 http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2022.020

Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Instituto Federal do Espírito Santo
alicevfs@gmail.com

Resumo
Fração é um conteúdo multifacetado e com aplicações em diferentes áreas da Ciência. Pesquisas indicam que a compreensão de frações restrita à alguma(s) interpretação(ções) compromete a ampla construção conceitual e o desempenho da Álgebra e da Matemática futura. Independentemente da interpretação, existem traços centrais que as integram, como a identificação da unidade de medida. A capilaridade das frações e a relevância da unidade nos levou a investigar de modo qualitativo e interpretativo o conceito e como (e se) a unidade apoia tarefas com números fracionários. Para isso, professores, pedagogos e gestores educacionais brasileiros responderam cinco itens sobre o conceito de fração e tarefas que requeriam a compreensão de unidade. O conceito dos participantes esteve restrito à parte-todo ou quociente. Ademais, demonstraram carência de identificação da unidade nas tarefas. As lacunas conceituais e a carência de compreensão da unidade reforçam resultados de investigações e a urgência em formações que revertam esse cenário.

Palavras-chave: Fração. Conceito. Unidade de medida. Formação de professores.

Fraction: concept and application of the unit of measurement by in-service and pre-service Brazilian teachers

Abstract
Fraction is a multifaceted content with applications in different areas of Science. Research indicates that the understanding of fractions restricted to some interpretation compromises the broad conceptual construction and the performance of Algebra and future Mathematics. Regardless interpretation, there are central features that integrate them, such as the recognition of unity. The capillarity of fractions and the importance of the unit of measurement led us to investigate in a qualitative and interpretative way the concept of fraction and how (or if) the unit support task with fractional numbers. For this, teachers with different degrees, pedagogues and educational managers answered five items about the concept of fraction and tasks that required the understanding of units. The participants' concept was restricted to part-whole or quotient. In addition, they demonstrated lack of identification of the unit in the tasks. The conceptual gaps and the lack of understanding of the unit reinforce the results of investigations and the urgency in vocational training that reverses this scenario.

Keywords: Fraction. Concept. Unit of measurement. Teachers training.

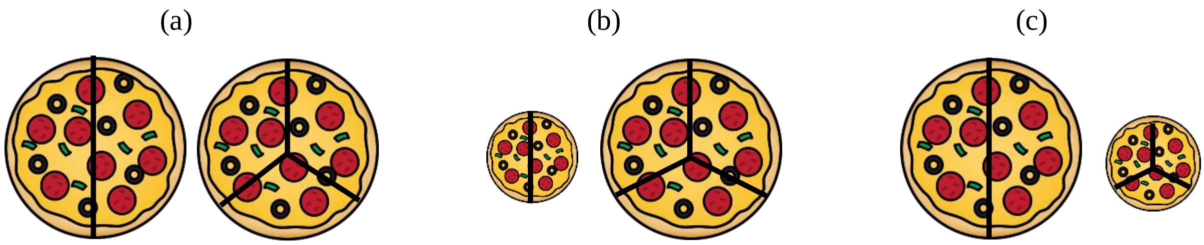
Introdução

Fração é um tópico nuclear da Matemática cujos primeiros contatos ocorrem para alunos de anos iniciais do ensino fundamental, compondo outros conceitos matemáticos e não matemáticos que se estendem ao longo de toda a escolaridade básica. Essa abrangência, ao lado da constatação da pouca apreensão conceitual por alunos (e.g., BAILEY et al., 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; MACK, 1995; NI, 2001; NI; ZHOU, 2005; SIEGLER et al., 2012) e professores de diferentes países (BALL, 1990; MA, 1999; NI, 2001; YOSHIDA; SAWANO, 2002; NEWTON, 2008; LIN et al., 2013), levou - e ainda leva - pesquisadores da Educação Matemática, da Psicologia Cognitiva e da Neurociência a debruçarem-se sobre os desafios e impactos de seu ensino (e.g., SIEGLER et al., 2012; VAN HOOF et al., 2018; POWELL; NELSON, 2021). O principal motivo é que dominar conceitos e operações relativas ao tema é base do pensamento algébrico e está diretamente relacionado com o desenvolvimento da Álgebra e da Matemática futura (e.g., SIEGLER et al., 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; NATIONAL MATHEMATICS ADVISORY PANEL [NMAP], 2008; POWELL 2018b).

Trata-se de conteúdo matemático multifacetado e com aplicações em diferentes áreas da ciência (e.g., Economia, Engenharias, Química, Geografia, Estatística, etc), cuja capilaridade traz ao primeiro plano a relevância de sua compreensão com amplitude e profundidade nas diferentes interpretações, de modo integrado e articulado - parte-todo, quociente, razão, operador, medida e medição (KIEREN, 1976; BEHR et al., 1983; POWELL, 2019a, 2019b). Sendo assim, cresce a preocupação com a formação de professores - de todas as áreas - pois lacunas nessa compreensão podem ser determinantes para a formação matemática e aplicação por todos de que dela necessitem, independente do âmbito.

