BOLETIM GEPEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Sequência de Fibonacci, Tribonacci, etc. e Tabuleiros

Francisco Regis Vieira Alves[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

RESUMO
O presente trabalho apresenta uma sugestão para aula envolvendo uma inesperada relação entre a sequência de Fibonacci, determinadas generalizações (Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, Hexanacci, etc) e a noção de Tabuleiro. A partir da noção de Tabuleiro, os alunos devem ser estimulados a compreender relações aritméticas, algébricas e, sobretudo, de natureza heurística e geométrica, proporcionado pela exploração da noção de Tabuleiros e suas múltiplas formas e dimensões. Outrossim, as relações entre sequências numéricas recorrentes e sua abordagem combinatória envolve aspectos históricos e evolutivos do saber matemático, constituindo uma compreensão importante para o professor de Matemática e sua correspondente exploração em sala de aula.
Palavras-chave: Sequências numéricas; Sequência de Fibonacci; Tabuleiro; História da Matemática.

Fibonacci Tribonacci, etc. sequences and the Boards

ABSTRACT
The present work presents a suggestion for a class involving an unexpected relationship between the Fibonacci sequence, certain generalizations (Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, Hexanacci, etc) and the notion of Board. Based on the concept of Board, students should be encouraged to understand arithmetic, algebraic and, above all, heuristic and geometric relationships, provided by the exploration of the concept of Boards and their multiple shapes and dimensions. Furthermore, the relationships between recurring numerical sequences and their combinatorial approach involve historical and evolutionary aspects of mathematical knowledge, constituting an important understanding for the Mathematics teacher and its corresponding exploration in the classroom.
Keywords: Numerial sequences; Fibonacci sequence; Board; History of Mathematics.

Secuencia de Fibonacci, Tribonacci, etc. y tabuleiros

RESUMEN
O presente trabalho apresenta uma sugestão para aula envolvendo uma relación inesperada entre una secuencia de Fibonacci, determinadas generalizaciones (Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, Hexanacci, etc) y una noción de Tabuleiro. A partir de esta novedad tabuleiro, los alumnos serán estimulados a comprender relaciones aritméticas, algebricas y, sobretudo, de naturaleza heurística y geométrica, proporcionada pela exploración da tabuleiros novedad y sobre múltiples formas y dimensiones. Outrossim, como relaciones entre secuencias numéricas recurrentes y su enfoque combinatória, involucra aspectos históricos y evolutivos del saber matemático, constituyendo una importante comprensión para el profesor de Matemática y su correspondiente exploración en el aula.

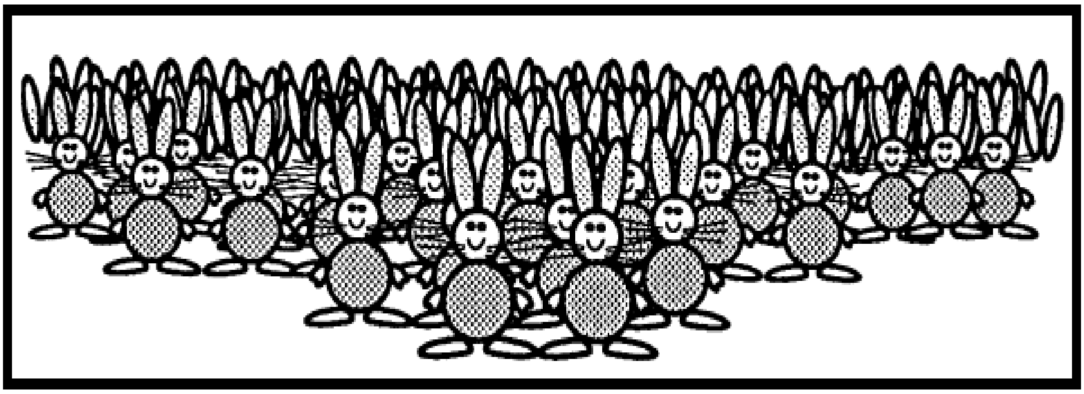
[1]Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática – Universidade Federal do Ceará. Coordenador do Doutorado acadêmico em Ensino REDE Nordeste – RENOEN – Polo IFCE (IFCE), Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico – CNPq – PQ2, Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Monsenhor Otávio de Castro, 100, Fatima, Fortaleza, CE, Brasil, CEP: 60.340-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561. E-mail: fregis@ifce.edu.br.

Palabras clave: Secuencias numéricas; Secuencia Fibonacci; Tabuleiro; História da Matematica.

INTRODUÇÃO: SOBRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A NOÇÃO DE TABULEIRO

Em nossos trabalhos (ALVES, 2017; 2022) temos assinalado que muitos autores de livros de História da Matemática dedicam tempo demasiado, com o interesse em evidenciar aspectos pitorescos sobre a sequência de Fibonacci, em detrimento de seu caráter histórico-matemático e epistemológico-evolutivo. Para exemplicar um expediente de crítica, Gullberg (1997) recorda que a história de reprodução de pares de "coelhos imortais", que popularizou o trabalho de Leonardo Pisano (1170 – 1250) e a sequência numérica recorrente de Fibonacci.

