 http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2022.019

Construindo um cartão fractal para explorar padrões numéricos na formação continuada de professores dos anos iniciais

José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana
leivasjc@gmail.com

Resumo

Este artigo tem por objetivo investigar, por meio de uma construção fractal, a aprendizagem de conceitos relacionados aos eixos 'geometria e formas' e 'grandezas e medidas', em ação continuada com professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais. Em uma aula na modalidade 'remota' em virtude do estado de isolamento social, ocorrida no primeiro semestre letivo de 2020, o autor do artigo propôs a construção de um cartão fractal com a finalidade de dar continuidade ao programa da disciplina. Buscou-se analisar padrões e organização de sequências que conduziriam aos números fracionários, decimais, dentre outros conceitos envolvidos. A ação investigativa trata-se, pois, de uma pesquisa qualitativa, investigativa, com intencionalidade de produzir conhecimento, essencialmente, para a Educação Básica, explorando para tal recursos materiais metodológica e intencionalmente. Os resultados mostraram dificuldades dos participantes em realizar ações envolvendo procedimentos matemáticos, entretanto, manifestaram interesse e motivação na realização de atividades nesse estilo, as quais proporcionaram aprendizagens significativas para eles.

Palavras-chave: Cartão fractal, Padrões, Grandezas e Medidas, Anos Iniciais.

Building a fractal card to explore numerical patterns to continuing teacher education in the early years

Abstract
This article aims to investigate, through a fractal construction, the learning of concepts related to 'geometry and shapes' and 'quantities and measures', in continuous action with teachers of Early Childhood Education and Early Years. In a class in the 'remote' modality, due to the state of social isolation, which occurred in the first academic semester of 2020, the author of the article proposed the construction of a fractal card in order to continue the program of the discipline. We sought to analyze patterns and sequence organization that would lead to fractional, decimal numbers, among other concepts involved. The investigative action is, therefore, research qualitative investigative, with the intention of producing knowledge, essentially, for basic education, exploring material resources methodologically and intentionally for this. The results showed the participants' difficulties in carrying out actions involving mathematical procedures. However, they showed interest and motivation in the realization of classes of this style, which provided significant learning for them

Keywords: Fractal Card, Patterns, Quantities and Measures, Early years.

Introdução

A Geometria é uma das áreas da Matemática que tem mostrado mudanças ou inovações ao longo dos milênios e, consequentemente, proporcionado novas aquisições de conhecimentos úteis para a sociedade, o que pode ser percebido da história humanidade. Com Euclides, ela tomou uma forma axiomática na interpretação do mundo físico que cercava o homem, uma vez que este espaço, sendo perceptível por apresentar os objetos com as dimensões comprimento, largura e altura, permitia que os indivíduos a associassem ao concreto, manuseável. Tal axiomática reelabora essa Geometria ao mundo platônico, sendo que ninguém segura um ponto ou uma reta, por exemplo, em suas mãos.

Com o passar dos tempos, outros espaços, que não o euclidiano, passaram a fazer parte do mundo matemático, a partir da descoberta de um espaço geométrico denominado hiperbólico, devido especialmente aos estudos de Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Nenhum dos três, entretanto, visualizou um tal espaço em que reta e plano, entes primitivos da Geometria Euclidiana, assumiriam determinadas entidades concretas, segundo Mlodinow (2010). Poincaré fez isso: “[...] Nós poderíamos modelar o plano não-euclidiano como a superfície de uma zebra, chamar os folículos pilosos pontos e suas listras de retas, se assim o quiséssemos, desde que isso levasse a uma tradução consistente dos axiomas" (2010, p. 128). O modelo denominado Plano Hiperbólico de Poincaré é interessante de ser estudado, pois nele ilustra-se uma das possibilidades da insuficiência do V Postulado de Euclides, o das paralelas.

Outros espaços geométricos existem, a exemplo do modelo de Descartes, com uma geometria de dimensões maiores do que a euclidiana, a partir da caracterização do ponto como uma coleção de números reais, ou seja, por suas coordenadas. O espaço elíptico é outro desses, cuja exploração auxiliou no desenvolvimento da navegação aérea e marítima, além do espaço topológico, no qual a noção de continuidade foi ampliada, possibilitando a compreensão de superfícies “com um único lado” como a Faixa de Möebius ou a Garrafa de Klein, um objeto inconcebível na geometria euclidiana tridimensional.

Dentre esses espaços, chama-se atenção, neste artigo, para a Geometria Fractal, mais recente, a qual foi desenvolvida principalmente pelos sistemas computacionais da IBM, por Mandelbroch, em 1975, com a criação de seus objetos fractais. Estes permitem associar novas formas de compreender a complexidade e o crescimento na natureza. Tais objetos rompem com a questão de dimensões inteiras, como a dos entes euclidianos ou dos cartesianos, pois podem ter dimensões fracionárias.

Um desses exemplos é o denominado Conjunto de Cantor, o qual é construído a partir de um segmento de reta euclidiano de comprimento igual a 1 unidade de medida, dividido em três partes congruentes, sendo retirado o terço central, numa primeira etapa e repetindo-se o processo para os dois segmentos restantes, numa segunda etapa. Assim, sucessivamente, num processo iterativo constitui-se o fractal, cuja dimensão é igual a 0,6309. Portanto, é mais do que um ponto, cuja dimensão é 0, e menos do que uma reta, cuja dimensão é 1.