Todas as interpretações possuem características contextuais próprias que lhes dão significado e todas estão apoiadas na concepção do que seja e do que não seja fração. Apesar dessa diversidade e, para além do conceito de fração, há traços centrais e comuns a todas as interpretações que devem ser consideradas em tarefas que envolvem números fracionários. Uma delas é a compreensão da ideia de unidade. A ausência de conhecimento da unidade como um referencial para contextos de números fracionários e suas representações pode levar a equívocos como a situação proposta por um professor para alunos da escola básica: "Marcos comeu 1/3 de pizza e Carlos comeu 1/2. Quem comeu mais pizza?". A intenção do professor era de levar os alunos à comparação entre 1/3 e 1/2. Alguns alunos responderam 1/3 baseados no fato de 3 ser maior do que 2. Esse tipo de engano é muito comum e revelado em diferentes investigações (e.g., VAN HOOF et al., 2020; POWELL; NELSON, 2021) quando alunos aplicam equivocadamente propriedades dos números naturais aos racionais. Outros responderam 1/2 por entenderem que metade da pizza é mais do que um terço. Será sempre assim? A comparação das magnitudes depende da análise da unidade (Figura 1).

Figura 1: Comparação de duas frações pelas magnitudes de suas unidades de medida



Fonte: autora.

A Figura 1a apresenta duas pizzas de mesma magnitude, logo, a comparação informa que Carlos comeu mais pizza. As Figuras 1b e 1c descrevem unidades diferentes para as pizzas. Logo, na Figura 1b Marcos comeu mais pizza, e na situação da Figura 1c, Carlos comeu mais pizza. Assim, as respostas seriam diversas a depender da unidade. Mas, será que a intenção do professor seria estimular o raciocínio pela busca da unidade como referência para que seus alunos respondessem corretamente? Ou o professor, tal como os alunos, não havia pensado nas situações das Figuras 1b e 1c? Terá sido um caso de (des)conhecimento especializado de fração - conhecimento aprofundado do conteúdo que instrumentaliza o professor conhecer o conceito para além dos procedimentos, e(ou) (des)conhecimento de seu ensino - conhecimento relativo aos cuidados e melhores meios de ensinar -, na concepção de Ball, Thames e Phelps (2008)?

Nesse sentido, considerando a importância do substrato conceitual de fração e a unidade como uma referência inicial e fundamental para análises de situações que envolvam números fracionários, importa conhecer qual conceito de fração e como (e se) é utilizada a unidade para apoiar análise de tarefas com números fracionários ou suas representações. Tratamos aqui dos pontos de vista expressos por 121 participantes - professores, pedagogos e gestores educacionais - em um *workshop* sobre números racionais.

Frações: literatura relevante e apoio teórico

O conteúdo de frações possui significados e nomenclaturas diferenciadas por pesquisadores da Educação Matemática. Por exemplo, Campos et al. (2006) não parecem incorporar a compreensão de unidade à interpretação de medida. A despeito dessas diferenças, grande parte da comunidade científica da Educação Matemática parece concordar com Kieren (1976) e Behr et al. (1983) ao identificarem cinco interpretações para o conteúdo de frações - parte-todo, quociente, razão, operador e medida - baseadas na noção de partição de uma grandeza (Tabela 1).

Sem negar essa existência e seus valores pedagógicos, Powell (2018a, 2019a) apresenta uma sexta noção com base na história da Matemática de Aleksandrov (1963) e Caraça (1951) - a de medição. Para esses pesquisadores, "uma fração é [..] uma comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade" (SOUZA; POWELL, 2021, p. 84). Essa sexta noção destaca que o numerador a de uma fração a/b representa a medida de uma das grandezas pela unidade e, o denominador b, por sua vez, a medida da outra. Nessa perspectiva, a fração 1/3 deve ser entendida como uma relação multiplicativa entre grandezas: a magnitude "1" do numerador é a de um terço do denominador. O denominador é entendido como unidade para medir o numerador e 1/3 é a relação de 1 medido por 3 (CARAÇA, 1951; VIZCARRA; SALLÁN, 2005; POWELL, 2018b). Essa sexta noção e as cinco descritas por Kieren (1976), Behr et al. (1983) e Behr et al. (1992) serão assumidas neste trabalho, cujas exemplificações constam na Tabela 1.

