PP alterações no contexto da tarefa inicial (Figura 1), com o intuito de que o desafio proposto pudesse engajar os estudantes a fim de favorecer uma diversidade de resoluções que, por sua vez, contribuíssem para as discussões na exploração do conteúdo da TM1.



**Figura 1** - Trecho da TM1 – “O peso da alimentação na saúde”

*Questão C: Jandysvaldo, Valtycreira e Lambarildo foram orientados a praticar exercícios e fazer uma dieta mais saudável tendo com objetivo atingirem até o final do ano um valor de IMC próximo de 22, devendo calcular seus índices (IMC) a cada perda ou ganho de 5kg até atingirem a meta estabelecida. Eles aceitaram o desafio e agora precisam calcular quanto cada um deve ganhar ou perder nesse período e como o IMC evolui até atingir a meta. Ajude-os nestes cálculos.*



**Fonte:** dados da pesquisa

Ainda na Figura 1, uma das estratégias inicialmente esperadas pelo PP para a TM1 era que os estudantes pudessem identificar a simetria na representação das trajetórias de evolução dos valores de IMC identificados na reta numerada (aumentos ou reduções) e, com isso, pudessem explorar esse conceito, ao generalizar os padrões de variações nos valores encontrados. As análises dessas ações e intenções do PP na seleção e na adaptação da tarefa inicial apontam para o indicador *conhecimento de indicação e contra-indicação de opções didáticas*, na seleção de tarefas. Nota-se ainda a presença do indicador que aponta para a busca da melhor *abordagem para explorar determinados aspectos do conteúdo*, ao realizar alterações que julgou necessárias no grau de desafio da TM1. Desta forma, inferem-se desses indicadores a relevância e os cuidados dispensados pelo PP à apresentação do conteúdo, a mobilização do *KCT* na *etapa do planejamento da TM1*, que para aqui se caracteriza como *MM3*.

Destaca-se ainda outro indicador que se desvela, ao observar que em suas escolhas de tarefa e abordagem, o PP procura *antecipar o que os estudantes estariam propensos a pensar*, apontando também para o *MM4*, o qual é constituído pela mobilização do *KCS*. Além disso, outro indicador reforça a identificação da mobilização do *KCS* nessa etapa: a elaboração do plano de aula, em que o PP *antecipa quando e quais dificuldades os alunos encontrariam* ao longo da implementação TM1. Isso permite identificar as diversas faces do conhecimento demonstrado pelo PP.

Dessas antecipações do plano de aula, duas chamaram a atenção quando concretizadas na *etapa do desenvolvimento da aula*: as discussões envolvendo a expressão  $\frac{massa}{altura^2}$  e as representações das soluções por meio da reta numérica real. Na transcrição que segue, apresenta-se a discussão do PP com os estudantes identificados como B1 e B2, quando eles evidenciaram dificuldades no cálculo do termo  $altura^2$  na expressão do IMC:

**Estudante B1** – *Nós fizemos assim: 75 dividido por 1,64 vezes 1,64, que é a altura dele.*

**PP** – *Tá, mas ele [a tarefa] pediu isso? [...] o que que eu tenho de fazer para dividir pela “altura ao quadrado”?*

*[Os estudantes demonstram não compreender, e o PP insiste]*

**PP** – *Vamos pensar assim, as contas são feitas na sequência em que aparecem. Então, se eu pegar a massa, dividir pela altura e multiplicar pela altura, ele vai pegar massa dividido pela altura, certo? E vai multiplicar pela altura de novo, mas é isso que eu quero?*

**Estudantes B1 e B2** – *Não!*

**PP** – *Eu quero fazer o quê?*

**Estudante B2** – *Dividir?*

**PP** – *Dividir pela altura ao quadrado. Então deve ser feito qual cálculo?*

**Estudante B2** – *A altura?*

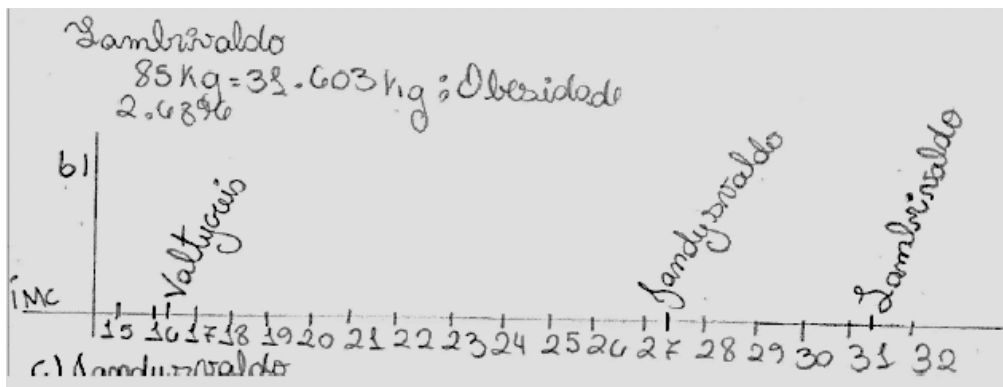
**PP** – *A altura ao quadrado. Então você precisa descobrir quanto é a altura ao quadrado primeiro.*

Nessa interação, a TM1 oportunizou aos estudantes o engajamento em discussões matemáticas e favoreceu ao PP atuar de maneira mais mediadora. Todavia, nota-se ainda que o PP foi o principal motivador da conversa, e o discurso dos estudantes restringiu-se a responder aos questionamentos do PP. No entanto, para essa discussão foi necessário ao PP o indicador *identificar o conceito matemático em suas conexões com suas operações e relações*, quando percebeu a dificuldade dos estudantes em entender o significado da expressão  $altura^2$ . Percebe-se ainda no discurso do PP, o indicador que envolve *identificar a fonte de erro na resolução* quando os estudantes afirmam dividir os valores e depois multiplicar. Dessa forma, os indicadores que emergem das ações do PP permitem reconhecer a mobilização do SCK em um contexto do MM5 oportunizado pela condução da discussão com os estudantes.

Também é importante atentar ao fato de que essa dificuldade apresentada pelos estudantes fora antecipada no *plano de aula* da TM1, elaborado pelo PP. Disso, reforça-se a mobilização de conhecimentos identificados pelo indicador *familiaridade com os erros comuns e porque os alunos os cometem*, os quais foram antecipados no planejamento e efetivados no desenvolvimento da aula. Sendo assim, pela presença desse indicador, a interação com os estudantes também se constitui na mobilização do KCS em contextos do MM4 na *etapa de desenvolvimento da aula*.

Quanto às soluções contidas nas produções entregues pelos grupos de estudantes, como também foi antecipado pelo PP em contextos de mobilizações do KCS, a Figura 2 traz um registro de como os estudantes utilizaram a reta numérica para localizar os valores de IMC solicitados na TM1.

