Investigando os Números Híbridos de Jacobsthal através de uma abordagem epistemológica

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
milenacarolina24@gmail.com

Francisco Regis Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – UTAD
pcatarino23@gmail.com

Resumo
Exibiremos nesta proposta de aula um estudo sobre os números híbridos de Jacobsthal, por meio de uma abordagem epistemológica, a partir do que já foi estudado sobre os números híbridos e da sequência de Jacobsthal. É sugerido uma sequência de questão com o intuito de discutir definições, teoremas, propriedades e proposições a fim de conhecer esse novo conjunto de números híbridos de Jacobsthal. Apresentaremos, a partir da recorrência, a equação característica, função geradora, fórmula de Binet e a extensão dos números híbridos de Jacobsthal para os índices negativos.

Palavras-chave: Números Híbridos. Sequência de Jacobsthal. Números Híbridos de Jacobsthal. Fórmula de Binet.

Investigating Jacobsthal's Hybrid Numbers through an Epistemological Approach

Abstract
In this lesson proposal, we will show a study on the Jacobsthal hybrid numbers, through an epistemological approach, from what has already been studied on the Jacobsthal hybrid numbers and sequence. A sequence of questions is suggested in order to discuss definitions, theorems, properties and propositions in order to know this new set of hybrid numbers by Jacobsthal. We will present, from recurrence, the characteristic equation, generating function, Binet formula and the extension of Jacobsthal's hybrid numbers to negative indices.

Keywords: Hybrid Numbers. Jacobsthal sequence. Jacobsthal Hybrid Numbers. Binet formula.

Introdução

Tendo em vista que as sequências lineares recorrentes estão em diversas áreas e aplicabilidades, sendo a sequência de Fibonacci a mais conhecida das sequências, porém, tem-se a intenção de explorar outras sequências, como: a Sequência de Jacobsthal, a fim de compreender o seu processo histórico, evolutivo e matemático. Por outro lado, é possível estudar o conjunto dos números híbridos com o intuito de explorar o conhecimento desse novo conjunto.

A sequência de Jacobsthal é lembrada pela recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ com $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$ seus termos iniciais, na qual, gera os números (0,1,1,3,5,11,21,...), a sua equação característica é definida por $x^2 - x - 2 = 0$ com suas raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$ e podemos encontrar também a sua fórmula de Binet como $J_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}, n \geq 1$. Esta sequência recebe esse nome devido ao matemático Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números. E ainda, discutiremos sobre o conjunto dos números híbridos onde foram estudados três sistemas numéricos juntos, sejam eles: complexos, duais e hiperbólicos, estando combinados um com outro.

Tendo conhecimento dos dois conteúdos matemáticos que serão utilizados é possível apresentar a hibridização da sequência de Jacobsthal com o objetivo de compreender o processo de evolução matemático.

Embasamento dos conteúdos utilizados

Tomando da posição de apresentação dos pré-requisitos dos conteúdos estudados, nesta fase deve-se apresentar o contexto histórico da sequência de Jacobsthal, sua definição e informações sobre ela. E, posteriormente, informações sobre o conjunto dos números híbridos, tais como: definição, operações, propriedades e teoremas.

Esta sequência apresenta diversas aplicações, das quais, pode-se exemplificar a utilização desses números na área de computação em diretivas para alterar o fluxo de execução de um programa. Recebendo este nome como referência ao matemático, lembrado na Figura 1, Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números e ex-aluno de Ferdinand G. Frobenius, sendo um dos primeiros a estudar os polinômios de Fibonacci (Siegmund-Schultze, 2009). No trabalho de Alves (2017), o autor relata que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para Normandia e Suíça em 1939 e 1943.

Figura 1: Ernes Erich Jacobsthal

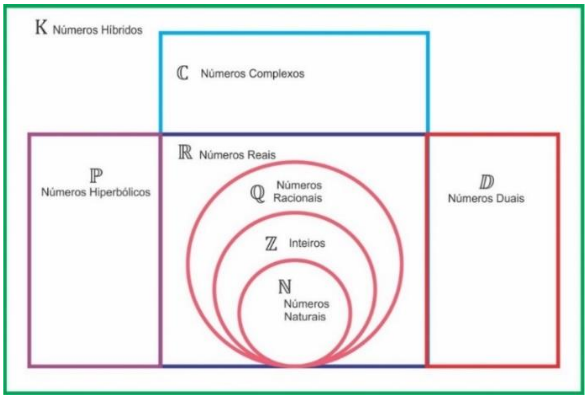
Fonte: Google Imagens.