Tabela 1: Seis interpretações para a fração 1/3

Interpretações	**Significados**	**Exemplos para a fração 1/3**
Parte-todo	Relação entre a quantidade de partes e o total de partes.	1 de 3 partes iguais; 1 professora para cada 3 professores.
Quociente	Divisão de um número natural a por outro b, sendo $b \neq 0$).	1 dividido por 3.
Razão	Índice comparativo entre duas quantidades de mesma grandeza.	1 de alguma coisa comparada a 3 de outra coisa, em um senso multiplicativo.
Operador	Parte que atua sobre um todo e o modifica.	1/3 de uma quantidade que seja a unidade.
Medida	Iterações da fração unitária.	O comprimento de 1/3 em uma reta.
Medição	Comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade.	O comprimento de uma quantidade é 1/3 do comprimento da outra.

Fonte: autora.

No caso brasileiro, quatro dessas interpretações constam na Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Parte-todo e quociente, que devem ser desenvolvidos no 6º ano do Ensino Fundamental e, razão e operador no 7º ano desse mesmo nível escolar (BRASIL, 2017). Não há, no entanto, menção à medida e à medição, nos significados que mencionamos anteriormente. E quanto a isso, pesquisas indicam que o ensino e aprendizagem de frações limitados à alguma(s) interpretação(ções) compromete a ampla compreensão conceitual e molda negativamente o desempenho da Álgebra e da Matemática geral (HAMDAN; GUNDERSON, 2017; SIEGLER et al., 2012). Isso porque todas essas ideias possuem particularidades que contribuem, em seu conjunto, para a formação do conceito de modo amplo. Ainda assim, em especial, a interpretação de medição, por ser fonte ontológica para a conceituação de fração, tem se mostrado eficaz (DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991) tanto para a construção inicial do conceito, quanto para subsidiar a conexão com as outras interpretações.

Não se trata de a noção de medição ser melhor ou mais importante do que as outras (Lamon, 2007; Watanabe, 2006), mas é o caso de se considerar que traz a base para compreensão sobre (1) a magnitude das frações, (2) a necessidade de definição de uma unidade, (3) a consideração da igualdade e equivalência entre as quantidades, (4) o discernimento do número natural e propriedades do número fracionário, e (5) a condição da fração como número. Essas cinco compreensões não são encontradas na interpretação parte-todo das frações, mas estão presentes no trabalho com a reta numérica. Hamdan e Gunderson (2017) constataram que o ensino de frações com reta numérica levava os alunos a realizar tarefas de comparação de magnitude não ensinadas anteriormente, enquanto outros alunos submetidos ao ensino de frações com modelos de área não conseguiam realizar as mesmas tarefas. Nesse sentido, a reta numérica como uma das expressões de medição pode se constituir como uma representação competente para a extensão e aprofundamento da conceituação de fração, uma vez que contém propriedades intrínsecas que podem apoiar a compreensão da magnitude, e isso inclui a compreensão de unidade.

Sob outra perspectiva, Vizcarra (2004) e Scheffer e Powell (2019, 2020) creem que a concepção de fração restrita à parte-todo e com abordagens predominantemente procedimentais em livros didáticos de alguns países, inclusive os brasileiros, se justificaria por franquear aos alunos uma introdução rápida ao conteúdo de frações. Talvez essa opção não seja a mais indicada, a exemplo de resultados investigativos (KERSLAKE, 1986; MACK, 1993, 1995; TZUR, 1999; NI, 2001; NI; ZHOU, 2005; THOMPSON; OPFER, 2008; SIEGLER et al., 2012; POWELL, 2019a, 2019b, VENENCIANO; YAGI; ZENIGAMI, 2021) que mostram prejuízos para a compreensão de frações impróprias - frações maiores que a unidade de medida. Nesse tema, alunos não compreendem que a quantidade de partes divididas possa ser maior do que a quantidade total de partes (BROUSSEAU, 1983). Esses alunos parecem aplicar propriedades de números naturais aos números fracionários e desprezam a relação entre numerador e denominador, vínculo que deveria ser a base de toda compreensão de frações. Cresce a certeza da limitação conceitual dos alunos quando circunscritos à uma e (ou) outra interpretação, quando declaram 2/7 como resultado da soma das frações 1/3 + 1/4, ou seja, numeradores e denominadores são somados indiscriminadamente, por não conceberem 1/3 e 1/4 como números (NI; ZHOU, 2005; MALONE; FUCHS, 2017; POWELL; NELSON, 2021).

Em suma, a literatura parece apoiar que o conceito de fração de modo amplo e que subsidie toda e qualquer compreensão e tarefa que envolva números fracionários deve ter em conta tratar-se de uma relação multiplicativa entre duas magnitudes medidas pela mesma unidade. Daí a importância do reconhecimento da unidade a amparar respostas que envolvam números fracionários.