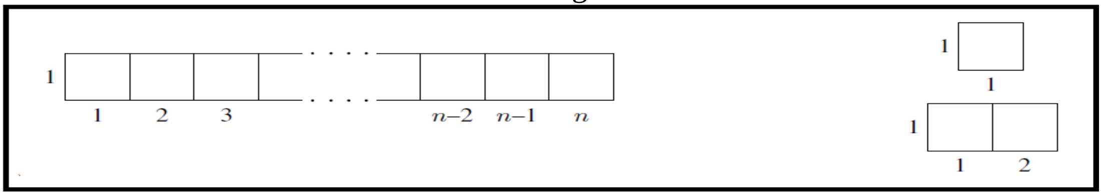
Figura 1 – Descrição anedótica sobre a reprodução de "coelhos imortais" e a sequência de Fibonacci



Fonte: Gullberg (1997).

Por outro lado, em nossos trabalhos (ALVES, 2017; 2022), buscamos assinalar um componente histórico, matemático e evolutivo que pode ser compreendido, por exemplo, por intermédio de recentes aplicações e correlações da sequência de Fibonacci com a noção de Tabuleiro, que possui um papel importante na Álgebra Enumerativa e Combinatória. Para exemplificar, nas figuras 2 e 3 podemos visualizar dois Tabuleiros. O primeiro n - Tabuleiro, do tipo $1 \text{ x } n$ foi amplamente por Benjamin & Quinn (2003), cujas células são constituidos por quadrados $1 \text{ x } 1$. Os ladrilhos definidos para o preenchimento do n - Tabuleiro é constituído de quadrados e dominós $1 \text{ x } 2$ (Ver figura 2, ao lado direito). Sendo f_n as maneiras de preencher o mesmo, & Quinn (2003) demonstram que vale a relação $f_n = F_{n+1}$, para $n \geq 0$, em que F_n é a sequência de Fibonacci.

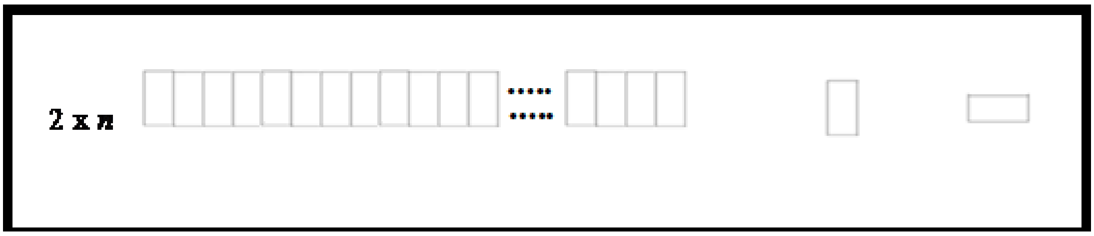
Figura 2 – Benjamin & Quinn (2003) discutem propriedades do Tabuleiro retangular $1 \times n$.



Fonte: Benjamin & Quinn (2003).

Em seguida, na Figura 3, visualizamos um Tabuleiro do tipo $2 \times n$. Neste caso, Grimaldi (2012) apresenta relações combinatórias do Tabuleiro com a sequência de Fibonacci, quando escolhe apenas dominós horizontais e verticais, com o interesse de produzir os ladrilhos que preenchem o Tabuleiro que visualizamos na Figura 3. De forma semelhante ao trabalho de Benjamin & Quinn (2003). Grimaldi (2012) demonstra que, pars o caso do Tabuleiro do tipo $2 \times n$, a quantidade de ladrilhos (retângulos verticais e horizontais) correspondem, também, com a sequência de Fibonacci.

Figura 3 – Grimaldi (2012) discute propriedades do Tabuleiro $2 \times n$



Fonte: Grimaildi (2012).

Diante dos argumentos anteriores, indicamos de forma preliminar algumas propriedades combinatórias, originadas da noção de Tabuleiro, que permitem uma correspondência com a sequência de Fibonacci, todavia, com amparo da Tabela 1, constatamos que existem recorrências denominadas por Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, Hexanacci, etc. e que representam uma generalização da sequência numérica recorrente de Fibonacci, com a indicação dos valores iniciais, todavia, desconsideradas em livros de História da Matemática. (ALVES, 2017).