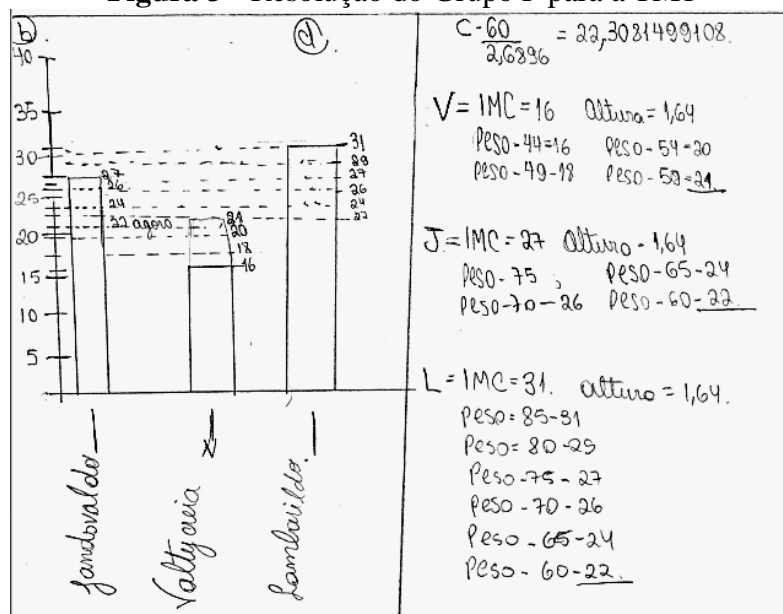
**Figura 2 - Produção do Grupo D para a TM1**



Fonte: dados da pesquisa

Entretanto, alguns dos grupos apresentaram soluções não esperadas pelo PP, como é o caso da solução demonstrada na Figura 3. Nesse registro, a proposta apresentada pelos estudantes do Grupo F revela que a TM1 oportunizou diversidade de estratégias. Isso pode ser observado quando os alunos fizeram uso de um gráfico de colunas, ao invés da reta numérica, para representar a solução.

**Figura 3 - Resolução do Grupo F para a TM1**



Fonte: dados da pesquisa

Esse elemento surpresa foi de grande valor para a *etapa da reflexão da aula*, ao oportunizar o confronto das soluções antecipadas pelo PP com aquelas realizadas pelos estudantes. Essa resposta inesperada contribuiu para as reflexões do PP, registradas em autogravação, a respeito das suas impressões sobre a gestão da aula, das soluções não previstas e das considerações de mudanças para as próximas aulas:

**PP:** *eu não havia previsto a representação de um gráfico de barras...de colunas que é o que eles já trabalharam nos anos anteriores [...] é necessário fazer e refazer a tarefa para verificar mais possibilidades e para se colocar no lugar do aluno na hora do planejamento. Como fazer para que essa aula dê certo pensando bem sob a perspectiva do aluno.*

Conclui-se, pela fala do PP, que há uma ampliação de conhecimentos, o que pode ser identificado pelo indicador *conhecimentos do comportamento dos estudantes, construídos pela convivência e acompanhamento dos estudantes em suas trajetórias de aprendizado*. Da mesma forma, a reflexão sobre pensar a TM1 sob a perspectiva do estudante sugere que a experiência favoreceu aprendizagens ao PP, que pode ser notado pelo indicador *compreensão da matemática associada a familiaridade com o pensamento dos estudantes*. Sendo assim, a partir desses indicadores, inferem-se nesse contexto ampliações do KCS mobilizado pelo PP, caracterizando o MM4 da *etapa de reflexão da aula*.

Finalizando essa autogravação sobre os trabalhos envolvidos na TM1, o PP ainda reflete sobre as ações planejadas para realizar as discussões matemáticas na aula exploratória e para lidar com a complexidade, ao implementá-las, em razão do tempo de aula:

**PP:** *O sequenciamento<sup>4</sup> já não foi tão possível, nem a seleção porque nem todos [os estudantes] chegaram ao fim da tarefa. Então, eu vejo que o tempo foi algo que deve ser “melhor” pensado.*

Entende-se que essa reflexão demonstra uma mudança de perspectiva no indicador relacionado às *abordagens para explorar determinados aspectos do conteúdo*, mobilizadas inicialmente pelo PP na *etapa de planejamento* da TM1. É interessante perceber que o PP considera importante fazer ajustes em sua metodologia para que a aula

---

<sup>4</sup> Conforme Stein *et al.* (2008), a prática de *sequenciamento* em discussões matemáticas ocorre quando o professor organiza a ordem de apresentação das diferentes produções dos estudantes, com o intuito de explicitar a sequência de ensino que deseja realizar e as aprendizagens que almeja desenvolver por meio da discussão coletiva.

possa realmente assumir uma *abordagem de ensino exploratório*. É também necessária maior atenção à gestão do tempo, ao considerar quais tarefas serão propostas. Observa-se nessa reflexão indicadores de conhecimentos do *KCT* confrontados pelo antes e depois da aula, configurando uma *ressignificação* desse conhecimento no MM3, favorecido pela *etapa de reflexão da aula*.

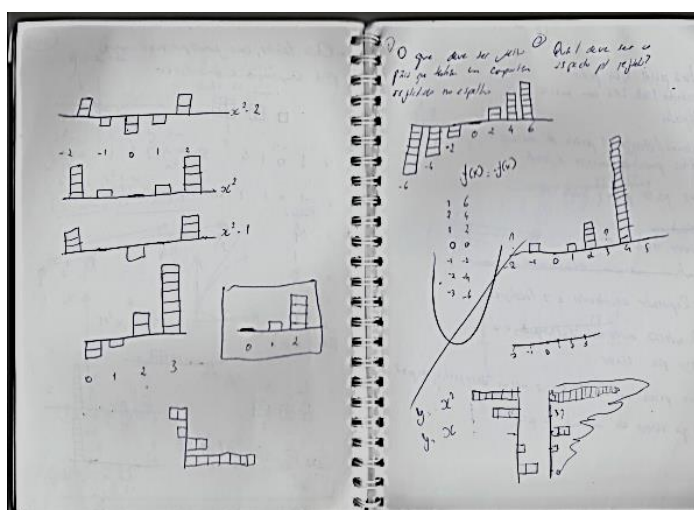
Os desdobramentos dessas reflexões, considerando a ressignificação e a ampliação de conhecimentos e a experiência da primeira aula, terão influência nas escolhas pelo PP dos trabalhos voltados para a TM2 (Apêndice B). No episódio a seguir, apresentam-se os elementos destas análises que permitem identificar essas mudanças nas intenções do PP e suas consequências para as ações em sala de aula.

### Episódio 02 – Ampliando e ressignificando conhecimentos por meio da experiência na prática

Para esse episódio, importa destacar que tanto a TM1 quanto a TM2 haviam sido elaboradas praticamente juntas, em discussões do PP com seus orientadores. Por outro lado, a TM3 (Apêndice C) foi elaborada somente após a implementação da TM1. Todavia, a experiência com a implementação da TM1 em sala de aula – e posterior reflexão acerca do tempo e gestão da aula – levou o PP a realizar alterações na TM2, como se demonstra neste episódio.

O episódio inicia-se com o registro indicado na Figura 4, que reproduz rascunhos do *Diário de Bordo*, em que o PP explorou o tema da *lei de formação de funções* com as ideias que pretendia utilizar para desenvolver o tema com os estudantes.