Um segundo exemplo é a Curva de Koch ou Copo de Neve de Koch, o qual tem dimensão 1,26186, sendo mais do que a de uma reta e menos do que a dimensão de um plano. Este objeto fractal é construído a partir de um segmento de reta, o qual é dividido em três partes congruentes, tendo sua parte central retirada e substituída por um triângulo equilátero cujo lado tem a medida do segmento retirado. Em seguida, é repetido o processo, constituindo-se o objeto fractal.

Assim, os fractais podem estar diretamente ligados aos números ou às formas na natureza, diferentemente dos fractais matemáticos. Para Janos (2009, p. 307), os fractais da natureza "são **autoafins**, ou seja, são cópias reduzidas **distorcidas** de si próprias".

A problemática de números, sistemas de numeração, contagem etc. já é preconizada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), em que se exemplificam dois objetivos e habilidades associados ao tema em apreço para a disciplina em seu conteúdo programático. Escolheu-se um da Educação Infantil e o outro do terceiro ano do Ensino Fundamental, os quais ancoram a escolha por explorar metodologicamente o emprego de fractais para alcançar tais objetivos.

1. Na Educação Infantil, no assunto Geometria, encontra-se o objetivo de desenvolver experiências em relação a medidas. Para isso, o documento indica a habilidade (EI03ET01): Estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades.
2. No terceiro ano, no assunto números, encontra-se o objetivo de obter significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. Sugere como habilidade (EF03MA09): Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

A Geometria Fractal deve ser usada para a sala de aula, segundo Barbosa (2002), pois permite estabelecer conexões com outras ciências, por exemplo. Os objetos fractais podem facilitar o ensino e a aprendizagem de grandezas e medidas em Geometria, particularmente, em um curso de formação continuada para professores que atuam na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, possibilitam a compreensão de que números inteiros e fracionários são aplicáveis em situações reais, como na filotaxia das plantas, ao serem explorados em uma disciplina interdisciplinar envolvendo Ciências da Natureza e Matemática. Dessa forma, justifica-se a presente pesquisa A investigação teve a seguinte questão propulsora: como investigar, por meio de uma construção fractal, a aprendizagem de conceitos relacionados aos eixos 'geometria e formas' e 'grandezas e medidas' em ação continuada com professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais?

Fundamentos metodológicos

A partir da justificativa e do problema de pesquisa, delineou-se o seguinte objetivo para a pesquisa realizada no primeiro semestre letivo de 2020, durante o período de isolamento social em uma instituição privada em um programa de pós-graduação, no Sul do Brasil: **investigar, por meio de uma construção fractal, a aprendizagem de conceitos relacionados à Unidade Temática 'Números', em ação de formação continuada com professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais.**

Ao abordar sobre a pesquisa como mediadora enquanto um compromisso da universidade e um papel da educação, Severino (2016) indica que o conhecimento construído por meio dela deve ser reproduzido, conservado, sistematizado, organizado e disseminado. Esse é um papel relevante na formação, tanto inicial quanto continuada, de professores que ensinam Matemática, em particular, na direção da atuação do pesquisador e autor do presente artigo. Afirma Severino (2016) que o ensinar pesquisando é um dos papéis da universidade, isto é, a atividade "[...] deve ser realizada sob uma atitude investigativa, ou seja, sob uma postura de produção de conhecimento" (SEVERINO, 2016, p. 31-32).

Trata-se, pois, de uma pesquisa qualitativa, investigativa, com intencionalidade de produzir conhecimento, essencialmente, para a Educação Básica, explorando recursos materiais para tal de forma intencional e metodológica. A pesquisa é exploratória, no sentido apontado por Severino (2016, p. 132), pois buscou "levantar informações sobre um determinado objeto, delimitando assim um campo de trabalho, mapeando as condições de manifestação desse objeto".

No caso, tratou-se de explorar como, em uma aula 'remota[1]', os participantes, aqui denotados por A, B, C, D, E e F, produziram a construção de um 'cartão fractal'. Durante este processo, investigaram-se padrões existentes nessas construções que evoluíam passo a passo. Nelas, medidas de comprimentos, perímetros, áreas e volumes eram averiguadas por meio de questionamentos fornecidos aos participantes antes do encontro. Posteriormente, as resoluções foram encaminhadas ao professor-pesquisador por e-mail. A partir da coleta desses registros, o professor-investigador proporcionou um feedback, retomando o debate no encontro subsequente, de forma a contribuir para a aprendizagem dos indivíduos.

A respeito do feedback, Beviláqua et al. (2019, p. 2) salientam sua importância para a aprendizagem de conteúdos desenvolvidos em sala de aula e, em particular, para o ensino a distância, ao que acrescentamos, na modalidade 'remota'. Para os autores, "O feedback pode ser, ainda hoje, um fenômeno inerente ao que se entende por papel do docente e, por conseguinte, um fenômeno que se dá de forma mais prática que teórica – no sentido de não haver um respaldo teórico inerente às

[1] Remota aqui indica que as aulas não foram presenciais em virtude da 'pandemia' em que o país e o mundo se encontram. As mesmas foram realizadas a distância por meio de uma plataforma virtual.

escolhas por trás desse feedback” (BEVILÁQUA et al., 2019, p. 3). Isso, no entender do professor-pesquisador, neste momento, torna-se fundamental para o desenrolar de um conteúdo matemático.

