Uma releitura histórico-epistemológica para o ensino do conceito de função

Jeanne Barros
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
jeanne@ime.uerj.br

Alexandre Oliveira Silva
SEEDUC/RJ – Santa Mônica Centro Educacional
aosprofmat@gmail.com

Gustavo Lima da Silva
Universidade Federal do Rio de Janeiro
g.lima.qed@gmail.com

Resumo
Este artigo apresenta uma possibilidade de aplicação da História da Matemática para preencher as lacunas de aprendizagem do conceito de função. Essas dificuldades têm permeado nossas discussões no grupo colaborativo do Projeto Fundão, cujo tema de pesquisa é a Transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, por conta das excessivas reprovações e abandonos. Além do manejo algébrico, outra grande dificuldade encontrada é a resolução de problemas usando o Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta. Debruçado sobre isso, o grupo constatou que o conceito de função é um dos grandes empecilhos para uma aprendizagem significativa de Cálculo. O artigo apresenta uma análise histórico-epistemológica do conceito de função, desde os babilônios, passando por Leibniz e Newton, derivando daí propostas de ensino do conceito de função para a Escola Básica ou mesmo para uma primeira disciplina de Cálculo.

Palavras-chave: História da Matemática**.** Teoria de registros de representação semiótica de Duval. Dificuldades na aprendizagem do conceito de função.

A historical-epistemological rereading for teaching the concept of function

Abstract
This article presents a possibility of applying the History of Mathematics to fill learning gaps of the concept of function. These difficulties have permeated our difficulties in the collaborative group of the Fundão Project, whose research theme is the Transition from High School to College due to excessive failures and dropouts. In addition to use of algebraic techniques, another major difficulty is the solving of mathematical problems by using Differential and Integral Calculus tools. Examining very carefully, the group ascertained that the concept of function is one of the major

obstacles to meaningful learning in Calculus. The article presents a historical-epistemological analysis of the concept of function, from the Babylonians to Leibniz and Newton, devising from these proposals for teaching the concept of function in Secondary / High Schools or even in a first Calculus discipline.

Keywords: History of Mathematics. Duval´s theory of registers of semiotic representations. Difficulties in learning function concept.

Introdução

No Ensino Superior, já nos deparamos com a perplexidade dos alunos quando se dão conta de que todo o curso de Cálculo Diferencial e Integral é baseado em funções. Já ouvimos, inclusive, de uma aluna as seguintes palavras: “eu nunca estudei funções e agora me dizem que todo o curso é baseado em funções?” Compreendemos que diversas realidades que encontramos nas escolas públicas contribuem para que um aluno ou outro tenha alguma dificuldade na sua aprendizagem antes da universidade.

De fato, em teste diagnóstico, foram observadas dificuldades de alunos ingressantes em Cálculo I, no conteúdo de funções e suas representações, a saber, a leitura e interpretação de enunciados de problemas e, posteriormente, a modelagem desses problemas; conversão da representação verbal para a analítica, em termos de funções afim, polinomiais e de várias sentenças; dificuldades com o trato algébrico (COSTA; BITTENCOURT; FERNANDES, 2016). As primeiras atividades, do teste, visaram observar as dificuldades encontradas em conteúdos identificados como obstáculos epistemológicos para a aprendizagem, em particular para a construção do conceito de função (SIERPINSKA, 1992). Os resultados dessas atividades indicam que a maior parte das dificuldades provém de lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, 2015).

Segundo Caraça (1989), a realidade apresenta duas características fundamentais: a interdependência, que faz com que todas as coisas estejam relacionadas umas com as outras, e a fluência, que faz com que tudo no mundo esteja em permanente mudança. Para ao autor, esta realidade, a qual “a inteligência dos homens se esforça por compreender, o Mundo, no seu sentido mais largo, apresenta-se com [estas] duas características essenciais” (CARAÇA, 1989, p. 109): interdependência e fluência. Daí, seguramente, surge a dificuldade da construção do conceito de função, seja pela variada gama de matemáticos que se debruçaram para encontrar a melhor forma de compreensão da realidade do mundo físico, seja pelo nosso estudante na sua aprendizagem do conceito nos Anos Finais da Escola Básica.