Tabela 1 - Descrição de algumas sequências numéricas recorrentes que generalizam Fibonacci

Sequência numérica	Regra de formação e valores iniciais	Valores numéricos
Fibonacci	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...
Tribonacci	$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3},\ T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1$	0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, ...
Tetranacci	$Te_n = Te_{n-1} + Te_{n-2} + Te_{n-3} + Te_{n-4},$ $Te_0 = 0,\ Te_1 = 1,\ Te_2 = 1,\ Te_3 = 2.$	0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, …
Pentanacci	$Pent_n = Pent_{n-1} + Pent_{n-2} + Pent_{n-3} + Pent_{n-4} + Pent_{n-5},$ $Pent_0 = 0,\ Pent_n = 1,\ Pent_2 = 1,\ Pent_3 = 2,\ Pent_4 = 4.$	1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, ...
Hexanacci	$Hex_n = Hex_{n-1} + Hex_{n-2} + Hex_{n-3} + Hex_{n-4} + Hex_{n-5} + Hex_{n-6},$ $Hex_0 = 0,\ Hex_1 = 1,\ Hex_2 = 1,\ Hex_3 = 2,\ Hex_4 = 4,$ $Hex_5 = 8$	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, 248,...
Etc.		

Fonte: Elaboração do autor.

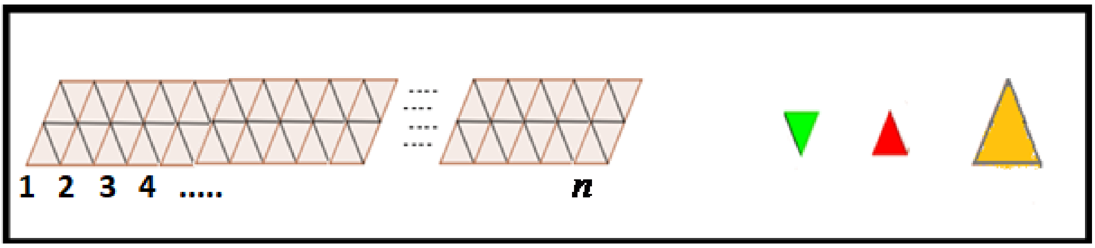
Antes de iniciarmos a seção seguinte, com o interesse de formular um problema ou questão norteadora de nossa proposta de atividade em sala de aula, questionamos: Como relacionar a sequência de Fibonacci e/ou suas generalizações com a noção de Tabuleiro e suas possíveis formas?

Com o escopo de responder o questionamento anterior, indicamos os objetivos: (a) Que propriedades aritméticas e geométricas identificadas em um Tabuleiro se relacionam com a sequência de Fibonacci? (b) Que propriedades geométricas ou formas de preencher com ladrilhos permitem relacionar o Tabuleiros com outras formas generalizadas de sequências originadas de Fibonacci?

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI, TRIBONACCI, ETC. E A NOÇÃO DE TABULEIRO

A partir do trabalho de Boden *et al*. (2015) indicamos, na figura 4, um Tabuleiro triangular de comprimento n, cujas células se constituem a partir de triângulos equiláteros. Ademais, os autores adotam os seguintes ladrilhos triangulares que, na Figura 4, se encontram na cor verde, vermelha e amarelo, respectivamente, que podem ser visualizados ao lado direito.

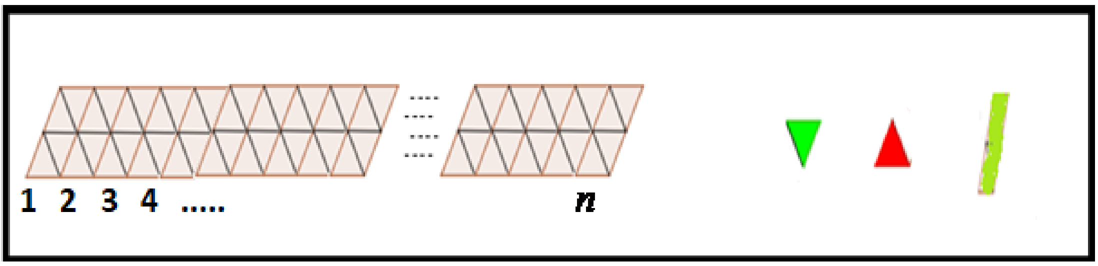
Figura 4 – Boden *et al*. (2014) relacionam o Tabuleiro triangular com a sequência de Fibonacci



Fonte: Boden et al. (2014).

Em seguida, adaptamos e modificamos a proposta de Boden *et a*l. (2014) e, ao invés de empregar um ladrilho um triângulo grande, na cor amarela , empregaremos um retângulo, na cor verde, inclinado à direita , como podemos perceber na Figura 5, ao lado direito.

Figura 5 – Tabuleiro triangular e ladrilhos variados para o preenchimento e um novo ladrilho retangular

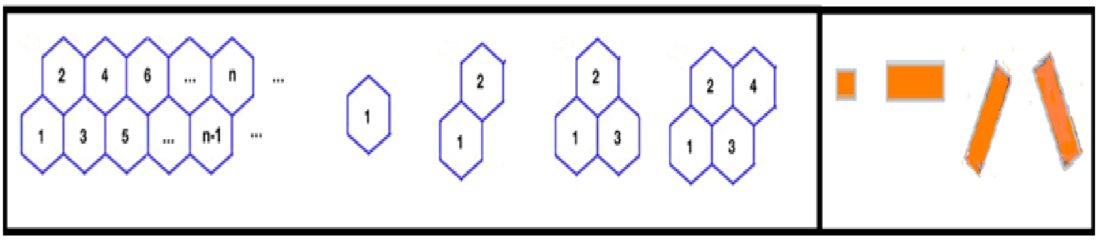


Fonte: Elaboração do autor.