**Figura 4** – Rascunhos para a TM2



Fonte: dados da pesquisa

No lado direito da Figura 4, o PP havia rascunhado “o que deve ser feito para que tenham um comportamento refletido no espelho?” e “qual deve ser o aspecto para reflexão?”, referindo-se à figura com a qual pretendia representar a função trabalhada na TM2. Essas intenções foram mais bem explicitadas em autogravação:

*PP: Em função, eu pensei na representação que pode ser através de uma tabela ou uma lei de formação. Duas formas de trazer a ideia da simetria, colaborando para a aprendizagem de função, na representação de tabela ou lei de formação. Então, estou pensando inicialmente em uma função em que ela fique mais bem evidenciada pela simetria.*

Nesses dois registros – diário e autogravação – percebe-se o PP utilizando a ideia de simetria para articular a álgebra (*lei de formação*) com a geometria (*representação gráfica*) nos padrões das figuras, desvelando suas intenções expressas pelo indicador *abordagem para explorar os aspectos do conteúdo* – no caso, o conteúdo função. Ponderando sobre a melhor maneira de apresentar o “aspecto” simétrico que buscava explorar no conteúdo da TM2, o PP ainda reflete, por meio de outro indicador, sobre o uso de *indicação e contraindicação de opções didáticas* como a representação de função por meio de tabela ou expressão algébrica. Desses indicadores, percebe-se a mobilização do *KCT* na elaboração da TM2, em contextos do *MM3*, de maneira similar ao que fizera com a TM1.

Entretanto, o PP deixa mais evidentes as intenções de explorar a simetria na TM2 quando reflete sobre o uso da propriedade da reflexão de maneira diferenciada:

*PP: A tarefa teve como base a ideia de enantiomorfismo<sup>5</sup>. De onde eu tirei isso? Eu peguei do tema que eu trabalhava em física a ideia de enantiomorfismo [que] [...] é o que acontece quando a gente observa figuras ...objeto e imagem no espelho. Então os alunos têm o trabalho de procurar uma relação que explique a formação da figura através da lei de formação de função [...] pretendo trabalhar com a simetria das funções que, no geral, irão gerar números que sejam simétricos.*

A maneira como o PP busca conexões entre as múltiplas formas de explorar e representar o conteúdo – tabelas, expressões algébricas, gráficos –, dentre diversos outros tópicos para favorecer a aprendizagem dos estudantes, remete ao indicador *conhecer o currículo em suas finalidades e objetivos*. De forma mais elaborada do que foi feito na

---

<sup>5</sup> *Enantiomorfismo* trata de uma ideia da Física que se relaciona com a observação da propriedade da simetria em elementos que não podem ser sobrepostos, como um objeto e sua imagem no espelho.



TM1, ao aliar elementos da Física, o enantiomorfismo, e da Matemática – a simetria e a reflexão –, o indicador demonstra *conhecer a diversidade e variedade de materiais e programas existentes*, muito além do expresso no indicador *conhecer a organização dos conteúdos*. –

Interessante notar que, embora essa parte da TM2 estivesse em planejamento antes de o PP ter experienciado implementar a TM1 com os estudantes, os múltiplos indicadores permitem inferir uma ampliação do uso do *KCC* de uma tarefa para a outra. Com isso, em contextos do *MM1*, o PP fez uso mais abrangente de seus conhecimentos relativos ao currículo na *etapa de planejamento* referentes aos trabalhos com a TM2.

Compensa salientar que, após a implementação da TM1 e sua reflexão pós-aula, o PP considerou a importância de realizar modificações na TM2, como explicitado em autogravação:

**PP:** *Eu mudei elementos da tarefa, na verdade eu mantive o tema. [...] ao invés de trabalhar com dois gráficos, decidi usar apenas um. A ideia é fazer com que os alunos possam expressar melhor as ideias deles e tenham mais tempo “pra” isso, e tentar fazer com que eu consiga ver... mostrar... fazer com que eles possam mostrar se eles entenderam, se estão compreendendo a ideia que eu quero trabalhar com eles, que é a simetria em contextos algébricos.*

Pode-se perceber maior preocupação do PP com as escolhas que faz para trabalhar a TM2, pois não se limita ao indicador *abordagem para explorar determinados aspectos do conteúdo*, mas também valoriza o indicador *abordagem para superar as dificuldades do conteúdo* na proposta de ensino exploratório. Dessa forma, o *MM3* se constitui em *etapa de planejamento* da TM2, por meio da presença mais diversa de indicadores, o que acaba por desvelar uma ampliação do uso do *KCT* ao longo da elaboração da aula.

Infere-se que, em consequência da experiência com a aula anterior há maior atenção nas antecipações das ações esperadas dos estudantes para as discussões. Percebe-se nas ações do PP não apenas o indicador *antecipar o que os estudantes estão propensos a pensar* na realização da tarefa, mas desta vez, considerando o tempo necessário para essa ação, mas também o indicador *antecipar quando e quais dificuldades os estudantes encontrarão*. Com isso, o PP demonstra refletir de forma mais aprofundada sobre como os grupos de estudantes poderiam defender suas ideias e, assim, favorecer aprendizagens sobre o conteúdo da TM2. Nessa valorização da gestão do tempo da aula desvelado nesses indicadores, aponta-se o uso mais elaborado do *KCS* pelo PP,

demonstrando uma resignificação desse conhecimento em contexto do *MM4* na *etapa de planejamento da aula*.

Os registros também mostram que, em eventos envolvidos na *etapa de desenvolvimento* da TM2 (Figura 5), a influência da experiência com a TM1 se refletiu em mudanças nas atitudes do PP.

**Figura 5** – Realização da dinâmica de lançamento da TM2



**Fonte:** dados da pesquisa

Enquanto no *lançamento* da TM1 o PP limitou-se a ler a tarefa, já para a TM2 foi planejada uma interação que visava apresentar o desafio e instigar os estudantes, desvelando assim o indicador *abordagem para explorar aspectos determinantes do conteúdo*, como a ideia de *enantiomorfismo*. Para tanto, o PP convidou um dos estudantes para que repetisse seus gestos (Figura 5), numa simulação em que o estudante representava a imagem do PP diante de um espelho. Terminada a interação, o PP sintetiza que nessas situações, ambos – objeto e imagem formada em um espelho – se comportam “como se estivessem em lados opostos de uma folha dobrada ao meio”. E seguiram para o desafio da TM2.

Na sequência de ações, a dinâmica inicial e a proposta do desafio, a escolha feita pelo PP para o lançamento da TM2, expressas no indicador *uso de exemplos para começar e aprofundar*, destacam as ideias pertencentes aos conteúdos da TM2. Inference-se, pelos indicadores envolvidos nessas ações, um contexto do *MM3* em que as intenções e

as escolhas mais bem elaboradas pelo PP buscam favorecer a conexão entre as diversas ideias presentes na TM2, contribuindo para a ressignificação do *KCT* mobilizado.

Considera-se nessas ações a importância do indicador *conhecimentos sobre o que prende a atenção dos estudantes* e a forma como esses conhecimentos se apoiam em outros, expressos, por exemplo, pelo indicador *conhecimentos acerca do comportamento do estudante, construídos pela convivência e acompanhamento do estudante em sua trajetória*, no que se refere à experiência do PP com a TM1. Nestas análises, esses elementos indicam a mobilização do *KCS* em contextos do *MM4* que, além de demonstrar ressignificação, também evidenciam o caráter multifacetado do conhecimento demonstrado pelo PP no *lançamento* da TM2.