Definição 1. Para, $n \geq 1$, a Sequência de Jacobsthal, denominada por J_n, é almejada pela fórmula de recorrência: $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, com $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$ seus termos iniciais.

Muitas são as propriedades matemáticas que estão sendo desenvolvidas sobre esta sequência, destacando a sua equação característica para este trabalho como sendo $x^2 - x - 2 = 0$, onde temos duas raízes reais sendo 2 e -1, em que a raiz igual a 2 representa também a relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência e, consequentemente, sua fórmula de Binet é dada por $J_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$. Esta sequência é considerada como uma particularidade da sequência de Lucas, sendo bastante utilizada para resolver problemas referentes ao conteúdo de análise combinatório.

O conjunto dos Números Híbridos foi definido por Özdemir (2018), denotado por K, onde foram estudados a combinação de três conjuntos numéricos, sejam eles: complexos, duais e hiperbólicos. E ainda, Carvalho (2019) apresenta uma representação geométrica bidimensional de tais números através de um *software*.

Figura 2: Diagrama dos conjuntos numéricos



Fonte: Elaborado pelos autores com base em Özdemir (2018).

Definição 2: O conjunto dos números híbridos, denotado por K, é dado por (Özdemir, 2018):

$$K = \{a + bi + c\varepsilon + dh; a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1\}$$

Este conjunto de números pode ser pensado como um conjunto com quatro elementos, onde o número real, complexo, dual e hiperbólico são definidos como:

$$1 \leftrightarrow (1,0,0,0), i \leftrightarrow (0,1,0,0), \varepsilon \leftrightarrow (0,0,1,0), h \leftrightarrow (0,0,0,1)$$

A partir da definição pode-se efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos, como: a igualdade entre dois números híbridos, soma, subtração, multiplicação por escalar, zero como elemento neutro dos números híbridos e o elemento inverso dos números híbridos ao realizar a inversão dos sinais.

O produto híbrido é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e substituindo cada produto de unidades pelas igualdades $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1$. Usando essas igualdades, pode-se encontrar o produto de quaisquer duas unidades híbridas.

Tabela 1: Tabela da multiplicação para K

$\times$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$h+i$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Fonte: Elaborado pelos autores.

E ainda, Özdemir (2018) define o conjugado do número híbrido, denotado por $\overline{z}$, como: $\overline{z} = a - bi - c\varepsilon - dh.$ O caráter desse número, denotado por $C(z)$, é dado por: $C(z) = z\overline{z} = \overline{z}z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$. A sua norma, denotada por $\|z\|$, é dada por: $\|z\| = \sqrt{|z\overline{z}|} = \sqrt{|C(z)|} = \sqrt{|a^2 + b^2 - 2bc - d^2|}$ e sua forma matricial é apresentada como: $\varphi_{(a+bi+c\varepsilon+dh)} = \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix}$.

Tendo conhecimento da sequência de Jacobsthal e do conjunto dos números híbridos pode-se apresentar a hibridização da sequência de Jacobsthal, na qual, pode-se ver que a hibridização de outras sequências vem sendo trabalhadas em outros artigos: Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Szynal-Liana (2018), Szynal-Liana e Wloch (2019).

Proposta de atividade

As propostas aqui sugeridas têm enfoque em explorar uma abordagem epistemológica dos números híbridos de Jacobsthal, destacando que pretende evidenciar a evolução matemática. Assim, o docente deve propor questões e conduzir as estratégias de soluções.

Dessa forma, partindo do embasamento dos conteúdos que serão utilizados, propõe-se as seguintes questões:

1. A partir da definição dos números híbridos e a sequência de Jacobsthal, apresente a definição o número híbrido de Jacobsthal e sua relação com a recorrência desta sequência.
2. Determine a recorrência para a sequência híbrida de Jacobsthal para os índices inteiros não positivos.
3. Tendo conhecimento de como se comporta algumas propriedades dos números híbridos, como: caráter, norma e forma matricial. Apresente tais informações para os números híbridos de Jacobsthal e a relação que existe entre eles.
4. Dada a equação característica da sequência e suas raízes, apresente a função baseado nesses dados, em que seja possível encontrar os termos dessa sequência sem utilizar a recorrência, função esta, conhecida como Fórmula de Binet.
5. Determine a função que permite encontrar os números da sequência sem ser necessário calcular todos os números que procedem, tal função é chamada de função geradora da sequência híbrida de Jacobsthal.