Procurando somar, à nossa realidade, propostas para preencher lacunas entre o Ensino Básico e o Ensino Superior no que se refere ao conceito de função, fazemos uma análise histórico-epistemológica da construção desse conceito e associamos à teoria dos registros de representação de Duval (2003, 2009, 2012). O presente artigo[1] sugere algumas atividades, seguindo os quatro registros de representação predominantes na educação matemática: verbal, analítico, gráfico e tabular. Esperamos, com isso, alcançar uma aprendizagem profunda do conceito de função pois, segundo Duval (2012), para termos uma compreensão completa de um objeto matemático, construindo cognitivamente este objeto, é necessário ter domínio de suas várias formas de representação ou registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc.). Nesse sentido, acreditamos alcançar, sim, uma compreensão profunda, completa, que não dê margem a dúvidas sobre o conceito de função.

Revisitamos Duval (2003, 2009, 2012) para dar um significado ao objeto função na busca do seu completo entendimento. O uso de registro de representações é citado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na competência específica IV de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio: "Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas" (BRASIL, 2018, p. 538).

A análise histórico-epistemológica nos leva a observar na história como surgiu o ente matemático função. Essa retrospectiva histórica vem auxiliar o professor na aprendizagem do conceito, pois segundo a BNCC, "para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática" (BRASIL, 2018, p. 299).

A visão histórica, aqui apresentada, é fruto de pesquisa com base em vários autores, dentre eles Smith (1953), Youschkevitch (1976), Rüthing (1984), Boyer (1996), Ifrah (1997) e Roque (2017). Em verdade, mais autores fizeram parte da nossa pesquisa, entretanto, o que está aqui exposto de mais importante para o tema em questão, ensino de função, está relacionado a esses sete autores. Bom que se ressalte que é primeira vez que o grupo estuda a relação ensino de Matemática e História da Matemática e, por isso, a pesquisa compreendeu uma gama grande de autores. Como o tema, ensino do conceito de função, é recorrente do nosso grupo de estudo, nosso foco tinha sido, até então, a relação ensino de Matemática e a teoria de registros de representação semiótica.

Por meio do desenvolvimento histórico do conceito de função, sugerimos duas atividades para uma compreensão intuitiva do conceito, de forma que, num segundo momento, podendo ser

[1] Uma versão preliminar foi apresentada no IX SPEM-RJ, 2020.

alguns meses mais tarde, compreender o conceito. Uma terceira atividade apresentada, bastante simples, é ainda a tentativa de seguir o desenvolvimento histórico. E, por fim, nossa quarta atividade, problema do táxi, contém uma matematização[2] inicial, em que o conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria com generalizações.

Teoria dos registros de representação de Duval: breve apresentação das ideias

O que difere a matemática de outras ciências, por exemplo, é o tipo de objetos com os quais trabalhamos. Se por um lado podemos, em zoologia, apontar um quadrúpede, ou, em física, mostrar e estudar a queda de uma bola, o movimento de um pêndulo, em matemática os objetos de estudo não existem no plano material, por isso:

> A única coisa que podemos fazer com os objetos matemáticos é descrevê-los, defini-los, denotá-los, denominá-los, desenhá-los, ..., isto é, fornecer representações semióticas. Podemos indicar a aresta que se forma entre duas paredes de um quarto e dizer que representa ou que faz alusão a uma reta; podemos apontar o vértice de uma caixa e dizer que representa um ponto; levantar três dedos da mão direita e dizer que representam o número 3; escrever na lousa $3 = 2 + 1$ e dizer que representa uma igualdade ; escrever $2x + 3 = 1$ e dizer que representa uma equação... Mas não podemos colocar nas mãos dos nossos estudantes uma reta-coisa, um número-coisa, uma equação, uma igualdade [...]. (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 131-132)