Metodologia

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (ERICKSON, 1986), foi levada a efeito com 121 participantes: 75 pedagogos e professores de disciplinas não matemáticas, 28 professores de matemática e 18 profissionais que não estavam lecionando no momento da coleta de dados por estarem em cargos de gestão ou afastados em cursos de formação, todos atuantes no ensino básico. A amostra não foi estratificada por atuação em ensino infantil ou ensino fundamental - séries iniciais ou finais - por entendermos que todos, de algum modo ou em algum momento de suas profissões, ou mesmo de suas vidas cotidianas, tiveram ou terão oportunidade de orientar alguém ou aplicar o que sabem sobre frações. Por essa razão, não apenas professores de Matemática, mas igualmente de outras áreas de ensino ou que ocupem outras funções na Educação devam ter o conceito desenvolvido de modo amplo e profundo. Até porque, os 121 participantes usufruíram de mais de 11 anos de escolaridade básica e, portanto, o contato com o conceito e aplicações de frações foram inevitáveis.

A coleta de dados ocorreu em meio a um *workshop* internacional que versava sobre alinhamento de pesquisa em educação matemática e neurocientífica para compreender a cognição de números racionais. Esse evento fez parte de um projeto investigativo maior sobre números racionais, desenvolvido pelo Instituto Federal do Espírito Santo – ES – Brasil em parceria com a Rutgers University – Newark – USA, com apoio financeiro destas instituições, da Rutgers Global e da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES). O evento a distância ocorreu em março de 2021, com duração de três horas e contou com cinco palestrantes: dois estadunidenses, um mexicano e duas brasileiras - uma das quais é autora deste trabalho.

Apesar de o *workshop* ter sido oferecido para quaisquer interessados no tema, ele esteve voltado para uma agenda de formação de profissionais da Educação - brasileiros e estadunidenses - professores, pedagogos e gestores a ser implementado nesses dois países em momentos diferentes. Pelo lado brasileiro, a agenda esteve direcionada, principalmente, para profissionais de municípios do Espírito Santo, mas contou com a participação de pessoas de outras localidades brasileiras. Para que esses profissionais fossem habilitados à participação no evento, era-lhes exigido que respondessem a um instrumento com 24 itens, sendo cinco sobre o conceito de fração ou tarefas que requeriam a compreensão de unidade com números ou representações fracionárias, cujos resultados e análises inauguram a próxima seção.

Resultados e análises

O instrumento contou com um questionamento sobre o conceito de fração e quatro tarefas envolvendo a compreensão de unidade de números fracionários. O **primeiro questionamento** visou conhecer a concepção de fração por meio da pergunta: "O que você responderia se alguém perguntasse para você: O que é fração?". Todos os participantes responderam com base em alguma interpretação particular ou de modo genérico - número racional, porcentagem etc. Metade dos participantes (60/121) respondeu com base em parte-todo e, praticamente, a outra metade (58/121) particularizou suas respostas em outras duas interpretações - quociente e razão (Tabela 2).

Tabela 2: Conceito de fração da amostra de 121 profissionais da Educação

Concepções	Qtde.	Algumas respostas
Parte de um todo	60	"Parte ou partes de um todo"
Quociente, divisão	56	"Fração é um quociente entre grandezas (diferentes ou iguais)"
Razão	2	"É uma razão entre duas grandezas"
Outros (número racional, %, probabilidade, número)	3	"É um número racional"

Fonte: autora.

Esse resultado está em sintonia com o que as investigações de Hamdan e Gunderson (2017) e Siegler et al. (2012), por exemplo, sobre a particularização e limitação do conceito em alguma interpretação de fração, compromete a ampla compreensão e, provavelmente, a perpetuação do ensino de modo restrito. O **segundo item** reproduziu - com algumas adaptações - a situação proposta por um professor do ensino básico brasileiro alhures. "Foi oferecido a Marcos escolher entre 1/3 de pizza ou 1/2 de pizza. Como ele está com fome e gosta de pizzas, ele escolheu 1/2. Seu amigo Carlos pegou 1/3 de uma pizza e acabou comendo mais pizza do que Marcos. Como pode ser isso? Como você explicaria para uma pessoa ou aluno sua resposta? Dos 121 participantes, 46 responderam com base no diâmetro das pizzas, ou seja, consideraram a unidade de medida para a análise do problema. As outras respostas foram equivocadas, sem sentido, ou os participantes confessaram não saber responder (Tabela 3).