Os questionamentos e o desenvolvimento da atividade serão apresentados no transcorrer da análise dos dados coletados. Inicialmente, foi solicitado que cada indivíduo escolhesse uma medida de folha que tivesse em casa, a qual deveria ser diferente da dos colegas para que se pudesse estabelecer comparativos entre as medidas e sequências durante a construção do ‘cartão fractal’ a ser feito durante a aula ‘remota’. Optou-se por indicar medidas que fossem múltiplas de dois, a fim de iniciar com divisões inteiras nas primeiras iterações para não desmotivar os participantes com números decimais. Assim, foram sugeridas medidas escolhidas por cada um dentre as sugestões apresentadas. No que segue, ilustram-se os dados coletados, bem como os primeiros passos da investigação e as respectivas análises.

Análise dos dados

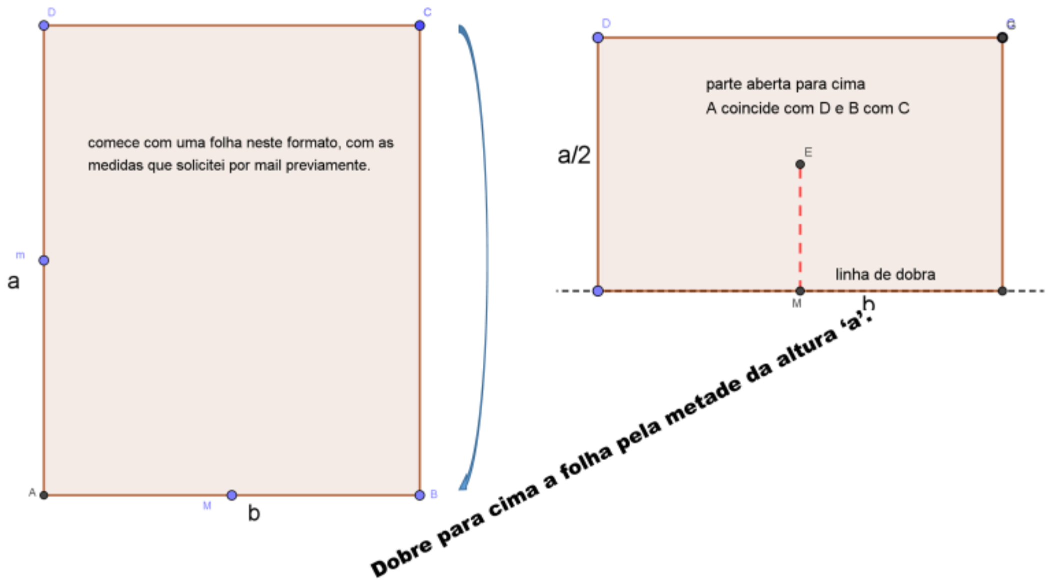
Para a construção do ‘cartão fractal’, o professor-investigador utilizou a plataforma Google Meet, a fim de poder acompanhar a evolução das construções, bem como fornecer, por meio de uma apresentação em PowerPoint, os encaminhamentos da atividade. Com isso, almejou-se propiciar uma retomada individual, uma vez que foi fornecida a gravação da aula e o feedback personalizado a cada participante sobre suas realizações.

Inicialmente, a atividade pedia que explicitassem as medidas da folha de papel disponível, fornecidas por cada um.

1. Medir as duas dimensões da folha – a e b, sendo a maior dimensão (comprimento = a) e a menor dimensão (largura = b).
2. Dobrar a folha no sentido da maior dimensão (a) pela metade dessa ($\frac{a}{2}$).
3. Marcar o ponto médio da largura (ponto médio da linha de dobra (b).
4. Medir a metade da largura da folha (menor lado na horizontal $\frac{b}{2}$).
5. Ao dobrar a folha pela metade do comprimento, deixar a abertura para cima [apoiar sobre a mesa].
6. Medir a quarta parte do comprimento ($\frac{a}{4}$)
7. Medir a quarta parte da largura ($\frac{b}{4}$)

O docente, então, expôs o primeiro slide (Figura 1), de modo a uniformizar as orientações, uma vez que o encontro era ‘remoto’.

Figura 1 - Orientação da folha e primeira dobra



Fonte: arquivo do pesquisador

Os valores fornecidos pelos estudantes na escolha das dimensões da folha inicial constam da primeira e segunda linhas no Quadro 1, enquanto nas duas seguintes já estão os cálculos realizados no momento da construção do fractal. A esses dados chamamos primeiras medições.

Quadro 1 - Primeiras medições[2]

Encaminhamentos	A	B	C	D	E	F
1. Comprimento ou altura (a)	40	**28**	36	26	32	40
2. largura (b)	32	**20**	22	18	24	28
3. metade da altura $(\frac{a}{2})$	20	**7**	18	13	**8**	20
4. Quarta parte do comprimento $(\frac{a}{4})$	10	**7**	9	6,5	8	10
5. Largura por quatro $(\frac{b}{4})$	8	**5**	**11**	4,5	6	**14**

Fonte: dados da investigação.

Verifica-se, no Quadro 1, que na linha 3, B assinalou 7 como a metade do valor atribuído na linha 1, ou seja, de 28, quando, na realidade deveria ser 14. De modo similar, E considerou a metade de 32 como oito, erroneamente. Por sua vez, C considerou a quarta parte de 22 como 11. Os registros em negrito correspondem a respostas equivocadas.