10.4322/gepem.2022.055

Por fim, com o interesse de constatar inúmeras formas geométricas possíveis de ladrilhos, assinalamos o trabalho de Ziqian (2019) que introduzem um tabuleiro cujas células são constituídas de hexágonos regulares e enumeradas como indicamos na figura 6. Ao lado direito, visualizamos o conjunto de 4 ladrilhos escolhidos para o preenchimento do Tabuleiro hexagonal.

Figura 6 – Delineamento da pesquisa



Fonte: Ziqian (2019).

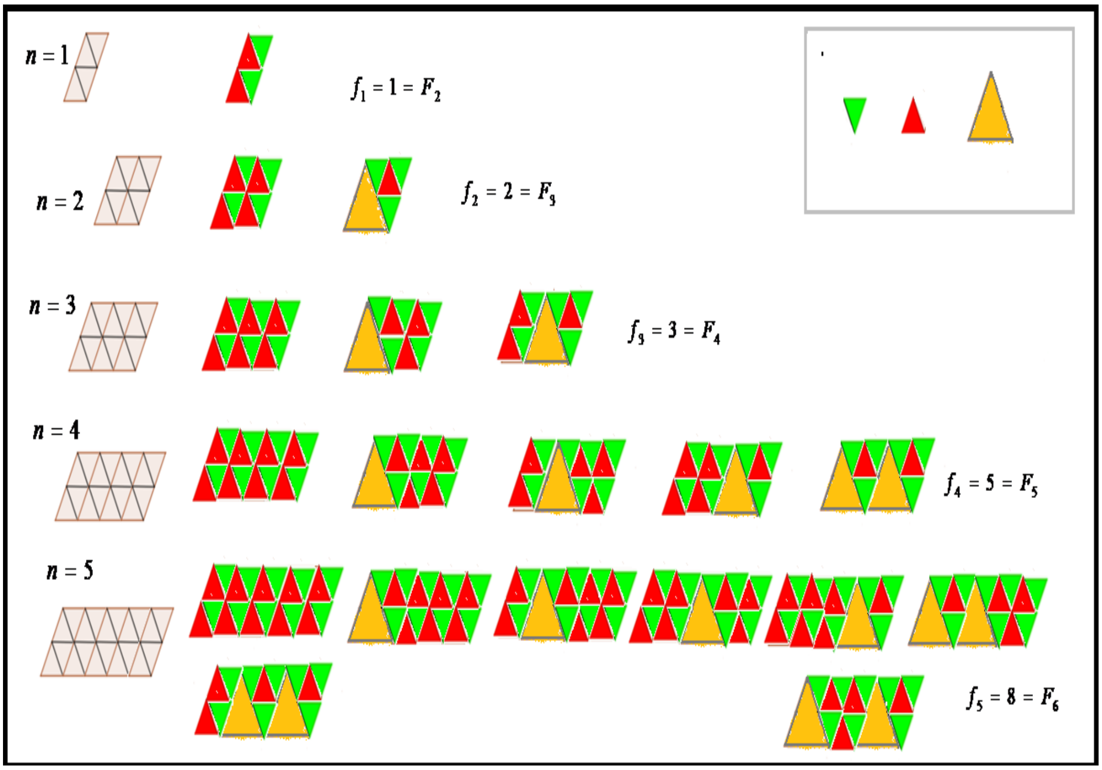
Vejamos, logo a seguir, a proposição de um roteiro de sala de aula composto de três atividades.

ATIVIDADE 1: Vamos considerar um Tabuleiro triangular, como indicado na Figura 4. Os ladrilhos que devem são designados por: um triângulo pequeno, na cor verde , um triângulo pequeno, em sentido oposto, na cor vermelha , um triângulo grande, na cor amarela . Considerando f_n como a quantidade de formas de preencher o Tabuleiro triangular, existe alguma correlação com a sequência numérica recorrente de Fibonacci?

Para início da atividade, os estudantes são estimulados a considerar os casos particulares do Tabuleiro que exibimos na figura 4. Assim, para os casos $n = 1, 2, 3, 4, 5$, com amparo da Figura 7, podem relacionar, com amparo da visualização e percepção, uma correspondência entre a sequência de Fibonaci e as maneiras de ladrilhos definidos sobre o Tabuleiro triangular.

10.4322/gepem.2022.055

Figura 7 – Descrição de casos particulares de ladrilhos sobre o Tabuleiro triangular



Fonte: Elaboração do autor.