A forma como essas ressignificações de conhecimentos abrangeram as ações do PP nas interações com os grupos – e como isso se refletiu nas produções dos estudantes – será apresentada no episódio a seguir, cujo foco são as mediações das discussões na abordagem envolvendo o *ensino exploratório*.

### **Episódio 03 – Mobilizando e ampliando conhecimentos em mediações de discussões matemáticas**

Este episódio traz registros de interações do PP com os grupos de estudantes envolvendo a implementação da TM2 e, em especial, da TM3 (Apêndice C). Em contextos da TM2, o Grupo C, representado pelo estudante C1, solicitou o auxílio do PP, buscando avaliação para suas respostas:

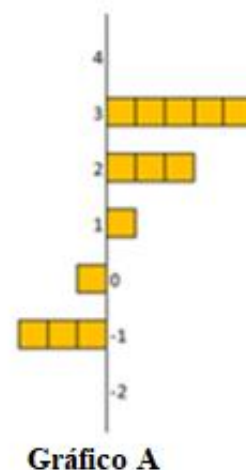
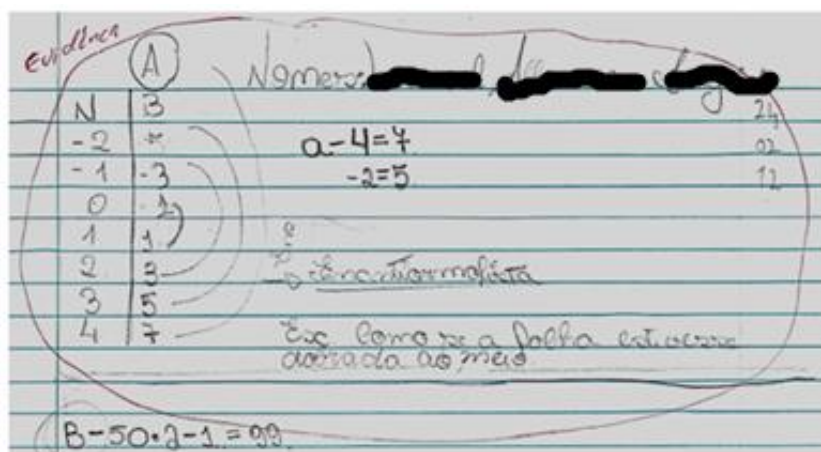
**Estudante C1:** *Na menos dois provavelmente vai ser 5?* [aqui a estudante se refere à quantidade de blocos na orientação -2 do gráfico A da figura presente na TM02]

**PP:** *Por quê? Como chegou nisso?*

**Estudante C1:** *Porque é enanti... sei lá o que [referindo-se à simetria dos números observados] [...] o resultado desse aqui vai ser sete. Se fosse menos três, aqui ia ser sete e sete, depois oito, nove. Se fosse 5 aqui, ia ser nove. Nove e nove no menos 4.*

O registro dessa interação trata da solução dos estudantes (Figura 6), onde se observa, à esquerda, a produção do grupo C e, à direita, o gráfico A, pertencente ao enunciado da TM2. Utilizaram-se tais informações para explicar o raciocínio do grupo.

**Figura 6** – Produção dos estudantes do grupo C



Fonte: dados da pesquisa

Atenta-se, no diálogo acima, para o fato de que, ao questionar o porquê da solução – e não apenas apontar erros ou acertos que direcionem o grupo –, o PP dá espaço para que o estudante C1 explique seu raciocínio de maneira que seus colegas possam confrontar suas próprias ideias. Com isso, o PP demonstra fazer uso do indicador *identificar a diversidade de raciocínios, caminhos e representações do conteúdo*, o que foi oportunizado pela explicação do estudante, ao utilizar uma tabela como representação dos possíveis resultados para cada posição no gráfico A da TM2. Da mesma forma, nessa atitude o PP demonstra buscar compreender o raciocínio dos estudantes, ao invés de avaliá-lo, desvelando o indicador que demonstra favorecimento da *identificação das ideias matemáticas nas quais se baseiam o problema*.

Sendo assim, os indicadores que caracterizam o MM5 em contextos de mobilização do SCK também permitem identificar um refinamento do uso desse conhecimento pelo PP nas interações com os estudantes. Isso leva a concluir que parece ter ocorrido ainda uma resignificação desse conhecimento, que contribuiu para a postura mais exploratória do PP, oportunizado pela experiência da aula anterior e pelas reflexões sobre a TM1.

Em relação à TM3, a proposta de desafio elaborado pelo PP parece ter ocorrido em decorrência das influências de elaboração e implementação das TM1 e TM2 anteriormente. Para a TM3 foram elaboradas duas etapas: a primeira, como resgate e ampliação de aprendizagens da ideia de *lei de formação de função*, em continuidade ao que fora explorado na TM2; e a segunda, numa proposta de uso de tecnologias digitais para que os estudantes discutissem como a representação algébrica de funções está

associada à sua representação gráfica no plano cartesiano, em contextos de exploração do conceito de simetria.

Já em contextos de discussões da primeira etapa da TM3, os estudantes do Grupo E debatiam sobre a *função* que representasse uma empresa de *delivery* que cobrava R\$12,00 de taxa fixa e R\$ 5,00 a cada quilômetro rodado. Todavia, porque não conseguiam identificar os diferentes significados dos parâmetros dados, divergindo sobre o resultado do colega identificado como E3, solicitaram a intervenção do PP:

**PP:** *Se eu “tiver” andado 2 km, vou pagar quanto nessa empresa?*

**Estudante E3:** *Vai pagar 22.*

**PP:** *Por que R\$ 22,00? Me explica como chegou nisso?*

**Estudante E3:** *O “km”.... duas vezes o “km” mais a taxa fixa.*

**PP:** *E se fossem 10km, como a gente faria?*

**Estudante E3:** *5 vezes 10, fica 50. Mais 12 reais da taxa fixa, 62.*

Nessa postura questionadora, o PP demonstra o indicador *familiaridade com os erros comuns dos estudantes relacionados ao conteúdo*, buscando descompactar o resultado apresentado pelo estudante E3 e tornar mais claro que distância e valor pago não aumentam proporcionalmente – a distância varia de 2 para 5, enquanto o valor pago vai de 22 para 62. Nestas análises, infere-se que essa ação do PP é favorecida pelo indicador *compreensão da matemática associada ao pensamento dos estudantes*, sugerindo assim o uso do *KCS* em contextos do *MM4* para a mediação da discussão.

Interessante perceber que, na interação com o grupo de alunos, foi necessário ao PP o indicador *identificar as fontes de erros nas resoluções*, além dos indicadores *identificar as ideias matemáticas nas quais se baseia um problema* e *identificar os conceitos matemáticos em conexão com suas operações e relações*, de modo a contribuir para que os estudantes pudessem entender o comportamento da função explorada na TM3. Observa-se que essa série de indicadores que caracterizam o *MM5* exigem do PP um conhecimento que vai muito além de apenas conhecer a matemática envolvida na tarefa, pois implica a matemática, em suas diversas representações e aplicações que demandam a mobilização do *SCK* e, nesse caso, articulada com o *KCS*.