Atividade prevista e discussão

Nesta fase tem-se a intenção que os alunos explorarem os números híbridos de Jacobsthal. Vale salientar que esses números foram apresentados por Szynal-Liana e Wloch (2019), na qual, os autores definem os números de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas, apresentando propriedades e teoremas entre si. Diante disso, nesta seção será realizado uma exploração a mais sobre esses números, obtendo assim, os resultados solicitados na proposta de atividade.

Na primeira questão consiste em apresentar, por meio de intuição e operações matemáticas, as duas informações a seguir:

Definição 3: O número híbrido de Jacobsthal, denominado por HJ_n, é definido por (Szynal-Liana e Wloch, 2019):

$$HJ_n = J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}\varepsilon + J_{n+3}h$$

Sendo $HJ_0 = i + \varepsilon + 3h$ e $HJ_1 = 1 + i + 3\varepsilon + 5h$ as seguintes condições iniciais.

Propriedade 1: Os números híbridos de Jacobsthal satisfaz a recorrência $HJ_n = HJ_{n-1} + 2HJ_{n-2}, n \geq 2.$

Demontração:

$$\begin{aligned} HJ_{n-1} + 2HJ_{n-2} &= (J_{n-1} + J_n i + J_{n+1}\varepsilon + J_{n+2}h) + 2(J_{n-2} + J_{n-1}i + J_n\varepsilon + J_{n+1}h) \\ &= (J_{n-1} + 2J_{n-2}) + (J_n + 2J_{n-1})i + (J_{n+1} + 2J_n)\varepsilon + (J_{n+2} + 2J_{n+1})h \\ &= J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}\varepsilon + J_{n+3}h \\ &= HJ_n \end{aligned}$$

□

Na segunda questão, os alunos podem perceber que, ao utilizar a recorrência vista anteriormente trocando a sua condição para $n < 2$ encontra-se os termos negativos da sequência híbrida de Jacobsthal. Podendo assim, formalizar uma nova recorrência.

Definição 4: Para índices inteiros não positivos, a recorrência dos números híbridos de Jacobsthal é definida como:

$$HJ_{-n} = \frac{HJ_{-n+2} + HJ_{-n+1}}{2}, n \geq 1$$

Sendo $HJ_{-1} = \frac{1}{2} + \varepsilon + h$ e $HJ_{-2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i + h$ seus termos iniciais.

Na terceira questão, tem-se o conhecimento do caráter e da norma de um número híbrido e ao conhecer a definição do número híbrido de Jacobstal pode-se realizar substituições e operações matemáticas a fim de encontrar a resposta solicitada.

Propriedade 2: O caráter do número híbrido de Jacobsthal, denominada por $C(HJ_n)$, é dada por (Szynal-Liana e Wloch, 2019):

$$C(HJ_n) = -3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}$$

Demonstração:

$$C(HJ_n) = J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}J_{n+2} - J_{n+3}^2$$

$$= J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}(J_{n+1} + 2J_n) - (J_{n+2} + 2J_{n+1})^2$$

$$= J_n^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n - J_{n+2}^2 - 4J_{n+1}J_{n+2} - 4J_{n+1}^2$$

$$= J_n^2 - 5J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n - (J_{n+1} + 2J_n)^2 - 4J_{n+1}(J_{n+1} + 2J_n)$$

$$= J_n^2 - 5J_{n+1}^2 - 4J_{n+1}J_n - J_{n+1}^2 - 4J_nJ_{n+1} - 4J_n^2 - 4J_{n+1}^2 - 8J_nJ_{n+1}$$

$$= -3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}$$

□

Propriedade 3: A norma de um número híbrido de Jacobsthal, denominado por $\|HJ_n\|$, é:

$$\|HJ_n\|^2 = \left|-3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}\right|$$

Demonstração:

$$\|HJ_n\| = \sqrt{|C(HJ_n)|}$$

$$\|HJ_n\| = \sqrt{\left|-3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}\right|}$$

$$\|HJ_n\|^2 = \left|-3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}\right|$$

□

Além disso, os números híbridos de Jacobsthal podem ser representados de forma matricial, a partir de uma matriz $2x2$.