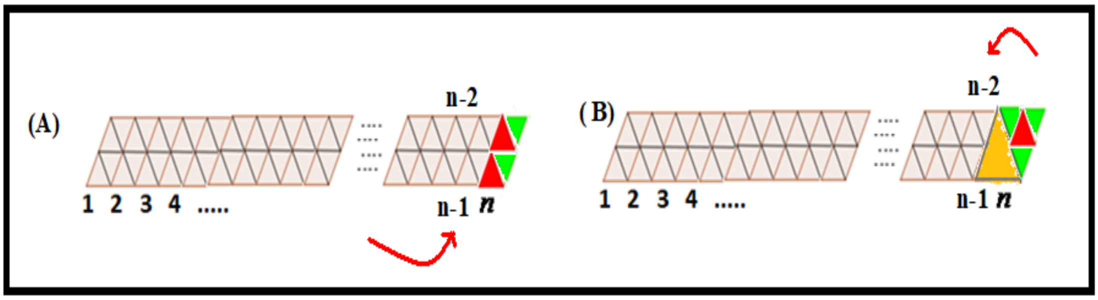
Depois de uma visualização e emprego de estratégias heurísticas baseadas no Tabuleiro e nos casos particulares, por intermédio de uma contagem aritmética, o professor deve estimular a grupo de estudantes na introdução de um sistema notacional. Assim, deve definir f_n as maneiras de preencher o Tabuleiro indicado na Figura 5. Em seguida, os alunos devem compreender as seguintes relações aritméticas: $f_1 = 1 = F_2, f_2 = 2 = F_3, f_3 = 3 = F_4, f_4 = 5 = F_5, f_5 = 8 = F_6$. Por intermédio de um raciocínio indutivo, os estudantes devem ser estimulados em formular a seguinte connjectura: Sendo f_n as maneiras de preencher o Tabuleiro indicado na Figura 7, então vale a relação $f_n = F_{n+1}$, para $n \geq 0$, em que F_n é a sequência de Fibonacci.

Para estabelecer uma formalização e verificação da conjectura anterior, com amparo da Figura 8, os estudantes devem compreender, por intermédio da inspeção direta e visualização, que um Tabuleiro qualquer de comprimento n ou termina com ladrilhos da forma indicada pelo item (A), na Figura 8. Ou pode terminar de acordo com os ladrilhos indicados no item (B), na mesma Figura 8. No primeiro caso, fixado a posição n, a partir da posição $n-1$, teremos uma contribuição de f_{n-1} ladrilhos e formas de preencher. No segundo caso, reparemos que as posições n, $n-1$ ficam

Boletim Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM)
Rio de Janeiro, n. 80, p.311-323, 2022, *e*ISSN: 2176-2988
10.4322/gepem.2022.055

ocupadas, restando uma contribuição de f_{n-2} ladrilhos e formas de preencher. Por um princípio aditivo de contagem, a somas de todos os casos (A) e (B), deve ser expressa por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com a condição para os valores iniciais: $f_0 = 1 = F_1$, $f_1 = 1 = F_2$, isto é, $f_n = F_{n+1}$, para $n \geq 0$.

Figura 8 – Argumentos e diagramas mnemônicos que envolvem a demonstração das propriedades no Tabuleiro



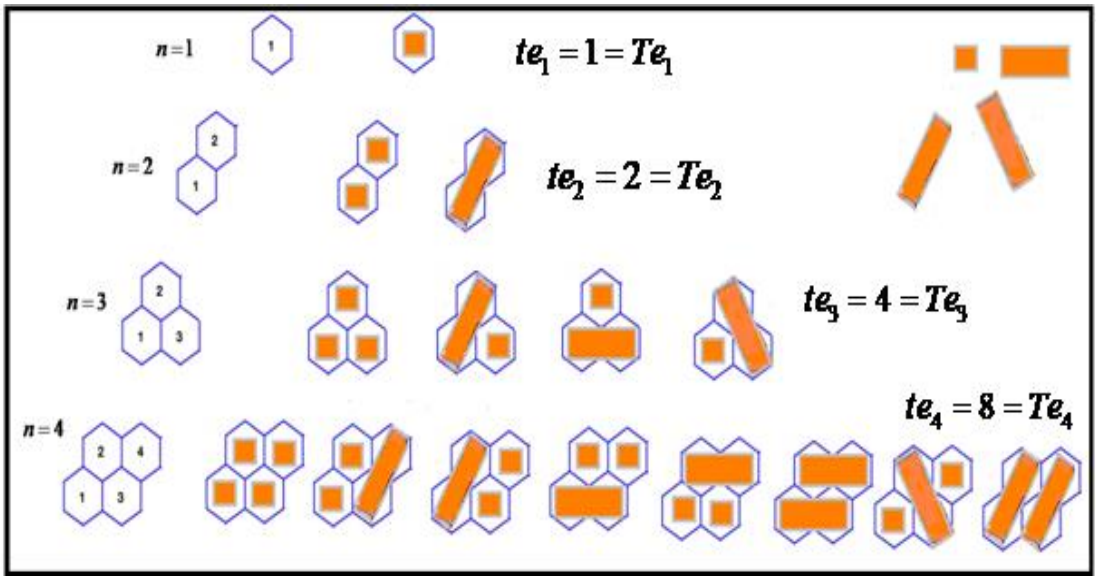
Fonte: Elaborado pelo autor.