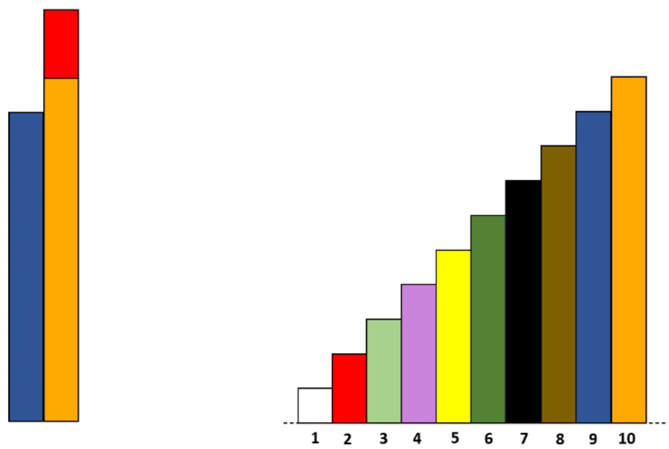
Tabela 3: A unidade de medida como referencial para as respostas

Categorias de respostas	Qtde.	Algumas respostas
Respostas apoiadas na diferença de diâmetros	46	"Que havia duas pizzas de tamanhos diferentes"
Respostas equivocadas ou sem sentido	55	"Existia uma pizza de 6 pedaços, um comeu 3 e outro 2."
Não souberam responder	20	"Não estou entendendo.... pois eu acho que 1/2 é uma quantidade maior"

Fonte: autora.

O **terceiro item**, de modo reverso, informava a unidade de medida para a análise da situação apresentada: "Assuma a unidade como sendo o comprimento de uma barra laranja mais uma barra vermelha. A barra azul representa $\frac{9}{12}$ em relação à unidade. Como você explicaria para uma pessoa o fato de $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, somente com uso das barras?" Após o texto da situação, a Figura 2 foi apresentada.

Figura 2: Relação multiplicativa expressa por meio das magnitudes de barras



Fonte: autora.

Pouco mais de um quinto dos participantes respondeu com base nas magnitudes das barras e considerou a unidade de medida como parâmetro para a equivalência das frações 9/12 e 3/4, levando em conta, portanto, a unidade de medida. Os outros quatro quintos não souberam explicar, ou se basearam em aspectos procedimentais (VAN HOOF et al., 2018; POWELL; NELSON, 2021) ao apresentarem cálculos aritméticos, mas desligados de justificativas conceituais.

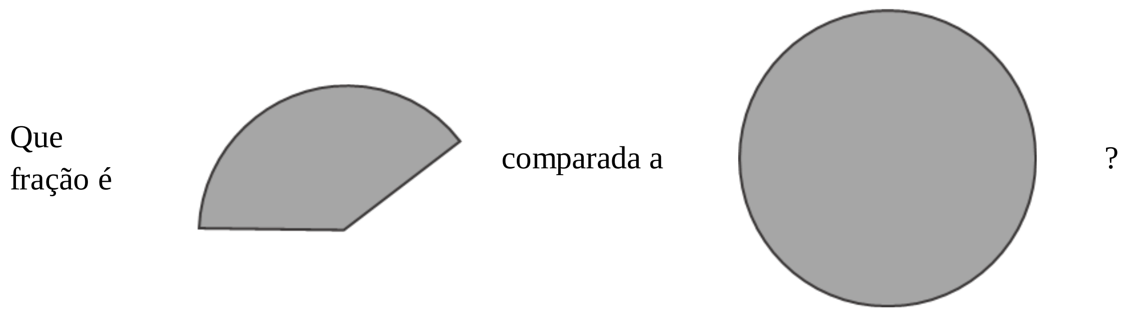
Tabela 4: Relação multiplicativa entre numerador e denominador

Categorias de respostas	Qtde.	Algumas respostas
Respostas apoiadas na proporção das medidas relativas a cada fração usando a ideia de unidade.	26	"A barra verde clara representa 3/4 da barra lilás se considerarmos a barra branca como uma unidade. E podemos observar que a barra verde clara cabe três vezes dentro da barra azul"
Respostas equivocadas, sem sentido ou justificadas pelo cálculo da equivalência das frações.	60	"Simplificando as frações"
Não souberam responder	35	"Não saberia explicar"

Fonte: autora.

O **quarto item** investigou a compreensão de fração tendo um círculo como unidade de medida (Figura 3). Vale destacar que o círculo é uma representação tradicional de fração em livros didáticos brasileiros e, portanto, acreditamos ser um contexto familiar para os participantes (SCHEFFER; POWELL, 2019, 2020). Mesmo assim, apenas 9 dos 121 participantes responderam corretamente: 3/8.

Figura 3: Número fracionário para a representação de parte de um círculo



Fonte: autora.

Outros 112 participantes informaram outras frações ou confessaram não saber responder (Tabela 5).