Em discussão coletiva sobre a TM3, os grupos de alunos apresentavam suas soluções para a representação gráfica da função presente na tarefa. Enquanto o PP sistematizava na lousa as respostas que convergiam para a expressão  $y = -2x + 6$ , estudantes do Grupo B – representados pelos estudantes B2 e B3 – argumentaram a favor de outra solução:

**Estudante B2:** *Tá ao contrário! A gente não fez isso ... a gente não colocou o menos.*

**PP:** *E vocês conseguiram fazer isso aqui sem colocar o menos?*

**Estudante B3:** *Eles inverteram.*

**PP:** *Então vocês colocaram  $6 - 2x = y$ ?*

**Estudante B2:** *Não.*

**PP:** *E deu certo?*

**Estudante B2:** *Foi  $2x + y = 6$*

Ao trabalhar com a representação gráfica de funções por meio do *software Geogebra* na TM3, o PP não havia antecipado a possibilidade de expressões equivalentes funcionarem no *software*. Após analisar a produção do Grupo B no computador, o PP retomou a plenária e discutiu com a turma sobre a equivalência das expressões  $y = -2x + 6$  e  $2x + y = -6$  no uso do *software*. Aponta-se um desequilíbrio nos conhecimentos mobilizados pelo PP nessa ação, em que as respostas antecipadas para os estudantes não coincidem com a forma como se efetivaram na discussão.

Em reflexão após a aula, o PP expressa esse conflito de ideias:

**PP:** *Na hora em que eles trabalharam com as figuras [no software Geogebra], houve dificuldade, principalmente com a linguagem algébrica. Talvez... não sei, se a dificuldade seja deles em expressar a linguagem algébrica ou talvez seja eu em entender como eles expressam as generalidades. Eles utilizam as palavras, só que não como eu estava acostumado, como eu esperava que fizessem.*

Nas ações em sala, apesar da surpresa, o PP ainda consegue contornar a situação por meio do indicador *identificar a fonte de erros* – nesse caso, conflitos de representações – e do indicador relativo à *compreensão diversidade de raciocínios de caminhos para representar o conteúdo*, aqui especificamente a equivalência das expressões, o que indica a demanda do SCK para esta situação de desequilíbrio. A reflexão realizada pelo PP sobre o episódio permite analisar esse MM5 da TM3 como um momento de ressignificação dos conhecimentos do PP de mediação de discussões.

A mesma reflexão mostra que o conflito também oportuniza ampliações de conhecimentos presentes nos indicadores *antecipações do que os estudantes estão propensos a pensar e reconhecimento de quando e quais dificuldades encontrarão*. Pode-se supor que as ações que demandaram esses indicadores do KCS contribuíssem para que o MM4 também fosse caracterizado pela ampliação desses conhecimentos mobilizados na experiência do PP com a TM3, sugerindo aprendizagens sobre a complexidade da mediação em abordagens de *ensino exploratório*.



## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os *momentos marcantes (MM)* sintetizados na Tabela 1, caracterizados por meio de seus devidos indicadores, orientavam sobre os *conhecimentos profissionais* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) empregados pelo PP ao longo das etapas de sua prática letiva e permitiram levantar e compreender como esses mesmos conhecimentos foram *ressignificados* no decorrer das aulas. Esta seção discutirá essa mobilização e ressignificação, com suporte no referencial teórico adotado.

Ao longo das ações e intenções do PP analisadas no decorrer do *Episódio 01*, observa-se, em contextos de *MM1(KCC)*, *MM2(HCK)*, *MM3(KCT)*, *MM4(KCS)* e *MM5(SKC)*, como os *conhecimentos profissionais* (BALL *et al.*, 2008) foram colocados em prática na primeira experiência do PP com uma *abordagem de ensino exploratório* que buscava articular álgebra e geometria por meio da simetria. Isso pode ser reconhecido por meio dos indicadores identificados (por exemplo, *conhecer o currículo em suas finalidades e objetivos; conhecer a organização dos conteúdos; compreender a relação entre os tópicos e sua evolução ao longo da escolaridade*) quando o PP, em suas ações de *planejamento* da TM1 e posterior *desenvolvimento* com os estudantes, fez uso de conhecimentos profissionais de maneira já comum à sua prática.

Assim, num primeiro momento, foi possível caracterizar essas ações como *mobilização* de conhecimentos, uma vez que se tratava de algo que o PP já realizava em sua prática, ainda que fosse a primeira vez que utilizasse a abordagem de ensino exploratório. Da mesma forma, outros conhecimentos, como o uso de *conhecimentos de álgebra escolar* (McCRORY *et al.*, 2002), foram mobilizados pelo PP na escolha e na adaptação da tarefa matemática; por exemplo, o *conhecimento de indicação e contraíndicação de opções didáticas e abordagem para explorar determinados aspectos do conteúdo*. Tais conhecimentos também deram suporte às discussões com os estudantes, como ilustrado no *Episódio 01*. Um indicador a dar destaque era o *antecipar quando e quais dificuldades os alunos encontrarão*, mobilizado pelo PP, pois ele identificava erros dos estudantes, mas ainda não usava tais erros em favor da discussão, como preconizado em uma *abordagem de ensino exploratório* (PONTE, 2005).

Já a partir da *etapa de reflexão a respeito da aula* sobre a TM1, o conflito entre as soluções antecipadas pelo PP e o que efetivamente os estudantes fizeram em sala foi um ponto de partida para reconsiderar as práticas e as mobilizações de conhecimentos

ocorridos até aquele momento, como se pode ver no indicador *antecipa o que os estudantes estão propensos a pensar*. Percebe-se, ao longo do *Episódio 2*, durante a elaboração da TM2, que o PP já demonstrava mais indicadores dos *conhecimentos profissionais* para planejar e selecionar a tarefa – especificamente com os indicadores: *conhecer a diversidade e variedade de materiais disponíveis e programas existentes* ou *como os tópicos matemáticos são construídos conceitualmente ao longo do currículo*. Dessa forma, os resultados indicam *ampliação* de conhecimentos sobre o currículo (*KCC*) e o horizonte (*HCK*) (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), nos contextos de *MM1* e *MM2*, ampliação que se fortaleceu pela experiência de elaboração de uma TM para a seguinte durante a realização dos três ciclos PDR (TREVISAN; RIBEIRO; PONTE, 2020).

Os indicadores presentes nas intenções do PP de explorar tópicos de outras disciplinas, como em *conhecer a diversidade e variedade de materiais disponíveis e programas existentes*, desvelaram a busca por práticas de *conexões (bridging)* e *descompactação (decompressing)* da álgebra, que permitem identificar a mobilização de *conhecimentos da álgebra para o ensino* (McCRORY *et al.*, 2012), pela maior preocupação do PP em dar significado ao tema da TM2.

De maneira análoga ao exposto no parágrafo anterior, a preocupação com a gestão do tempo (PONTE, 2005) na elaboração da TM2 e as discussões oportunizadas aos estudantes (indicadores *conhecimentos acerca do comportamento do estudante, construídos pela convivência e acompanhamento do estudante em sua trajetória*) remetem a *ressignificações* de conhecimentos profissionais específicos dos professores (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Tais ressignificações, entende-se, desvelam-se pelas intencionalidades do PP, que considera a experiência anterior para promover práticas mais refinadas no uso dos conhecimentos anteriormente mobilizados. Em especial, a ressignificação dos conhecimentos do conteúdo e do ensino (*KCT*), assim como do conhecimento do conteúdo e dos estudantes (*KCS*), anteriormente mobilizados na aula da TM1 e agora mais bem trabalhados na TM2, favorecendo a identificação de elementos de uma *abordagem de ensino exploratório* (PONTE, 2005).