A falta de acesso sensível, tais como visão, olfato etc., aos objetos em matemática nos impõe trabalhar com representações em diversos registros, que passamos a descrever adiante, segundo a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, educador matemático e filósofo francês (DUVAL, 2003, 2009, 2012; D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

Semiótica nos remete à palavra signo (*semeion* em grego, geralmente traduzido por signo), definida por Peirce (2005, p. 46) como "aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém". Sua teoria dos signos (semiótica) "fundamenta-se na ideia de que a cognição, o pensamento e até mesmo o ser humano possuem uma natureza essencialmente semiótica" (D' AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 59). Podemos pensar a representação semiótica de um objeto matemático como a representação em forma de signo.

Um enunciado em língua materna, uma fórmula algébrica, um gráfico de uma função ou uma figura geométrica, um conjunto de números, por exemplo, são representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes, com diferentes signos. De acordo com Duval (2012), para termos uma compreensão completa de um objeto matemático, ou "construir cognitivamente" este

[2] Entendemos matematização segundo Hans Freudenthal (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 243) que via a matemática como uma atividade humana, dando origem à educação matemática realística.

objeto, é necessário ter domínio de suas várias formas de representação ou registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc.).

Por exemplo, a reta numérica possui as seguintes representações:

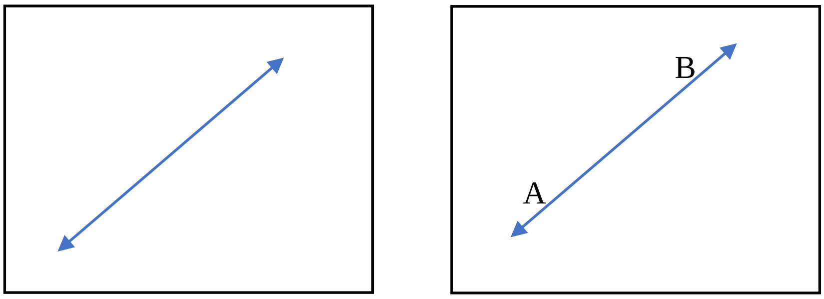
a. Língua natural ou materna: reta;

b. Registro das figuras geométricas: com os pontilhados ou com as setas nos dois sentidos (Fig. 1 (i));

c. Representação simbólica geral (no registro da escrita simbólica da geometria): r, reta AB (Fig. 1 (ii)), etc.

(D' AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 117)

Figura 1 – Representações da reta numérica



(i) (ii)

Fonte: Elaborado pelos autores, segundo imagem de D´Amore, Pinilla, Iori (2015, p. 117).

De acordo com Duval (2009, p. 15), uma das causas das dificuldades na compreensão de um objeto matemático é a falta de percepção da relação entre ele e as diversas formas de registro de sua representação, pois

> não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. (DUVAL, 2009, p. 15)

Ele distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento é definido como uma transformação da representação no próprio registro em que ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna. Por outro lado, a conversão envolve uma transformação de uma representação em outro tipo de registro. De acordo com Duval (2003, p. 31), "há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato". A equação cartesiana de uma reta, por exemplo, pode ser submetida a um tratamento ao ser transformada em equação reduzida. Já a passagem dessa equação para uma tabela ou para uma representação gráfica caracteriza uma conversão. No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval (2009) se apresenta como a necessidade de levar os alunos a dominar as representações verbal, gráfica, tabular e analítica, e a articular a transição entre esses registros.