Tabela 5: Respostas declaradas para o número fracionário de parte do círculo

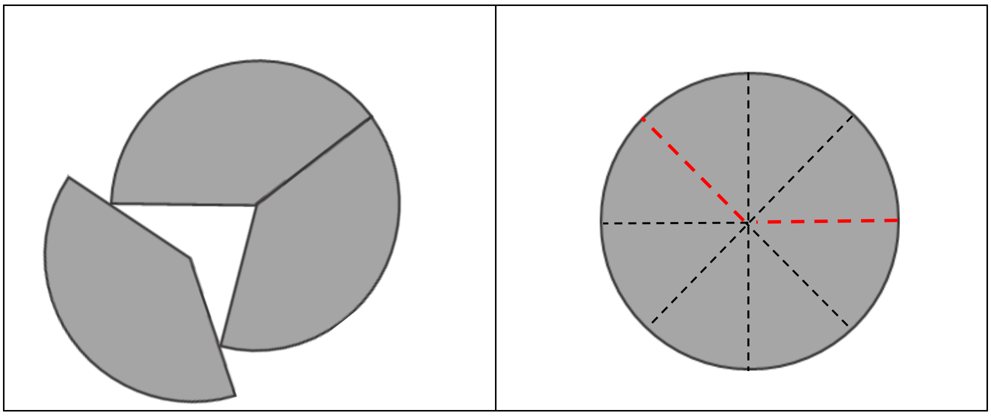
Categorias de respostas	Qtde.
1/2	4
3/8	9
1/3	41
Outras frações	53
Não souberam responder	14

Fonte: autora.

É possível, no entanto, que 41 dos 121 participantes tenha se deixado levar pela atmosfera de 1/3 em uma equivocada comparação visual da parte do círculo com todo (Figura 4a), enquanto o correto teria sido a comparação em oito partes (Figura 4b).

Figura 4: (a) Reprodução de 3 partes do círculo; (b) Reprodução de 8 partes do círculo

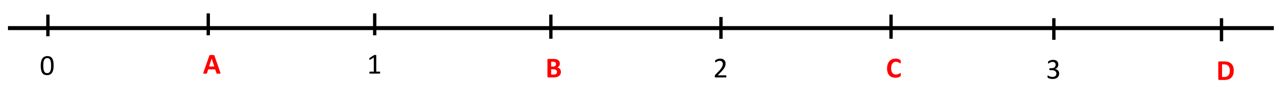
(a) (b)



Fonte: autora.

O **quinto e último item** perguntava: "Qual a localização de 3/2 na reta abaixo?" e solicitava uma justificativa para uma das 6 opções eleita: A, B, C, D, nenhuma das posições ou em qualquer uma das posições (Figura 5). Apenas um participante respondeu "em qualquer uma das posições" e justificou corretamente com base na unidade (Tabela 6). Ele acertadamente disse: "Se considerarmos o número 1 como inteiro [como unidade], ele [3/2] está na posição B. Se considerar o 2 como inteiro [como unidade], ele [3/2] estará em 3".

Figura 5: Quatro diferentes localizações na reta numérica e seis opções de respostas



(   ) A
(   ) B
(   ) C
(   ) D
(   ) nenhuma das posições
(   ) em qualquer uma das posições

Fonte: autora.

Os outros 120 participantes responderam de modo diverso. Quatro deles tentaram "ler" a fração 3/2 como sendo "a terça parte da metade". Atribuindo a expressão "terça parte" ao numerador "3" e "metade" ao denominador "2". Essa resposta reforça a ideia de que esses participantes não compreendem frações impróprias e desconsideraram a unidade para apoiar suas respostas (e.g., VAN

HOOF et al, 2020). Outros transformaram 3/2 em números decimais para declararem a posição B. Novamente, ignoram a relação multiplicativa das magnitudes do numerador e do denominador medidas pela mesma unidade (ALEKSANDROV, 1963; CARAÇA, 1951; POWELL, 2019a; SOUZA; POWELL, 2021). Outros 7 participantes parecem ter "convertido" a fração 3/2 em 3,5 ao afirmarem ""três partes e meia" e "um inteiro e meio".

Tabela 6: Justificativas para as seis opções de respostas para a localização da fração 3/2 na reta

Categorias de respostas	Qtde.	Algumas justificativas
A	4	"é a terça parte da metade"; "porque temos a metade".
B	61	"3/2=1,5"; "terceira parte da reta"; "porque está na metade".
C	27	"porque está entre os pontos da divisão".
D	7	"três partes e meia"; "um inteiro e meio".
nenhuma das posições	16	"a principal justificativa foi pq o numerador era maior que o denominador, então deveriam pegar outra reta para complementar a representação".
em qualquer uma das posições	5	"Não sei explicar".
em qualquer uma das posições	1	"Se considerarmos o número 1 como inteiro, ele está na posição B. Se considerar o 2 como inteiro, ele estará em 3".

Fonte: autora.