Apoiada pela trajetória de elaboração e implementação das TM nas aulas anteriores e pela complexidade demandada na mediação das discussões, destaca-se a evolução das práticas do PP referentes a conhecimentos especializados do conteúdo (*SCK*), representados pelos indicadores *identificar as ideias matemáticas nas quais se*

*baseiam um problema; identificar diversidade de raciocínios, caminhos e representações para determinado conteúdo; identificar os conceitos matemáticos em conexão com suas operações e relações.* No *Episódio 03*, por exemplo, foi possível identificar que, pela *ressignificação* dos conhecimentos profissionais envolvendo o ensino (KCT) e os estudantes (KCS), em contextos do *MM4* e *MM5*, o PP demonstrou um refinamento de sua prática (DOERR, 2006), indo de uma postura mais direta e avaliativa para outra mais questionadora, em que valoriza as ideias dos estudantes como base para a mediação das discussões.

Em discussões relativas à *TM3*, nota-se nas ações do PP maior preocupação em *descompactar* (McCRORY *et al.*, 2012) as expressões e os cálculos envolvidos – por exemplo, ao *identificar os conceitos matemáticos em conexão com suas operações e relações* –, fazendo com que as ideias dos estudantes pudessem ser o centro das discussões (STEIN *et al.*, 2008). Mesmo em momento no qual foi surpreendido por uma resposta não antecipada dos estudantes, sua capacidade de *utilização de determinada representação apropriada que torna o conteúdo compreensível sem perder a validade matemática*, parece ter permitido ao PP se valer de práticas de *aparar (trimming)* o conteúdo (McCRORY *et al.*, 2012) para tornar mais evidentes aos estudantes os equívocos nas soluções. As ações mais cuidadosas do PP nas discussões e a posterior reflexão no *Episódio 03*, relativa à *TM3*, destacadas pelos indicadores *identifica diversidade de raciocínios, caminhos e representações para determinado conteúdo e compreensão matemática específica + familiaridade com o pensamento dos alunos* sugerem aprendizado por meio da própria prática (PONTE, 2002), favorecido pela experiência na mediação das discussões ao longo das três aulas.

Quanto ao uso da simetria como articulador entre álgebra e geometria, na *TM1* a simetria aparece de maneira menos evidente, pois é mais uma estratégia de resolução do que uma propriedade observada no desafio da tarefa (STEWART, 2012). Todavia, a elaboração da *TM1* com essa intencionalidade contribuiu para que o PP mobilizasse, e posteriormente refinasse, seus conhecimentos sobre o conteúdo envolvendo a reta numérica real, como pode ser observado em *compreender a relação entre os tópicos e sua evolução ao longo da escolaridade; abordagem para explorar determinados aspectos do conteúdo*, o que contribuiu para conhecimentos do conteúdo no horizonte (*HCK*) e do ensino (*KCT*) (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Por outro lado, em se tratando da TM2, pôde-se observar um trabalho mais elaborado relacionado à reflexão e à posterior observação da simetria (RIBEIRO *et al.*, 2021), que levou à articulação com álgebra e geometria e teve um papel mais significativo na proposta de aprendizagem da *lei de formação de função* como objetivo da aula. Dessa forma, aponta-se que a proposta da TM2 – após alterações proporcionadas pela experiência da TM1 – contribuiu para ressignificar conhecimentos do PP sobre conteúdo e sobre os estudantes (KCS) e sobre o ensino (KCT), como se vê nos indicadores *escolha de exemplos para começar e exemplos para aprofundar o ensino do conteúdo e conhece o que prende a atenção do estudante*.

Por fim, a TM3, enquanto proposta de tarefa que objetiva articular álgebra e geometria por meio da simetria, apresentou-se como a mais completa, ao proporcionar que os estudantes buscassem, na *representação algébrica das funções*, os elementos necessários para a *reflexão da representação geométrica da função*. Isso possibilitou aos alunos obter uma figura em que se observa a propriedade da *simetria* (OLIVEIRA; RIBEIRO; POWEL, 2016; RIBEIRO; GIBIM; SOUZA, 2021). Conforme identificado pelos indicadores observados no *Episódio 03*, como *identificar diversidade de raciocínios, caminhos e representações para determinado conteúdo e identificar fontes de erros em resoluções*, as discussões oportunizadas pela TM3 contribuíram para ressignificar o *conhecimento especializado* (SKC) do PP, favorecendo o uso de práticas como *descompactar, conectar e aparar* o conteúdo de funções para o ensino de álgebra (McCRORY *et al.*, 2012).

## CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Amparado na premissa sobre a importância de o professor continuar aprendendo ao longo da vida profissional (FIORENTINI; CRECCI, 2017; OPFER; PEDDER, 2011; WEBSTER-WRIGHT, 2009), este estudo focou em buscar *compreender como um professor da educação básica, em um contexto de investigação da própria prática, ressignifica seus conhecimentos profissionais, ao elaborar e implementar tarefas exploratórias que recorram ao conceito de simetria para articular álgebra e geometria*.

Ao operacionalizar seu objetivo, este artigo se propôs a responder *De que maneira os conhecimentos profissionais de um professor-pesquisador são mobilizados em uma abordagem de ensino exploratório?* Nesse sentido, identificaram-se, nesta pesquisa, evidências de momentos em que o PP mobilizou seus conhecimentos profissionais nas diferentes etapas da *prática letiva* realizada. Isso foi observado por meio dos indicadores

identificados, por exemplo, quando foi possível reconhecer a *etapa de reflexão da aula* como fundamental para que o PP não apenas conhecesse melhor seus estudantes por meio de suas produções (DOERR, 2006), mas também repensasse diversas práticas de gestão do ensino (PONTE, 2005) que contribuíram para promover o ensino exploratório em suas aulas. Tais resultados parecem apontar caminhos para superar grandes desafios a fim de que os professores, por exemplo, promovam discussões matemáticas (CANAVARRO, 2011; STEIN *et al.*, 2008) em suas aulas, bem como enfrentem a complexidade de se adotar uma *abordagem de ensino exploratório* (LIMA; NACARATO, 2009; PONTE, 2005) em substituição a abordagens mais tradicionais.