O desenvolvimento histórico do conceito de função: uma revisão epistemológica

Segundo registrado pela humanidade, a etapa inicial da construção desse conceito ocorreu na Idade Antiga, que foi o período da história que se desdobrou desde a invenção da escrita (4000 a.C. a 3500 a.C.) até a queda do Império Romano do Ocidente (476 d.C.) e início da Idade Média (século V). Youschkevitch (1976, p. 39) aponta que, nessa etapa primeira, havia apenas o estudo de casos particulares de dependência entre duas quantidades. Não tinham ainda despertado para a relação entre variáveis.

De acordo com que se sabe da História da Matemática, os povos, como Babilônicos e Egípcios, já pressupunham de maneira intuitiva a ideia de função pois se utilizavam de tabelas para anotar operações. Enquanto os Mesopotâmicos empregavam tabelas de produtos, de inversos e de raízes, os egípcios usavam sequências de duplicações, ou divisões por 2, e inversões. Em ambos os povos, as tabelas estavam presentes, não apenas para facilitar e memorizar os cálculos, mas sobretudo por causa da dificuldade dos cálculos (ROQUE, 2017, p. 89). A Figura 2 mostra um tablete pertencente à coleção Frau, Professor Hilprecht de Antiguidades Babilônicas, e se encontra na Universidade Friedrich Schiller de Jena. Nela podemos ver uma tabela em que foram cunhados recíprocos ou inversos multiplicativos de números naturais.

Figura 2 - Tablete babilônico HS 201

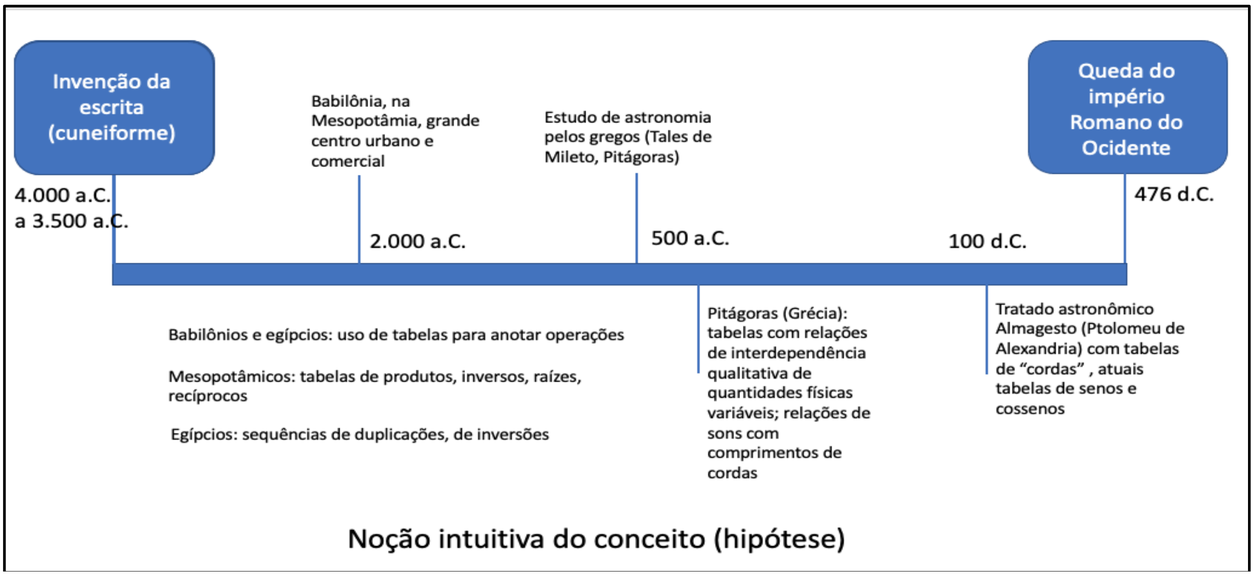
Fonte: Gonçalves (2013).

Vemos despontar novos gérmens do conceito de função nos Pitagóricos, Grécia, ainda na Idade Antiga. Novamente se utilizam de tabelas quando mostram a relação de interdependência qualitativa de quantidades físicas variadas, por exemplo, os comprimentos e as notas emitidas por uma corda fixa nas extremidades (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 39).