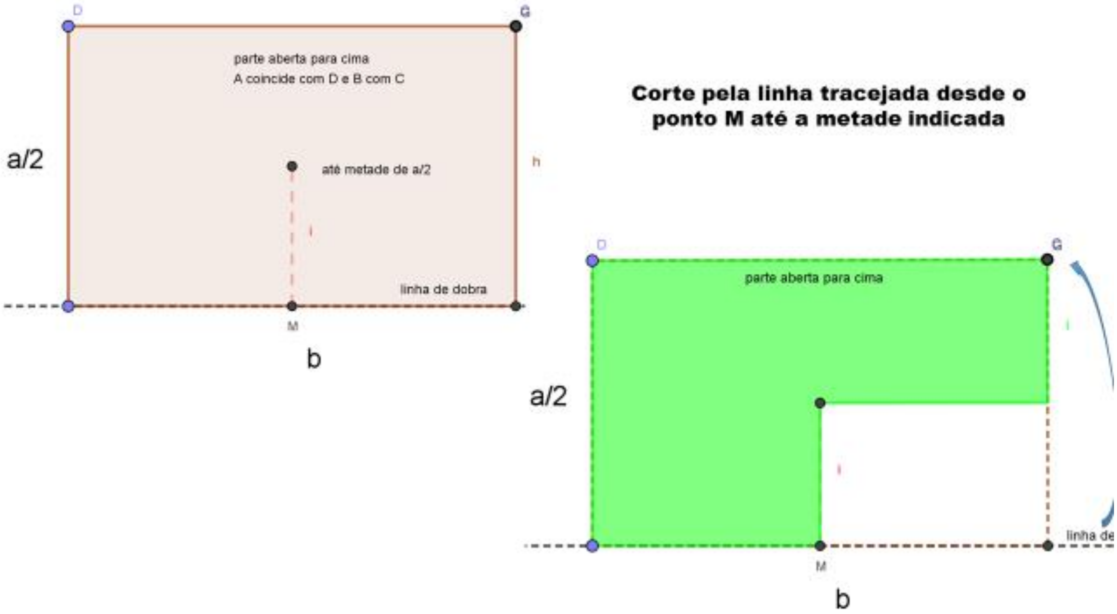
Com esses primeiros dados reunidos, passou-se à construção propriamente dita do fractal com os seguintes comandos:

8. Cortar a folha no sentido vertical, como indicado no tracejado, de M até E. (Figura 1, acima, à direita).

[2] Omitir-se-á a unidade de medida pois todas foram apresentadas em centímetros (cm).

9. Dobrar para cima a parte inferior da direita até a metade da altura a/2 cm, no ponto E à direita (Figura 2).

Figura 2 - Primeira dobra



Fonte: autoria própria.

As medidas fornecidas pelos participantes são correspondentes ao que fora indicado como segundas medições (Figura 2b) e constam no Quadro 2.

Quadro 2 - Segundas medições

Encaminhamentos	A	B	C	D	E	F
1. Comprimento ou altura (a)	20	14	**9**	13	16	--
2. largura (b)	16	10	11	9	12	--
3. metade da altura $(\frac{a}{2})$	10	**3,5**	4,5	6,5	**4**	--
4. Quarta parte do comprimento $(\frac{a}{4})$	5	**1,75**	2,25	3,25	4	2,5
5. Largura por quatro $(\frac{b}{4})$	4	**1,25**	**2,75**	2,25	**1,5**	3,5

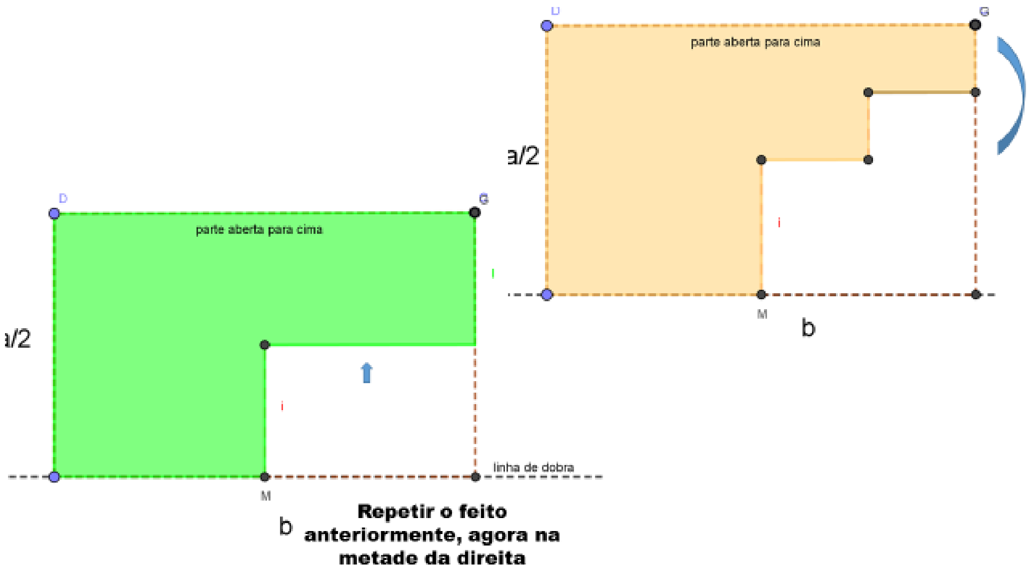
Fonte: autoria própria.