ATIVIDADE 2: Vamos considerar um Tabuleiro hexagonal, como indicado na Figura 6. Os ladrilhos que devem são designados por: um quadrado , um dominó horizontal , um dominó inclinado à esquerda , um dominó inclinado à direita . Sendo te_n a quantidade de formas de ladrilhar os respectivo Tabuleiro hexagonal (Ver Figura 6), determine sua relação com a alguma forma generalizada da sequência de Fibonacci.

O professor deverá estimular uma compreensão visual das relações geométricas e aritméticas que podem ser identificadas na Figura 9. De forma preliminar, os estudantes são estimulados na verificação dos casos particulares $n = 1, 2, 3, 4$, de acordo com os ladrilhos definidos na cor laranja. Agora, fazendo uso da Tabela 1, o professor deverá estimular uma correspondência numérica, na medida em que os estudantes devem compreender as relações do Tabuleiro hexagonal com a sequência Tetranacci. Mais uma vez, semelhante a atividade 1, os estudantes devem ser estimulados pelo professor por optarem pela inserção de um sistema notacional sugerido pela Tabela I. Com efeito, podem empregar as notações: $te_1 = 1 = Te_1$, $te_2 = 2 = Te_2$, $te_3 = 4 = Te_3$, $te_4 = 8 = Te_4$.

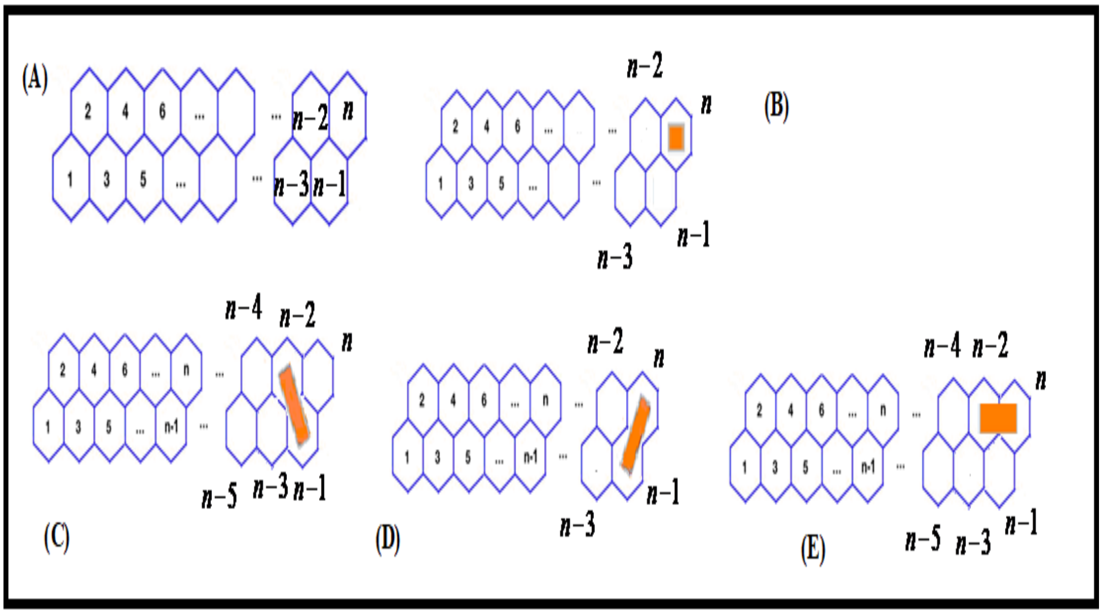
10.4322/gepem.2022.055

Figura 9 – Diagramas mnemônicos que envolvem a demonstração das propriedades no Tabuleiro hexagonal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – Diagramas mnemônicos que envolvem a demonstração das propriedades no Tabuleiro hexagonal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, com o amparo da Figura 10, o professor deverá estimular o debate coletivo entre o grupo, com o escopo de estimular uma habilidade de visualização e compreensão combinatória das propriedades e, sobretudo, a identificação dos casos de ladrilhos particulares que indicamos na Figura 10. Os alunos devem compreender que, considerando os possíveis ladrilhos do tabuleiro hexagonal, quando objetivamos as posições finais do Tabuleiro de comprimento n (A), podem ocorrer os casos: (B) o ladrilho acaba por um quadrado na posição n; (C) o ladrilho acaba por um retângulo inclinado à esquerda, ocupando as posições $n-1, n-2$; (D) o ladrilho acaba por um retângulo inclinado à direita, ocupando as posições $n-1, n$; (E) o ladrilho acaba por um retângulo horizontal, ocupando as posições $n-2, n$. Finalmente, para cada caso independente considerado, por um princípio simples de combinatória, os alunos devem considerar todas as contribuições nos casos (B), (C), (D) e (E). Por fim, considerando todas as contribuições anteriores, escreve $te_n = te_{n-1} + te_{n-2} + te_{n-3} + te_{n-4}$, estabelecendo de início que $te_0 = 1 = Te_1$ e coincide com a Tetranacci.