Ainda em vista disso, as reflexões do PP ao longo de cada aula, confrontando suas *antecipações* com os trabalhos dos estudantes, por exemplo, permitiram identificar um crescimento no número de indicadores (Tabela 1) que tal prática de reflexão possibilitou. Isso acabou por favorecer a *ressignificação* dos conhecimentos mobilizados em ações de planejamento das tarefas e desenvolvimento das aulas (SERRAZINA, 2017). Da mesma forma, a evolução do uso do conceito de *simetria como articulador da álgebra e geometria* em cada uma das tarefas matemáticas, favoreceu identificar o refinamento das práticas do PP em relação ao uso de seus conhecimentos profissionais (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), assim como as práticas específicas para o ensino de álgebra (McCRORY *et al.*, 2012). Portanto, tais evidências parecem possibilitar responder a segunda questão de pesquisa: *como o trabalho de elaboração, implementação e reflexão de tarefas exploratórias envolvendo o conceito de simetria, possibilitam a ressignificação dos conhecimentos profissionais de um professor-pesquisador?*

Em, vista disso, pode-se depreender deste estudo que a *investigação da própria prática* parece ser mesmo uma metodologia que oportuniza a continuidade de aprendizagens profissionais (OPFER; PEDDER, 2011; WEBSTER-WRIGHT, 2009) no contexto de aulas de matemática, favorecendo, assim, que os professores aprendam cada vez mais sobre o ofício de ensinar e aprendam também a partir dele (LEANDRO; PASSOS, 2019; PONTE, 2002). Entretanto, há limitações nesta pesquisa, no que refere ao tempo e à abrangência do estudo aqui apresentado. É preciso realizar estudos mais longos, com ajustes quanto à ideia de simetria nas tarefas propostas (OLIVEIRA; RIBEIRO; POWEL, 2016; RIBEIRO; GIBIM; SOUZA, 2021). Assim, fica o convite ao leitor e a outros professores e pesquisadores para novas investigações que possam reforçar

ou mesmo retificar tanto as potencialidades desta proposta quanto os conhecimentos aqui abordados.

## REFERÊNCIAS

ARBAUGH, Fran; BROWN, Catherine A. Analyzing mathematical tasks: a catalyst for change?. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Berna, v. 8, n. 6, p. 499-536, 2006.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BORGES, Maria Leonor. Saber experiencial e conhecimento profissional docente: implicações epistemológicas e formativas. **Revista Internacional de Formação de Professores (RIPF)**, Cidade, v. 1, n. 3, p. 147-16, 2016.

BOYER, Carl Benjamin.; MERZBACH, Uta. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2019

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

CHAN, Man Ching Esther; MESITI, Carmel.; CLARKE, David. Problematizing video as data in three video-based research projects in mathematics education. *In*: KAISER, Gabriele; PRESMEG, Norma (ed.). **Compendium for early career researchers in mathematics education**, Amsterdam: Springer, 2019. p. 199-218. *E-book*.

CRESWELL, John Ward;. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Magda Lopes (3ª.ed.). Porto Alegre: Artmed, 2010.

CROTTY, Michael J. The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process. **The Foundations of Social Research**. Londres: Routledge, 1998. 256 p.

DOERR, Helen M. Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. **Educational Studies in Mathematics**, New York, n. 62, p. 3-24, 2006.

FIORENTINI, Dario; CRECCI, Vanessa Moreira. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p.164-185, jan./abr. 2017.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de Carvalho Correa de. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.



FONSECA, Cláudio Roberto Cavalcanti da. **Conceito de simetria em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco, 2013.

LARSEN, Sean. Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 28, n. 2-3, p.119-137, 2009.

LEANDRO, E. G.; PASSOS, C. L. B. Estado do conhecimento sobre as pesquisas de professores sobre a própria prática (2001-2012): aspectos físicos, temáticos e motivacionais. *Revemop*, Ouro Preto, v. 1, n. 1, p. 143-159, 2019.

LIMA, Claudia Neves do Monte Freitas de; NACARATO, Adair Mendes. A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 25, n.2, p. 241-266, 2009.

LÍVIO, Mário. **A equação que ninguém conseguia resolver**. Tradução de Jesus de Paiva Assis. Rio de Janeiro: Record, 2011.

MCCRORY, R. *et al.* Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. **Journal for Research in Mathematics Education**, Boston, v. 43, n. 5, p. 584-615, 2012.

MELLO, Geison; MORIEL JÚNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D. Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, São Paulo, v. 18, n. 2, p.126-133, 2017.

OLIVEIRA, Bárbara Passadore de ; RIBEIRO, Alessandro Jacques; POWELL, Arthur B. O conceito de simetria e o ensino de Álgebra: analisando materiais curriculares da Educação Básica. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 69, p.105-117, 2016.

OPFER, V. Darleen; PEDDER, David. Conceptualizing teacher professional learning. **Review of Educational Research**, New York, v. 81, n. 3, p. 376-407, 2011.

PAZUCH, Vinícius; LIMA, Caroline Miranda Pereira; ALBRECHT, Evonir. Conhecimentos mobilizados por professores que ensinam matemática e o conceito de função na educação básica. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, n. 12, p. 361-379, 2018.

PONTE, João Pedro da. Investigar a nossa própria prática. *In*: GTI (org.). **Refletir e investigar sobre a prática profissional**, Lisboa: APM, 2002. p. 5-28

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, João Pedro da; SERRAZINA, Lurdes. As práticas dos professores de Matemática em Portugal. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 80, p. 8-12, 2004.

PUIG, Luis; RADFORD, Luis. Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. **Educational Studies in Mathematics**, New York, n. 66, p. 145-164, 2007.

RAFAEL, Josiane Aparecida Miranda; DE MIRANDA, Paula Reis. Onde está a simetria? Uma investigação nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora, v. 2, n. 1, p. 26-52, 2018.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, p. 535-558, 2012.

RIBEIRO, Miguel; GIBIM, Gabriela Faria Barcelos; SOUZA, Carla Alves. **Professor: Reflexão e Simetria**. Campinas: CRV, 2021. (Coleção CIEspMat).

SERRAZINA, Lurdes. Planificação do ensino e aprendizagem da matemática. *In*: Investigação, G.-G. D. T. D. (Ed.). **A prática dos professores**: Planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, 2017.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in the teaching. **Educational Researcher**, New York, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Boston, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

STEIN, Mary Kay; ENGLE, Randi A.; SMITH, Margaret Schwan.; HUGHES, Elizabeth K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, New York, n. 10, p. 313-340, 2008.

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schwan M. Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Boston, n. 3, p. 268-275, 1998.

STEWART, Ian. **Uma história da simetria na Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

TREVISAN, André Luis; RIBEIRO, Alessandro Jacques; PONTE, João Pedro da. Oportunidades de aprendizagem profissional sobre o conceito de função em um programa de formação de professores baseado na prática. **Revista Eletrônica Internacional de Educação Matemática**, Singapura, v. 15, n. 2, 2020.

WASSERMAN, Nicholas H. Introducing algebraic structures through solving equations: vertical content knowledge for K-12 mathematics teachers. **PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies**, Toronto, v. 24, n. 3, p. 191-214, 2014.

WEBSTER-WRIGHT, Ann. Reframing professional development through understanding authentic professional learning. **Review of Educational Research**, New

York,  
v. 79, n. 2, p. 702-739, 2009.

WHITE, Allan Leslie; JAWORSKI, Barbara; AGUDELO-VALDERRAMA, Cecilia; GOOYA, Zahra. Teachers learning from teachers. In: CLEMENTS, M. K. A. *et al.* (ed.). **Third International Handbook of Mathematics Education**. Berna: Springer, v. 27, 2013.