Analisando-se os dados do Quadro 2, verifica-se ter havido compreensão errada do que seria metade da altura. B tinha por altura 14, mas como tinha se equivocado colocando 7, foi coerente, porém não correspondendo à medida certa, errando também as demais medições. C tinha na primeira medição o valor de 36, cuja metade, isto é, 18, foi corretamente preenchida no Quadro 1, enquanto no Quadro 2 colocou 9. Como E havia errado a medida da metade da altura, consequentemente, continuou com a medida errada. Equivocou-se, também, na quarta parte de 12, isto é, 3, ao colocar 1,5. F não registrou as primeiras medições no Quadro 2. Percebem-se algumas dificuldades com os valores, o que revela falta de habilidade matemática básica, uma vez que a divisão por dois é elementar, podendo ser feita mentalmente ou com a calculadora do celular, por exemplo. Nessa etapa seria a segunda medida, isto é, a quarta parte da inicial, ou seja, a metade da anterior.

Na sequência, tem-se as etapas da segunda dobra, conforme a solicitação:

10. No lado dobrado para cima fazer novas marcações pelas metades [repete itens 3 e 4, 5, 6, 7] e marcar até a metade da parte superior, tracejar e recortar (Figura 3).

Figura 3 - Passagem para a segunda dobra



Fonte: autoria própria.

A partir dessa orientação, os participantes foram solicitados a registrarem novas medições, conforme Quadro 3.

Quadro 3 - Terceiras medições

Encaminhamentos	A	B	C	D	E	F
1. Comprimento ou altura (a)	10	7	18	6,5	8	20
2. largura (b)	8	5	11	4,5	6	14
3. metade da altura ($\frac{a}{2}$)	5	**1,75**	9	3,25	**2**	10
4. Quarta parte do comprimento ($\frac{a}{4}$)	2,5	**0,4**	4,5	**3,25**	2	5
5. Largura por quatro ($\frac{b}{4}$)	2	**0,3**	**5,5**	1,125	**0,4**	**7**

Fonte: dados da pesquisa.

Percebe-se, nos dados do Quadro 3, que houve uma retificação daqueles registrados por B, D e E, ou alguma forma de incompreensão. Entretanto, outros equívocos ocorreram, ou por consequência dos erros anteriores, ou seja, por um novo, como o realizado por D que, em vez da quarta parte de 6,5, registrou metade, provavelmente em decorrência de uma desatenção. Por sua vez, parece que F se reinventou nas medições.

Em virtude de as folhas de maiores dimensões ainda permitirem dobras, cortes e medições razoáveis, foi encaminhada uma quarta medição, com o objetivo de verificar se os participantes da aula investigativa identificariam os padrões de formação das sequências formadas, o que caracterizaria um fractal. Além disso, foi deixada uma quarta coluna e uma quarta linha abertas, com reticências, no intuito de que continuassem as medições e a construção, pelo menos aqueles que dispunham de folhas com dimensões maiores. O Quadro 4 ilustra as realizações.

Quadro 4 - Quartas medições

Encaminhamentos	A	B	C	D	E	F
1. Comprimento ou altura (a)	5	3,5	4,5	3,25	4	
2. largura (b)	4	2,5	5,5	2,25	3	
3. metade da altura $(\frac{a}{2})$	2,5	0,9	2,25	1,625	1	
4. Quarta parte do comprimento $(\frac{a}{4})$	1,25	0,1	1,125	0,812	**0,5**	**2,5**
5. Largura por quatro $(\frac{b}{4})$	1	**0,75**	1,375	0,5625	**0,1**	**3,5**

Fonte: dados da investigação.

A partir dessa primeira parte da realização da tarefa, foi feita uma análise dos elementos encontrados para, em seguida, catalisar o que fora observado em termos de padrões e sequências nessas medições.

11. Existe um padrão para as medições de a? Se sim, qual é?

12. Existe um padrão para as medições de b? Se sim, qual é?

A: Essa participante é bem objetiva nas duas respostas, afirmando que existe o padrão e indicando que ele é a/2 e b/2, respectivamente. Porém não ilustra as sequências.

B: Afirma que sim e que ‘existe uma sequência numérica decrescente’, porém não diz qual é tal sequência[3].

C: Afirma que sim. Não explicita qual é a sequência, dizendo apenas que ‘obtemos a medida em cm da medida anterior, este fato se repete até o máximo de vezes que conseguimos fazer as dobraduras e medições’. Embora não esteja incorreta, em nada é objetiva na resposta, por não apresentar qual é a sequência.

D: Explica que existe um padrão para as medições e registra: ‘a: se 26=1 inteiro - 13=$\frac{1}{2}$; – 6,5=$\frac{1}{4}$ e 3,25=$\frac{1}{8}$. Logo, é possível observar que os numerais obtidos seguem uma sequência. Segue a sequência com seus denominadores, ou seja, o número de partes que o inteiro foi dividido.

[3] Indica-se o registro literal dos participantes entre aspas.

0+1=1- 1 inteiro;

1+1=2 - $\frac{1}{2}$; [a participante explicita como obteve o valor do denominador, 1+1=2 e, ao lado a fração correspondente $\frac{1}{2}$. De maneira análoga para as demais. O sinal – significa a separação e não o de operação]

2+2=4 - $\frac{1}{4}$; 4+4=8 - $\frac{1}{8}$; 8+8=16 - $\frac{1}{16}$; 16+16=32 - $\frac{1}{32}$;

26:2=13 – 13:2=6,5 – 6,5:2=3,25 – 3,25:2=1,625 – 1,625:2=0,8125'.