Propriedade 4: A matriz do número híbrido de Jacobsthal, denomindada por φ_{HJ_n}, com $n \in \mathbb{N}$, é da forma:

$$\varphi_{HJ_n} = \begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 3J_{n+1} + 4J_n & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix}$$

Demosntração:

Özdemir (2018) define a matriz de um número híbrido como:

$$\varphi_{(a+bi+c\varepsilon+dh)} = \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix}$$

Fazendo as devidas substituições para os números híbridos de Jacobsthal, tem-se:

$$\varphi_{(HJ_n)} = \begin{bmatrix} J_n + J_{n+2} & J_{n+1} - J_{n+2} + J_{n+3} \\ J_{n+2} - J_{n+1} + J_{n+3} & J_n - J_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_n + J_{n+1} + 2J_n & J_{n+1} - J_{n+2} + J_{n+2} + 2J_{n+1} \\ J_{n+2} - J_{n+1} + J_{n+2} + 2J_{n+1} & J_n - J_{n+1} - 2J_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 2J_{n+1} + 4J_n + J_{n+1} & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 3J_{n+1} + 4J_n & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix}$$

$\square$

Propriedade 5: Se φ_{HJ_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Jacobsthal, então $\|HJ_n\|^2 = \det(\varphi_{HJ_n})$.

Demonstração:

$$\det(\varphi_{HJ_n}) = \det\begin{bmatrix} 3J_n + J_{n+1} & 3J_{n+1} \\ 3J_{n+1} + 4J_n & -J_n - J_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\det(\varphi_{HJ_n}) = \left|(3J_n + J_{n+1})(-J_n - J_{n+1}) - 3J_{n+1}(3J_{n+1} + 4J_n)\right|$$

$$= \left|-3J_n^2 - 3J_nJ_{n+1} - J_nJ_{n+1} - J_{n+1}^2 - 9J_{n+1}^2 - 12J_nJ_{n+1}\right|$$

$$= \left|-3J_n^2 - 10J_{n+1}^2 - 16J_nJ_{n+1}\right|$$

$$\|HJ_n\|^2$$

$\square$

Para a quarta questão é necessária a equação característica dos números híbridos de Jacobsthal. Com isso, de acordo com as relações de recorrência, $HJ_n = HJ_{n-1} + 2HJ_{n-2}, n \geq 2,$ pode-se obter essa equação característica da seguinte forma: $\dfrac{HJ_n}{HJ_{n-1}} = 1 + 2\dfrac{HJ_{n-2}}{HJ_{n-1}}.$ Logo,

$\frac{HJ_n}{HJ_{n-1}} = 1 + \frac{2}{\frac{HJ_{n-1}}{HJ_{n-2}}}$. Supondo que o limite proposto existe e que seja igual a x, fazendo o n tender nesta última expressão e notando que necessariamente $\frac{HJ_n}{HJ_{n-1}} \to x$ e $\frac{HJ_{n-1}}{HJ_{n-2}} \to x$ tem-se $x = 1 + \frac{2}{x}$ ou $x^2 - x - 2 = 0$. Assim, determinando a equação característica do número híbrido de Jacobsthal, na qual, é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$. Com isso, tem-se a informação necessária para solucionar a quarta questão mais conhecida como a fórmula de Binet, na qual, foi descoberto por Abraham de Moivre (1667-1764), porém tal investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856). Essa fórmula explícita realiza o cálculo do *n*-ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência, onde é necessário utilizar as raízes da equação característica desta sequência.

Teorema 1: A fórmula de Binet para o número híbrido de Jacobsthal, denominado por, é dado por:

$$HJ_n = \frac{HJ_0 + HJ_1}{3} x_1^n + \frac{2HJ_0 + HJ_1}{2} x_2^n, n \geq 0$$

Demonstração:

Utilizando a fórmula de Binet $HJ_n = Ax_1^n + Bx_2^n, n \geq 0$, tem-se:

$$\begin{cases} A + B = HJ_0 \\ Ax_1 + Bx_2 = HJ_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, encontra-se os coeficientes:

$$A = \frac{HJ_0 + HJ_1}{3} \text{ e } B = \frac{2HJ_0 + HJ_1}{3}$$

Fazendo as devidas substituições é obtido a fórmula de Binet para os números híbridos de Jacobsthal.

$$HJ_n = \frac{HJ_0 + HJ_1}{3} x_1^n + \frac{2HJ_0 + HJ_1}{2} x_2^n, n \geq 0$$

□

Por fim, para encontrar a função geradora para os números híbridos de Jacobsthal são necessárias manipulações algébricas devido a relação de recorrência.