Por fim, a constatação de um único participante ter respondido corretamente à quinta tarefa nos levou a investigar se teria sido ele (ou ela) a responder corretamente às outras três. Esse participante respondeu equivocadamente ter sido Carlos a comer mais pizza no segundo item e, 1/3 como fração de parte do círculo no quarto item. A extensão dessa investigação nos permitiu registrar que os outros 120 participantes ignoraram a unidade em duas ou mais das quatro situações propostas, além de demonstrarem reduzido domínio do conceito de fração. Este estudo parece indicar necessidade de ampliar o conhecimento pedagógico e de conteúdo dos professores (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) sobre frações.

Conclusões e indicações de continuidade

O reconhecimento da importância do conteúdo de frações para a matemática geral pela comunidade científica da Educação Matemática, Psicologia Cognitiva e Neurociência nos leva a crer na necessidade de mais investigações sobre como é concebido esse conceito e como vem sendo usadas noções básicas - como o reconhecimento da unidade de medida - que deveriam apoiar análises que envolvam números e representações fracionárias. Por isso, o objetivo de nossa investigação foi o de conhecer o conceito de fração e como (e se) é utilizada a unidade de medida para apoiar análise de tarefas com números fracionários ou suas representações de profissionais da Educação em um *workshop* sobre números racionais.

A amostra contou com 121 participantes que atuam de algum modo no ensino básico e que frequentaram mais de 11 anos de escolaridade básica. Os resultados com os 121 participantes nos mostra existência de lacunas a serem preenchidas tanto para o conceito quanto para a noção básica do que seja a unidade de medida para a análise de situações que envolvam números fracionários. A interpretação de fração como parte-todo e quociente, isoladamente, foram as compreensões dominantes. Esse reducionismo não atenderia ao conceito de modo amplo pois, conforme discutido à luz do referencial teórico, é ilusório considerar uma única ou melhor interpretação (LAMON, 2007; WATANABE, 2006). É indicado, portanto, explorar a desenvoltura mental em conectar as diferentes interpretações de frações para alcançar a compreensão plena do conceito.

De modo geral, a unidade de medida não funcionou como uma referência e apoio para os outros quatro itens do instrumento, de modo geral. Muitos não compreenderam a necessidade prévia de conhecimento da unidade para comparação das frações, no caso da situação das pizzas. Outros entendem a equivalência de frações apenas como um procedimento matemático, sem considerarem as relações entre os comprimentos das barras, como na situação do item terceiro. O algoritmo parece ser a única maneira de se ensinar a equivalência.

A unidade de medida parece significar apenas o número "um", quando 61 participantes consideraram a localização de 1,5 para 3/2, no item quinto. Além disso, de modo reverso, apesar de o item quarto apresentar a unidade como um círculo - representação tradicional em livros didáticos de Matemática - apenas 9 dos 121 participantes souberam expressar corretamente a fração que representava a figura menor.

Esse estudo preliminar deixa alguns alertas e indicações de continuidade de investigação. Apesar de todos os participantes terem frequentado mais de 11 anos de escolaridade básica, o conceito de fração em algum aspecto, em alguma interpretação ou diante de alguma tarefa específica apresentou lacunas para os 121 participantes. Esse resultado é preocupante, pois são professores a ensinar ou aplicar matemática, ou gestores a conduzir políticas educacionais. Nesse sentido, apesar de a presente investigação não poder ser generalizada, é indicado conhecermos as limitações e desconhecimentos de profissionais brasileiros sobre o conteúdo de frações, sobretudo professores, objetivando orientar formações que revertam esse cenário.

Agradecimentos

A presente pesquisa é parte de um projeto maior tendo sido desenvolvida com recursos financeiros oferecidos pela Fapes (Espírito Santo - Brasil), pela Global Rutgers (New Jersey - USA) e pelo Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). Ademais, contamos com as contribuições críticas dos colegas professores Geraldo Bull da Silva Júnior e Isaura M. C. Monteiro. A todos nossos sinceros agradecimentos.

Referências

ALEKSANDROV, A. D. A general view of mathematics. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N. (Orgs), **Mathematics**: Its content, methods, and meaning. Massachusetts Institute of Technology, 1963

BAILEY, D. H. et al. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v.113, n.3, p.447-455, 2012. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096512001063.

BALL, D. L. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.21, n.2, p.132-144, 1990.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p.389–407, 2008.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T. R.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Org.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 296–333. Macmillan Publishing Co, Inc., 1992.

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs), **Acquisition of mathematics concepts and processes**, Academic Press, 1983.

BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v.37, n.4, p.247-253, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

BROSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathematiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.4, n.2, p.165-198, 1983.