É possível observar que há uma sequência com padrão numérico de divisão por 2 ou metade do anterior. Afirma ainda que isso caracteriza o processo repetitivo da Geometria Fractal. Muito embora a escrita matemática não seja muito clara, a ideia da aluna está adequada.

E: Diz existir uma sequência numérica do maior ao menor, não havendo conclusão efetiva.

F: Não registrou.

Percebe-se uma diversificação nas justificativas, bem como falta de objetividade em alicerçar-se no padrão que correspondia à divisão por dois, ou metade e, assim, à construção de sequências decrescentes. As respostas à segunda solicitação são similares.

O próximo questionamento foi o seguinte:

13. Conte os elementos obtidos em cada iteração (os 'quadradinhos' formados pelos cortes, somente ao final quando abrir a folha ou colar na outra).

14. Existe um padrão na quantidade de 'quadradinhos' gerados? Se sim, qual é?

Na sequência da construção, o professor-investigador solicitou que colassem no verso do objeto obtido, ainda dobrado, uma outra folha ou cartão, de preferência em cor diferente, porém do tamanho da inicial. Em seguida, pediu que desdobrassem pela primeira linha de dobra, tentando deixar as duas metades perpendiculares (Figura 4).

Figura 4 - O cartão fractal

Fonte: autoria própria.

Observa-se, na Figura 4, à esquerda, a folha ainda dobrada pelo professor-investigador, com as medidas indicadas tanto na horizontal quanto na vertical, para a formação das sequências. Isso iria corresponder aos lados dos 'quadradinhos' ou 'cubinhos' vazados, quando abertos, como apresentado na figura da direita, na qual sobrepõe-se o fractal com uma folha azul ao fundo para destacar em relevo as formas obtidas.

A partir dessa fase da construção coletiva, os participantes expressaram a quantidade de ‘quadradinhos’ obtidos, de acordo com as dimensões trabalhadas por cada um deles. Esses dados estão no Quadro 5.

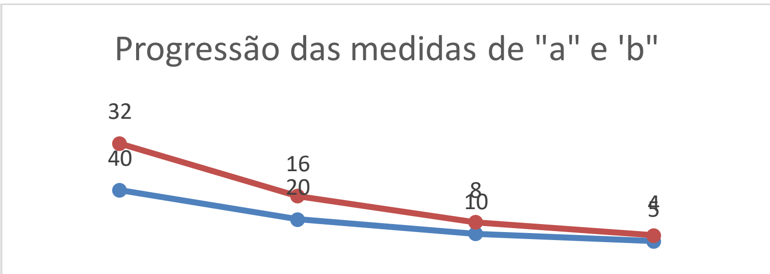
Quadro 5 - Respostas ao item 13.

Encaminhamento	A	B	C	D	E	F
Quantidade de ‘quadradinhos’	15	7	5	7	7	---

Fonte: dados da investigação.

Na medida em que o fractal ia sendo construído, os participantes obtinham o padrão da quantidade de ‘quadradinhos’, destacando-se a resposta de A: ‘do menor para o maior ocorre uma multiplicação duplicada das medidas do quadrado imediatamente anterior 1,2,4,8’. Talvez esse participante quisesse dizer da menor quantidade para a maior e não das medidas. Em relação ao padrão nas medidas dos lados dos ‘quadradinhos’, expressou suas conclusões pelo gráfico da Figura 5.

Figura 5 - Gráfico da progressão das medidas



Fonte: construção da participante A

B não expressou em termos de quantidade, e sim de medidas dos lados, informando que estas correspondem à metade da anterior, não sendo muito precisa, enquanto C diz não ter conseguido concluir. Já D faz a relação equivocada com a Sequência de Fibonacci ao indicar (0,1,2,4), afirmando crescer de forma proporcional, além de dizer que todos os lados têm a mesma medida, ou seja, está reconhecendo o quadrado formado. Traz a relação importante entre os perímetros dos ‘quadradinhos’ formados, indicando que o do maior corresponde a dois dos imediatamente menores. Afirma que existe um padrão (sem dizer qual ou de quem), indicando ‘com cópias de quadrados com tamanhos diferentes do menor ao maior’. Ainda, ensaia uma relação envolvendo paralelepípedo e quadrado e algumas medições, o que é relevante neste processo de aprendizado, conforme o objetivo da proposta de aula.

A linguagem e a formação matemática desses indivíduos (todos em Pedagogia), até certo ponto, deixa a desejar no rigor conceitual matemático. Entretanto, pode-se constatar, nestas últimas considerações, que buscaram relacionar forma geométrica quadrada, paralelepípedo, medidas de lados e de perímetros, o que, por si só, já constitui um avanço em virtude das dificuldades com a Matemática. Também, cabe salientar que obtiveram valores dos perímetros coerentes com os valores citados, corretos ou nem tanto, obtidos para as medidas iniciais e as respectivas divisões.

Foi pedido que indicassem se o cartão construído era um 'cartão fractal' e que justificassem a resposta. Todos responderam que sim, com exceção de F, que não deu continuidade ao trabalho. Justificaram indicando a existência de padrões na construção realizada.