## Apêndice A – Tarefa Matemática 1 (TM1)

### O peso da alimentação na saúde

Os amigos Jandysvaldo, Valtycreia e Lambarildo compartilhavam de hábitos não saudáveis há um bom tempo e durante o recesso escolar abusaram mais ainda da preguiça, da comilança e outros não tiveram uma alimentação suficientemente adequada. No retorno às aulas, seu professor explicou a importância de uma alimentação equilibrada e a prática de exercícios físicos. Para tanto, apresentou à turma o conceito do **IMC** que significa **índice de massa corporal** e serve para saber se uma pessoa está com o peso dentro da normalidade como podemos conferir na tabela de referência abaixo:

IMC	Menor que 18,5	De 18,5 a 24,9	De 25 a 29,9	Acima de 30
Classificação	Abaixo do peso	Normal	Sobrepeso	Obesidade

Referência: [http://bvsmms.saude.gov.br/bvs/dicas/215\\_obesidade.html](http://bvsmms.saude.gov.br/bvs/dicas/215_obesidade.html)

Como fazemos o cálculo do IMC? Dividimos a massa corporal (em quilogramas) pela (altura)<sup>2</sup>. Para melhor visualização:

$$IMC = \frac{\textit{massa}}{\textit{altura} \cdot \textit{altura}}$$

a) desta forma, os três amigos tiveram curiosidade em saber como se encaixavam na tabela acima. Sabendo que Jandysvaldo possui 75kg, Valtycreia tem 44kg, Lambarildo pesa 85kg e que os três amigos possuem a mesma altura de 1,64m, como eles podem ser classificados de acordo com seu IMC?

b) além da tabela, represente de outra forma a escala do IMC, de maneira a poder indicar as classificações e também onde cada um de nossos personagens se localizam nesta representação de acordo com o que foi calculado no item anterior.

c) Jandysvaldo, Valtycreia e Lambarildo foram orientados a praticar exercícios e fazer uma dieta mais saudável tendo como objetivo atingirem até o final do ano um valor de IMC próximo de 22, devendo calcular seus índices (IMC) a cada perda ou ganho de 5kg até atingirem a meta estabelecida. Eles aceitaram o desafio e agora precisam calcular quanto cada um deve ganhar ou perder nesse período e como o IMC evolui até atingir a meta. Ajude-os nestes cálculos.

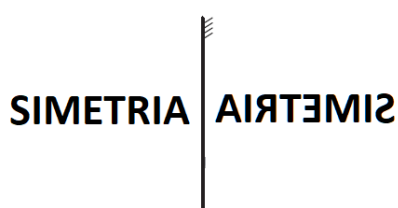
d) utilizando a representação que vocês fizeram no *item b*, indique a evolução de nossos amigos no desenvolvimento do desafio para atingir a meta para melhoria da saúde deles.

**Adaptado de :** Associação Nova Escola (2017)

## Apêndice B – Tarefa Matemática 2 (TM2)

### O desafio do professor Lambarildo

**Enantiomorfismo** consiste na simetria de objetos que não podem ser sobrepostos e é uma característica de imagens formadas em espelhos.



Uma de suas aplicações é a escrita ao contrário da palavra “ambulância” em carros de emergência, permitindo que motoristas ao ver tais veículos no espelho retrovisor de seus carros possam ler de maneira mais rápida a identificação e dar passagem em situações de urgência.

Ao explorar o conceito de enantiomorfismo em sua aula, o professor Lambarildo apresentou a figura abaixo que relaciona o número da reta com quadrinhos em uma barra :

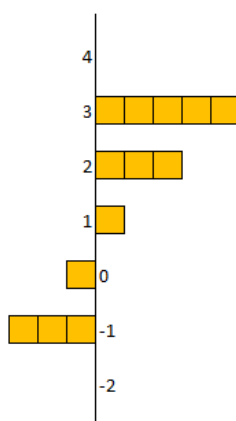


Fig.01 – Prof. Lambarildo

Em seguida, o professor pediu ao seu aluno Jandysvaldo que completasse a imagem e construísse uma outra figura que fosse enantiomorfa à sua. Vamos ajudar Jandysvaldo nessa tarefa respondendo as questões abaixo:

- observando a sequência de blocos construída, quantos blocos terá a barra na posição 4 ? E na posição -2?
- qual será a quantidade de blocos na posição 50?

- c) escreva uma regra que permita calcular a quantidade de blocos na figura do professor em qualquer posição.
- d) para atender a tarefa dada pelo professor, Jandysvaldo deve elaborar uma regra para uma nova figura que deve ser enantiomorfa à figura do professor. Qual deve ser esta regra?
- e) utilizando a regra que você ajudou Jandysvaldo a desenvolver no item anterior, represente a figura gerada por esta regra ao lado da figura do professor e responda: elas são enantiomorfas?

### Apêndice C – Tarefa Matemática 3 (TM3)

#### As entregas de Marticleyde

Marticleyde, gerente de uma loja de bolos, resolveu contratar uma empresa de distribuição para fazer as entregas no raio de 30 km. Para isso foi feito um orçamento com 4 distribuidores que utilizam, para o cálculo dos custos, um valor fixo mais um valor variável que depende da quantidade de quilômetros rodados.

Os valores dos distribuidores A, B, C e D podem ser analisados na tabela abaixo

Distribuidora	Valor Fixo (R\$)	Valor por Km (R\$)
A	12	5
B	25	2
C	3	12
D	40	1



**PARTE A** - Ajude Martinha a analisar os custos com distribuição respondendo os itens abaixo:

- a) Representando a distância percorrida (km) por  $x$  e o valor final cobrado pela distribuidora (R\$) por  $y$ , escreva as funções que representam o custo de cada empresa.
- b) Construa o gráfico das funções utilizando o Geogebra.
- c) analisando os gráficos construídos, justifique qual (quais) a(s) melhor(es) escolha(s) para Marticleyde.

Adaptado de Associação Nova Escola (2017)

**PARTE B** - O gráfico abaixo foi gerado a partir da função  $y = 2x - 6$ . Com base no que discutimos sobre coeficientes da função polinomial do 1º grau, quais outras funções devem ser inserida no programa para que consigamos construir um **LOSANGO** a partir do gráfico abaixo?

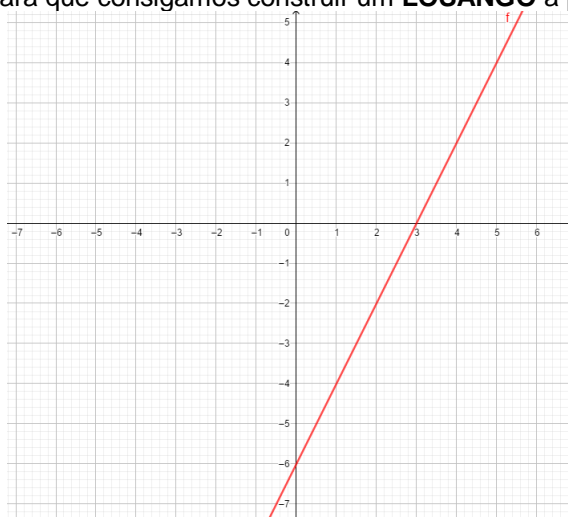


Gráfico elaborado com o software Geogebra

- a) O que significa o ponto onde cada gráfico intercepta o eixo x do plano?

- b) Que característica em comum é possível observar em relação ao coeficiente que acompanha a variável  $x$  na expressão que representa a função? De que forma isso influencia o gráfico?
- b) Qual característica, em relação ao gráfico, possui o termo fixo da função?
- c) Generalize suas observações sobre o gráfico da função  $f(x) = ax + b$ .