CAMPOS, T. M. M., MAGINA, S.; NUNES, M. T. O professor polivalente e a fração: Conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática em Pesquisa**, v.8, n.1, p.125-136, 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Tipografia Matemática. Lisboa: Gradiva, 1951.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. Sobre a origem objetiva do conceito de frações. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.13, n.1, p.13-64, 1991.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In: WITTROCK, M. C. (Org.), **Handbook of Research on Teaching**, Macmillan, 1986.

HAMDAN, N.; GUNDERSON, E. A. A reta numérica é uma representação numérica espacial crítica: evidência de uma intervenção de fração. **Psicologia do Desenvolvimento**, v.53, n.7, p.587-596, 2017.

KERSLAKE, D. **Fractions**: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Slough: NFER, 1986.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In: LESTER, R. (Org.), **Number and measurement**: Papers from a research workshop, ERIC/SMEAC, 1976.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: Lester, F. (Org.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, Information Age Publishing, 2007.

LIN, C.; BECKER, J.; BYUN, M.; YANG, D.; HUANG, T. Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: a comparative study of the United States and Taiwan. **School Science and Mathematics**, v.113, n.1, p.41-51, 2013.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics:** Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

MACK, N. K. Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. et al. (Orgs.). ***Studies in mathematical thinking and learning***. Rational numbers: an integration of research. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1993.

MACK, N. K. Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. **Journal for Research Mathematics Education**, v.26, n.5, p.422–441, 1995.

MALONE, A. S.; FUCHS, L. S. Error patterns in ordering fractions among at-risk fourth-grade students. **Journal of Learning Disabilities**, v.50, n.3, p.337-352, 2017.

NATIONAL MATHEMATICS ADVISORY PANEL. **Foundations for success**: Final report of the national mathematics advisory panel. Washington, DC: US Department of Education, 2008.

NEWTON, K. J. An extensive analysis of pre-service elementary teachers: Knowledge of fractions. **American Educational Research Journal**, v.45, n.4, p.1080–1110, 2008.

NI, Y.; ZHOU, Y. Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist**, v.40, n.1, p.27–52, 2005.

NI, Y. Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. **Contemporary Educational Psychology**, v.26, n.3, p.400–417, 2001.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A Instructional Model. **Perspectiva**, v.36, n.2, p.399-420, 2018a.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v.13, n.29, p.78–93, 2018b.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome? **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v.3, n.3, p.700-713, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. **International Journal for Research in Mathematics Education**, v.9, n.2, p.50-68, 2019b.

POWELL, S. R.; NELSON, G. University students' misconception about rational numbers: implications for developmental mathematics and instruction of younger students. **Psychology in the Schools**, v.58, n.2, p.307-331, 2021. https://doi.org/10.1002/pits.22448

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, v.1, n.3, p.476-503, 2019.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.9, n.20, p.8–37, 2020.

SIEGLER, R. S. et al. Early Predictors of High School Mathematics Achievement. **Psychological Science**, v.23, n.7, p.691-697, 2012.

SOUZA, M. A. V. F. de.; POWELL, A. B. How do textbooks from Brazil, the United States and Japan treat fractions? **Acta Scientiae**, v.23, n.4, p.77-111, 2021.

THOMPSON, C. A.; OPFER, J. E. Costs and benefits of representational change: Effect of context on age and sex differences in magnitude estimation. **Journal of Experimental Child Psychology**, v.101, n.1, p.20–51, 2008.

TZUR, R. An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.30, n.4, p.390–416, 1999.

VAN HOOF, J.; VERSCHAFFEL, L.; DE NEYS, W.; VAN DOOREN, W. Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: a longitudinal study with upper elementary school learners. **Learning and Individual Differences**, v.61, p.99-108, 2018. https://doi.org/10.3758/s13421-020-01045-1

VAN HOOF, J.; DEGRANDE, T.; CEULEMANS, E.; VERSCHAFFEL, L.; VAN DOOREN, W. V. Intuitive errors in learners' fraction understanding: a dual-process perspective on the natural number bias. **Memory & Cognition**, v.48, p.1171-1180, 2020. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010

VENENCIANO, L. C. H.; YAGI, S. L.; ZENIGAMI, F. K. The development of relational thinking: a study of Measure Up first-grade students' thinking and their symbolic understandings. **Educational Studies in Mathematics**. v.106, p.413-428, 2021. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10014-z

VIZCARRA, R. E. Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español. In: **VIII Simposio de la sociedade española de investigación em educación matemática**. La Coruña, 2004.

VIZCARRA, R. E.; SALLÁN, J. M. G. Modelos de medida para la ensenanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v.1, p.17-35, 2005.

WATANABE, T. The teaching and learning of fractions: A Japanese perspective. **Teaching Children Mathematics**, v.12, n.7, p.368–374, 2006.

YOSHIDA, H.; SAWANO, K. Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. **Japanese Psychological Research**, v.44, n.4, p.183–195, 2002.