A: 'Sim, tendo em vista que ela forma uma imagem vasada em escala'. Em verdade, a justificativa desse indivíduo não foi coerente com o desenvolvimento de suas respostas, pois foi um dos que mais realizou as tarefas corretamente.

B: 'O cartão é um fractal, pois possui um padrão repetitivo em diferentes escalas e um processo iterativo, ou seja, segue algumas etapas'. Importante nessa justificativa é a questão de ter indicado o processo iterativo que bem caracteriza o fractal.

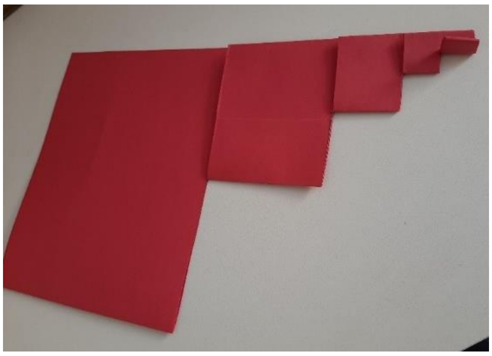
C: 'Sim, pois cada parte que formamos através das dobraduras representa a folha inicial como um todo. Conseguimos, assim, identificar na mínima parte a máxima'. Para esse indivíduo, a parte ser representativa do todo é um dos fatores característicos da estrutura fractal, o que procede.

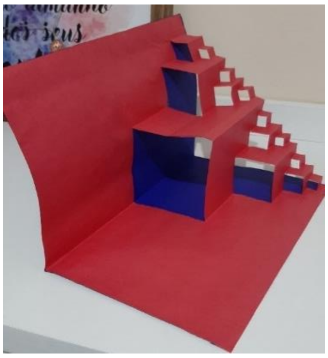
D: 'Apresenta padrões fractais. A geometria fractal descreve como as formas crescem ou decrescem numa repetição de cópias aproximadas de si mesmas'. Percebe-se, nessa justificativa, uma excelente compreensão do que seja a Geometria Fractal.

E: 'Sim, pois tem uma sequência numérica e apresenta cópias aproximadas de si mesmo em seu interior'. A justificativa, embora inocente, indica certa compreensão da estrutura fractal.

Pode-se, a partir dessas justificativas fornecidas, perceber que os indivíduos tiveram compreensão do que seja uma estrutura fractal, ainda mais considerando-se que havia sido desenvolvida apenas uma aula presencial, na qual fora indicado o que seria essa geometria e sua estrutura, de forma bastante rápida. A Figura 6, ilustra algumas das construções realizadas e encaminhadas ao final da aula 'remota' ao professor-pesquisador.

Figura 6 - Construções dos participantes





(A)

(B)

(D)

(E)

Fonte: registros dos participantes

Por não ter sido uma aula presencial, em virtude do isolamento social decretado antes da segunda aula da disciplina, e por ter sido feita de forma ‘remota’, o professor-pesquisador julgou por bem analisar os sentimentos dos participantes que, em geral, têm dificuldades com a disciplina Matemática, em forma presencial, como foram suas percepções a respeito da aula desenvolvida. No que segue, apresentam-se os registros.

A: ‘Eu, particularmente, adoro esses desafios práticos, precisei de bastante concentração para realizar a tarefa. Acredito que tenha conseguido fazer’.

B: ‘A minha percepção desta aula não presencial é de que sem a presença de um mediador a atividade se torna mais complexa, acredito que poderia ter em alguns momentos vídeo explicativo’.

C: ‘Eu consigo acompanhar bem o que é pedido nas nossas aulas não presenciais, a minha dificuldade é a execução dos trabalhos manuais, esta dificuldade em sala de aula também, como já deve ter sido percebido. Consigo compreender perfeitamente o teórico, análises como um todo, só o que realmente não consigo acompanhar é a parte manual, como será percebido uma vez neste trabalho [essa aluna já cursou disciplinas com o professor-pesquisador em outros momentos]. Iniciei o trabalho bem, fazendo as dobraduras e medidas solicitadas, mas ao final não consegui chegar ao cartão que seria o trabalho finalizado. Contudo, consegui associar o teórico com a prática solicitada, visualizando o fractal que o cartão formaria ao final’.

D: ‘A partir da aula de hoje, apesar das dificuldades, foi possível observar que tudo na natureza obedece um padrão. Precisamos estar atentos para identificá-los e ver qual padrão numérico este obedece’.
E: ‘Essa aula e a atividade proposta pelo professor foi muito produtiva, enriquecedora e desafiadora para mim, porque abordou um tema muito bom, mas muito complicado que é geometria fractal, através do ‘cartão fractal’. Assim, fiz várias pesquisas, por minha parte, para poder chegar a uma conclusão na parte do desafio que foi dobradura com formato fractal pedida pelo senhor. Se tiver vídeo explicativo teria sido mais fácil’.
F: não realizou a tarefa e foi feita uma recuperação em horário extra encontro.

Na sequência, apresentam-se as considerações finais e a percepção do professor-pesquisador a respeito do desenvolvimento da aula realizada no formato ‘remoto’. O professor-pesquisador considera que não houve preparação para o desenvolvimento de aulas nesse formato, o que parece não ter influenciado em demasia na aprendizagem e na motivação dos participantes em realizar atividades práticas, as quais futuramente os participantes poderão utilizar em sua prática pedagógica.