Teorema 2: A função geradora para os números híbridas de Jacobsthal, denotado por $G_{HJ_n}(t)$, é dada por (Szynal-Liana e Wloch, 2019):

$$G_{HJ_n}(t) = \frac{HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)t}{1 - t - 2t^2}$$

Demonstração:

Para definir a função geradora do número híbrido de Jacobsthal vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HJ_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HJ_n t^n$$

Fazendo manipulações algébricas, tem-se:

$$G_{HJ_n}(t) = HJ_0 + HJ_1 t + HJ_2 t^2 + HJ_3 t^3 + \ldots + HJ_n t^n$$

$$tG_{HJ_n}(t) = HJ_0 t + HJ_1 t^2 + HJ_2 t^3 + HJ_3 t^4 + \ldots + HJ_n t^{n+1}$$

$$2t^2 G_{HJ_n}(t) = 2HJ_0 t^2 + 2HJ_1 t^3 + 2HJ_2 t^4 + 2HJ_3 t^5 + \ldots + 2HJ_n t^{n+2}$$

Subtraindo cada membro dos termos acima, tem-se:

$$(1 - t - 2t^2) G_{HJ_n}(t) = HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)t + (HJ_2 - HJ_1 - HJ_0)t^2 + \ldots$$

$$G_{HJ_n}(t) = \frac{HJ_0 + (HJ_1 - HJ_0)t}{1 - t - 2t^2}$$

$\square$

Vale salientar que, para os Teoremas 1 e 2, são necessários validar as respostas encontradas, assim espera-se que os alunos assumam o método de indução matemática com o intuito de provar que o resultado obtido é valido para

Conclusão

Esta sugestão de aula descreveu a definição e propriedades da Sequência Híbrida de Jacobsthal, além do contexto histórico, função geradora, fórmula de Binet, relação de recorrência, sua representação matricial e extensão para os índices inteiros não positivos. Essas novas propriedades foram descobertas a partir do que já se é conhecido da sequência de Jacobsthal, trabalhado juntamente com a definição e propriedades dos Números Híbridos, que até então não foi produzido muita coisa referente ao conteúdo apresentado, e para chegar aos resultados obtidos foi utilizado provas matemáticas e raciocínio lógico.

A partir desse trabalho sobre os Números Híbridos de Jacobsthal, pode-se aprofundar nesse estudo em trabalhos futuros encontrando novas definições e propriedades, como: a identidade Catalan criado pelo matemático belga Eugène Charles Catalan (1814 – 1894), identidade de Cassini descoberta em 1680 pelo matemático Giovani Domenico Cassini (1625 – 1712) e, em 1753, estudada pelo matemático Robert Simson (1687 – 1768) e identidade de d’Ocagne que é uma generalização, que foi realizado pelo matemático Philbert Maurice d'Ocagne (1862 – 1938).

Referências

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori, **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 51, p. 83-106. 2017.

CARVALHO, C. **Números híbridos e sua visualização no geogebra.** 103f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciência e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.

CATARINO, P. On k-pell hybrid numbers. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography**, v.22, n.1, p. 83-89, 2019.

CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. **ArXiv:1806.02231v1 [math.RA]**, 2018.

CRAVEIRO, I. M. **Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal.** 117 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2004.

ÖZDEMIR, M. Introducion to hybrid numbers. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v.28, n.1, art.11, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s00006-018-0833-3. Disponível em: link de acesso. Acesso em: 03 mar. 2020

SIEGMUND-SCHULTZE, R. Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact. Princenton: Princenton University, 2009.

SZYNAL-LIANA, A. The Horadam hybrid numbers. **Discussiones Mathematicae**-General Algebra and Applications, Sciendo, v. 38, n. 1, p. 91-98, 2018.

SZYNAL-LIANA, A.; WŁOCH, I. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. **Annales Mathematicae Silesianae**, v. 33, n. 1, p. 276-283, 2019.