Função como expressão analítica não era concebida pelos matemáticos em tempos idos. Mas, se pensamos como uma relação que associa a cada elemento de um conjunto de números com elementos de outro conjunto, então, abundam funções por todo tratado astronômico Almagesto, de Ptolomeu de Alexandria (c. 100 - c. 170). Por exemplo, nesse tratado, encontramos as tabelas de “cordas”, que são equivalentes às nossas tabelas de seno e cosseno (SILVA, 2013, p. 27).

Na Figura 3, pontuamos algumas conquistas da humanidade, na Idade Antiga, e fatos inerentes ao desenvolvimento do conceito de função, sem se aprofundar nessa relação, por não caber aqui uma análise aprofundada.

Figura 3 – Linha do tempo – Antiguidade (etapa inicial da construção do conceito de função)



Fonte: Elaborado pelos autores, segundo Youschkevitch (1976).

Passemos agora para a Idade Média, que é o nome do período da história localizado entre os anos 476 e 1453. Ele se inicia com a queda do Império Romano do Ocidente e termina durante a transição para a Idade Moderna. Youschkevitch (1976, p. 39) considera que, nessa época, a matemática entrou no segundo estágio do desenvolvimento do conceito de função. Segundo ele, foi

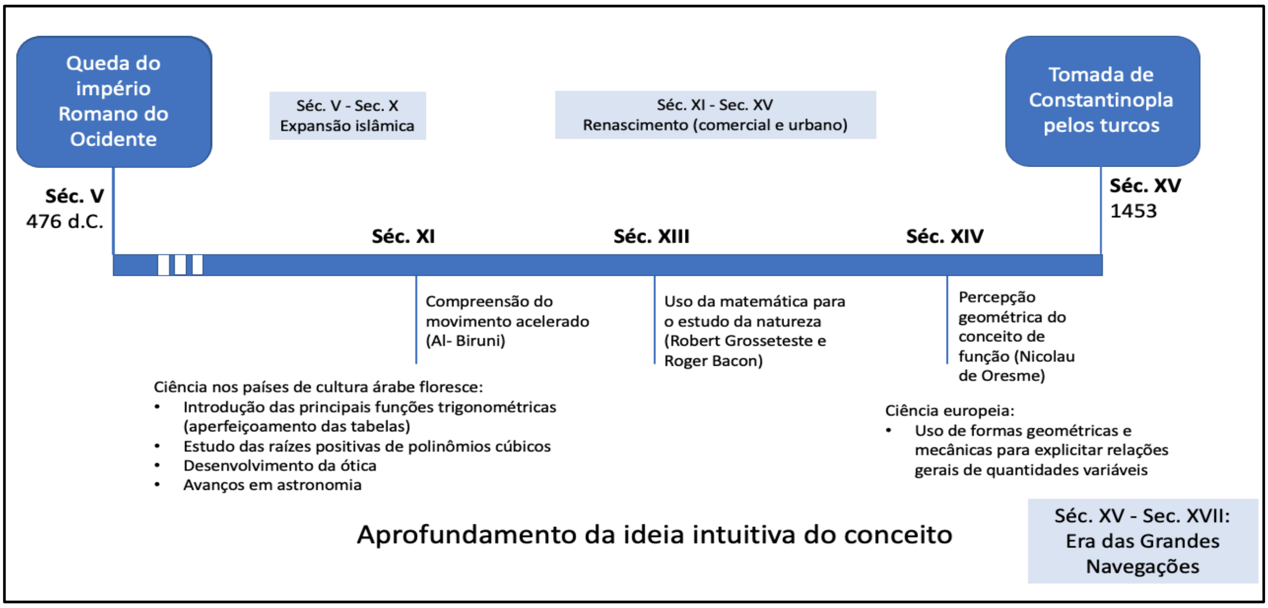
> na ciência europeia do século 14 que as noções gerais de quantidades variáveis foram definitivamente expressas tanto em formas geométricas quanto mecânicas, porém nas quais, como também na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definido por uma descrição verbal, ou por um gráfico, ao invés de fazer uso de uma fórmula. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 39)