Considerações Finais

Neste artigo, foi apresentada uma investigação realizada em uma aula ‘remota’, em virtude da Covid 19, a qual teve como implicação a suspensão de atividades presenciais no âmbito acadêmico. O estudo foi desenvolvido em um programa de pós-graduação em ensino de Ciências e de Matemática, no qual o professor-investigador atua como docente. Após a segunda aula presencial, destinada a um mestrado profissional voltado a pessoas com formação em Pedagogia, foi determinada a suspensão das aulas nessa modalidade e recomendado que o trabalho fosse feito de forma ‘remota’.

Como havia sido desenvolvida uma única aula, na qual fora introduzido o tema fractais em interlocução com as Ciências Biológicas, uma vez que a disciplina funciona de forma interdisciplinar com a Matemática, muito pouco pode ser feito para introduzir sequências, por exemplo, como as de Fibonacci, envolvidas na natureza do reino vegetal. Assim, apenas os primeiros passos na direção do desenvolvimento do conteúdo foram dados. Portanto, foi pensada uma atividade a ser realizada utilizando recursos materiais concretos, fundamentais para o ensino e a aprendizagem da população-alvo em apreço. Planejou-se, pois, a elaboração de um ‘cartão fractal’, o qual poderia atender à demanda da disciplina e cumprir com o que a norteia, ou seja, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

No campo de experiências “espaços, tempos, quantidades, relações e transformações”, a recomendação para a faixa etária ‘crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses)’, o documento indica “Estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades” (BRASIL, 2017, EI03ET01). Ainda, para a mesma idade, consta o “Registrar observações, manipulações e medidas, usando múltiplas linguagens (desenho, registro por números ou escrita espontânea, em diferentes suportes" (EI3ET04). Além disso, o observar, o descrever mudanças que ocorrem ao utilizar materiais diversos, que resultem de ações sobre os mesmos é outra habilidade que foi levada em consideração na pesquisa (EI03ET02). Outras habilidades preconizadas na BNCC podem, ainda, ser privilegiadas com a atividade, tais como a (EF01MA04): Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros. Em relação ao 2º ano, encora-se na (EF02MA09): Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. Para não delongar, no 3º ano consta a (EF03MA19): Estimar, medir e comparar comprimentos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (metro, centímetro e milímetro) e diversos instrumentos de medida.

Por si só, essas orientações, além daquelas citadas no início do artigo, foram suficientes para a escolha do tema Geometria Fractal, a fim de atender ao preconizado no referido documento, o que levou ao objetivo da presente aula: investigar, por meio de uma construção fractal, a aprendizagem de conceitos relacionados aos eixos 'geometria e formas', 'grandezas e medidas', em ação continuada com professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais.

A análise realizada mostrou que, embora com algumas dificuldades, os participantes foram capazes de organizar suas rotinas de contagem, por exemplo, no reconhecimento dos números representativos de medidas de formas geométricas para as dobras e recortes na construção do 'cartão fractal', o que é indicado como objetivo do primeiro ano, no assunto número. Ao buscarem elaborar padrões na obtenção das medidas, os participantes puderam perceber a importância de elaborar estratégias e registrar ideias em uma atividade concreta, o que, em geral, não ocorre na formação inicial desses profissionais, que carecem de uma formação metodológica fundamentada matematicamente.

Como pode ser percebido nos registros dos participantes sobre essa ação oriunda de uma forma peculiar, em virtude do momento que a educação e o Brasil enfrentam, houve motivação para desencadear os desafios práticos, na expressão de uma das participantes. Por sua vez, outra participante manifestou sua dificuldade com trabalhos de natureza prática, indicando que a atividade proporcionou associar o teórico ao prático. Para essa segunda, a aula, muito embora apresentasse dificuldades aos estudantes, possibilitou perceberem os padrões que podem ocorrer em coisas práticas, além de ter sido muito produtiva.

Essas manifestações, de certa forma avaliativa, fortaleceram a convicção do professor-investigador de que o objetivo delineado foi cumprido, até mesmo porque o participante que deixou de realizar parte da tarefa solicitou um atendimento individual posteriormente, o que foi por deveras valioso para sua aprendizagem.

Para finalizar, relatamos que a atividade o ‘cartão fractal’ também foi utilizada para explorar relações espaciais, como comprimentos dos espaços vazios, formando cubos vazados, com áreas e perímetros de faces laterais, volumes e outros elementos, complementando e aperfeiçoando o redescobrimento matemático para tais estudantes. Com tal motivação, em aulas subsequentes, no mesmo sistema, outros objetos fractais, como o triângulo de Sierpinsky, foram realizados para explorar outras relações, quer geométricas, quer numéricas, por exemplo, alturas e áreas de triângulos, além dos padrões e sequências numéricas obtidas por medições.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal (para sala de aula)**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Conselho Nacional de Secretaria de Educação. Brasília: Distrito Federal. 2017. Recuperado de http://basenacionalcomu m.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf .

BEVILÁQUA, A. F.; COSTA, A. R.; FIALHO, V.R.; LEFFA, V.J. Um olhar complexo sobre o feedback e a formação de professores a distância. **Polifonia**, Cuiabá-MT, v. 26, n.44, p. 01-163, out.-dez., 2019.

JANOS, M. **Matemática e Natureza**. São Paulo: Livraria Editora da Física, 2009.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. 5. Ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 24. ed. Revista e atualizada. São Paulo:Cortez, 2016.