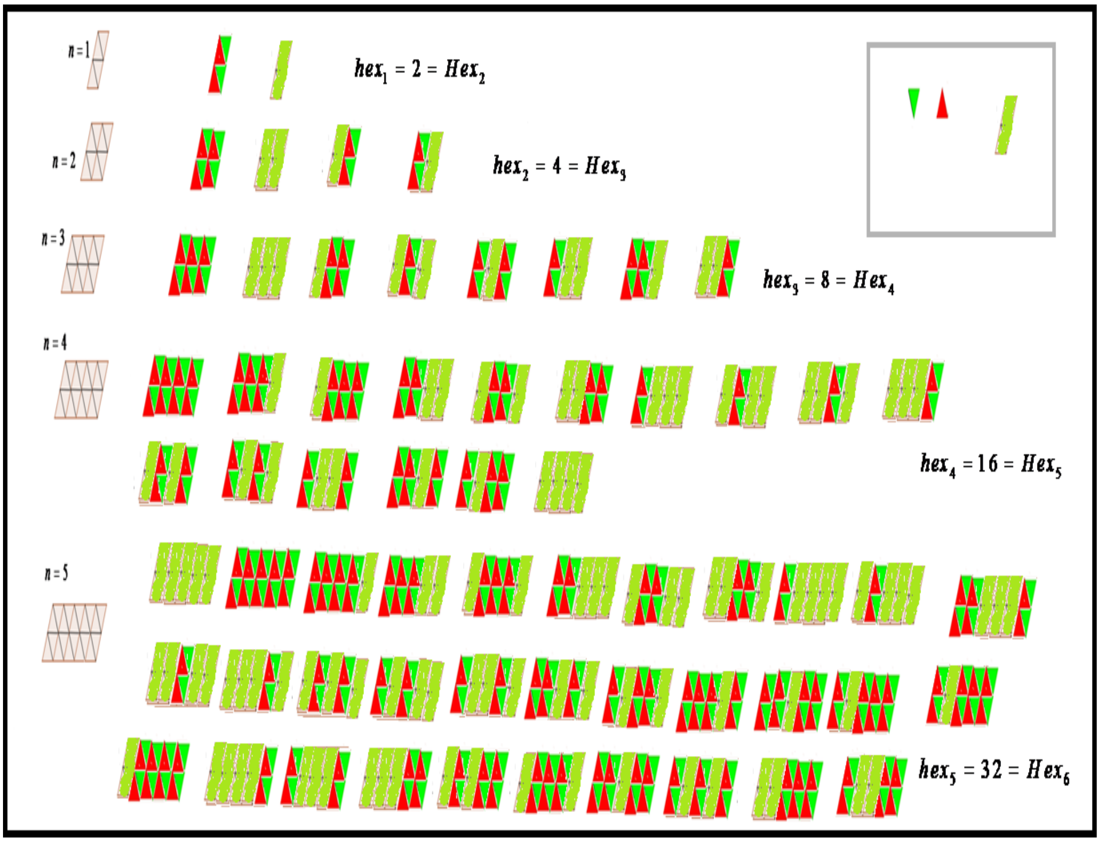
ATIVIDADE 3: Vamos considerar um Tabuleiro triangular, como indicado na Figura 5. Os ladrilhos que devem são designados por: um triângulo pequeno, na cor verde , um triângulo pequeno, em sentido oposto, na cor vermelha , um retângulo, na cor verde, inclinado à direita . Sendo hex_n a quantidade de formas de ladrilhar os respectivo Tabuleiro hexagonal (Ver Figura 6), determine sua relação com a alguma forma generalizada da sequência de Fibonacci.

Em nossa última atividade, o professor deverá, de forma semelhante, estimular os estudantes na introdução de um sistema notacional e, de modo semelhante aos casos anteriores, os estudantes devem compreender as relações geométricas e aritméticas da Figura 11 com a sequência Hexanacci, cujos valores numéricos são indicados na Tabela 1. Mais uma vez, podemos visualizar na Figura 11 os casos particulares indicados por $n = 1, 2, 3, 5$.

Por fim, diferentemente das atividade anteriores, apesar da introdução das seguintes relações simbólicas $hex_1 = 2 = Hex_2$, $hex_2 = 4 = Hex_3$, $hex_3 = 8 = Hex_4$, $hex_4 = 16 = Hex_5$, $hex_5 = 32 = Hex_6$ o professor acentuará que, de modo indutivo, não podemos garantir que, por exemplo, para o termo seguinte hex_6 e hex_7 as relações e regularidades correspondentes com a sequência numérica recorrentes Hexanacci (Ver Quadro I) sejam preservadas. Outrossim, visando formalizar as relações, semelhantemente aos argumentos indicados nas Figuras 8 e 10, os alunos devem compreender que não podem mais, neste caso, empregar argumentos anteriores.

Na Figura 11, por intermédio de uma inspeção visual, os estudantes devem ser estimulados a reproduzir as relações combinatórias e geométricas estimuladas pelos ladrilhos particulares que indicamos abaixo. Como sugestão, o professor poderá sugerir a introdução de outros ladrilhos, com o emprego do Tabuleiro triangular e, possivelmente, identificar, relações com a demais sequências que indicamos na Tabela 1. Não obstante, argumentos indutivos, neste caso, envolvem determinada limitações e que, por intermédio do debate científico entre o grupo, o professor estimula a concepção de outras forma de ladrilhos, por exemplo, um triângulo grande apontado para baixo.

Figura 11 – Descrição dos casos particulares de um Tabuleiro triangular e a sequência Hexanacci



Fonte: Elaboração do autor.

ATIVIDADE PREVISTA, DISCUSSÃO E O DEBATE CIENTÍFICO

De forma prosaica, indicamos alguns aspectos previstos diante das atividades 1, 2 e 3, a saber:

- Nas atividades propostas se mostra imprescindível a compreensão de uma correspondência numérica da quantidade de ladrilhos (coloridos) e padrões regulares diferentes com os valores numéricos indicados das sequências numéricas exibidas no Quadro 1;

- A introdução de um sistema notacional matemático envolvendo as sequências Fibonacci, Tribonacci, Tetrabonacci, Pentanacci, Hexanacci, Heptanacci, etc. pode ser estimulado pelo professor;
- A formulação e conjectura de novos ladrilhos ou Tabuleiros (retangulares, circulares, hexagonais, etc) que se relacionam, de alguma forma, com o conjunto de sequências numéricas recorrentes apresentadas na Tabela 1;
- A atividade 3 consistirá em um problema em aberto, cujos ladrilhos particulares descritos por um triângulo pequeno , um triângulo pequeno, em sentido oposto , um retângulo, na cor verde, inclinado à direita , não podem ser generalizados, como nas atividades 1 e 2.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa proposta de sala de aula abordamos relações entre determinadas sequências recorrentes numéricas, de modo particular, a sequência de Fibonacci e suas generalizações (Ver Tabela 1), bem como suas relações inesperadas com a noção de Tabuleiro. A noção de Tabuleiro se constitui como um objeto teórico conceitual e costuma ser empregado na pesquisa atual em Matemática, no ramo denominado de Álgebra Enumerativa. Não obstante, como buscamos situar na introdução, os autores de compêndios especializados em História da Matemática desconsideram um estádio atual e evolutivo do saber matemático, dedicando tempo na discussão de curiosidades sobre Fibonacci.

No conjunto das três atividades propostas para a sala de aula, buscamos acentuar elementos e habilidades imprescindíveis na aprendizagem em Matemática que, por parte do professor, nunca podem ser negligenciadas, a saber: a habilidade de visualização e identificação de padrões geométricos; a habilidade de adoção de um sistema notacional matemático coerente com os invariantes algébricos, aritméticos e geométricos envolvidos em cada problema; a habilidade de compreensão de problemas que podem ser resolvidos e outros em solução.

Finalmente, um importante "fio condutor" da presente sugestão da sala de aula consistirá em estimular o debate cientifico, interesse e a curiosidade pela pesquisa em livros de História da Matemática, sobre a existência de outras sequências numéricas recorrentes e que, nesses contexto, os autores de livros dedicam espaço predominante para a sequência de Fibonacci, em detrimento de outros exemplos (ALVES; CATARINO, 2022) que, relacionados com a noção de Tabuleiro, preservam o vigor e o interesse de matemáticos profissionais em vários países (SANCHEZ, 2020).

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Formula de Moivre, de Lamé ou de Binnet: demonstrações e generalidades sobre a sequência de Fibonacci, **Revista de História da Matemática**, v. 17, nº 33, 2017.

ALVES, F. R. V. Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Hist oposal for Historical Research in Brazil on Recurring Number Sequences. **The Montana Math Enthusiast**, v. 19, nº 2, 239-274, 2022.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. A sequência de Padovan ou Coordonier, **Revista de História da Matemática**, v. 22, nº 44, 1 – 30. 2022.

BENJAMIN, A. T. QUINN, J. J. (2003). ***Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial* Proof.** Dolciani Mathematical Expositions, v. 27, nº 1, Mathematical Association of America.

BODEN et *al*.. Tiling a Strip with Triangles. **The Eletronic Journal of Combinatoric***s*, v. 21, nº 1, 1 – 7. 2014.

GRIMALDI, R; (2012). **Fibonacci and Catalan numbers**, Wiley and Sons.

GULLBERG, J. **Mathematics: from the birth of numbers**. New York: Norton, 1997.

SANCHEZ, J. E. S. **On Periodic Tilings with Regular Polygon**s. (Phd Thesis). Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

ZIQIAN, A. J. Tetranacci Identities With Squares, Dominoes, And Hexagonal Double-Strips, **AirXiv**, v. 2, nº 4, 1 – 20, 2019.