Realmente, no início da Idade Média, vemos que a ciência nos países de cultura árabe floresce. Contribuíram os árabes com a introdução de cada uma das principais funções trigonométricas para as quais os métodos de tabulá-las foram aperfeiçoados, também com o estudo das raízes positivas de polinômios cúbicos. Igualmente, eles foram responsáveis pelos avanços em ótica e em astronomia (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 45). Entretanto, não foram observados novos desenvolvimentos em relação ao conceito de função, ainda que o número de funções em uso tenha aumentado e seus métodos de estudo aprimorados.

Embora, na Idade Média, a Matemática não tenha definido função, ainda que trabalhando o tempo todo com elas, vários matemáticos contribuíram para uma compreensão do movimento, procurando por suas leis. Al-Biruni (973- c. 1052, séc. XI) foi um deles. Notável matemático da idade de ouro islâmica, em um dos seus tratados encontramos uma análise do movimento acelerado (RAGAB; METZGER, 2015, p. 1). Contudo, "sua análise e suas ideias não exerceram influência nos seus sucessores" (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 45). Somente no século XIII uma noção de função mais geral aparece em trabalhos de Robert Grosseteste (1175-1253) e Roger Bacon (1220-1292), que pensavam a Matemática como principal instrumento para o estudo da natureza YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 45). Um pouco depois dessa época, Nicolau de Oresme (1323–1382), matemático francês, apresenta sua teoria de amplitude das formas ('*latitutes of formes*', YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 46). A teoria de amplitude das formas consistia na representação de todas as quantidades e relações entre elas mediante formas geométricas; portanto, a relação entre variáveis, em uma função, ainda não tinha surgido. Para entendermos como, na época, eles relacionavam domínio com imagem, sem considerar a forma atual de representação desses conjuntos, a literatura nos aponta Oresme. Ele representou geometricamente a velocidade variando com o tempo, ao estudar o movimento com aceleração constante (REZENDE; BOTELHO, 2007, p. 2).

Um resumo é apresentado na Figura 4 a respeito dos avanços no entendimento do conceito de função. Vale ressaltar que, nessa época, a matemática era composta por: aritmética, música, geometria e astronomia.

Figura 4 – Linha do tempo – Período Medieval (segundo estágio do desenvolvimento do conceito)



Fonte: Elaborado pelos autores, segundo Youschkevitch (1976).

Até o momento, constatamos que sequer a dependência entre variáveis, atualmente ensinada quando o professor da Escola Básica apresenta uma função, tinha sido construída. Ingressemos, então, na Idade Moderna, período da história ocidental compreendido entre os anos de 1453, com a tomada de Constantinopla pelo Império Otomano, e 1789, início da Revolução Francesa. Nessa época, observamos a importância do surgimento de uma nova Álgebra que termina por conduzir à relação entre variáveis. Essa Álgebra, dentre outras áreas da Matemática, sobreveio devido aos gregos. De fato, segundo Youschkevitch (1976), foi o progresso dos gregos em aumentar o número de dependências funcionais usadas e em descobrir novos métodos para estudá-las que alavancou o surgimento de uma nova Álgebra, a Geometria Analítica e o Cálculo Infinitesimal (séculos XVI e XVII). Ao estudarmos a História da Matemática, constatamos que essas três áreas são exatamente os degraus que a humanidade necessitava para chegar ao conceito de função, à sua formalização. A Álgebra nos trouxe a notação das variáveis, a Geometria Analítica veio mostrar claramente a ideia de correspondência entre dois conjuntos, o que faltava para a compreensão dos dois primeiros conceitos essenciais, variável e dependência.

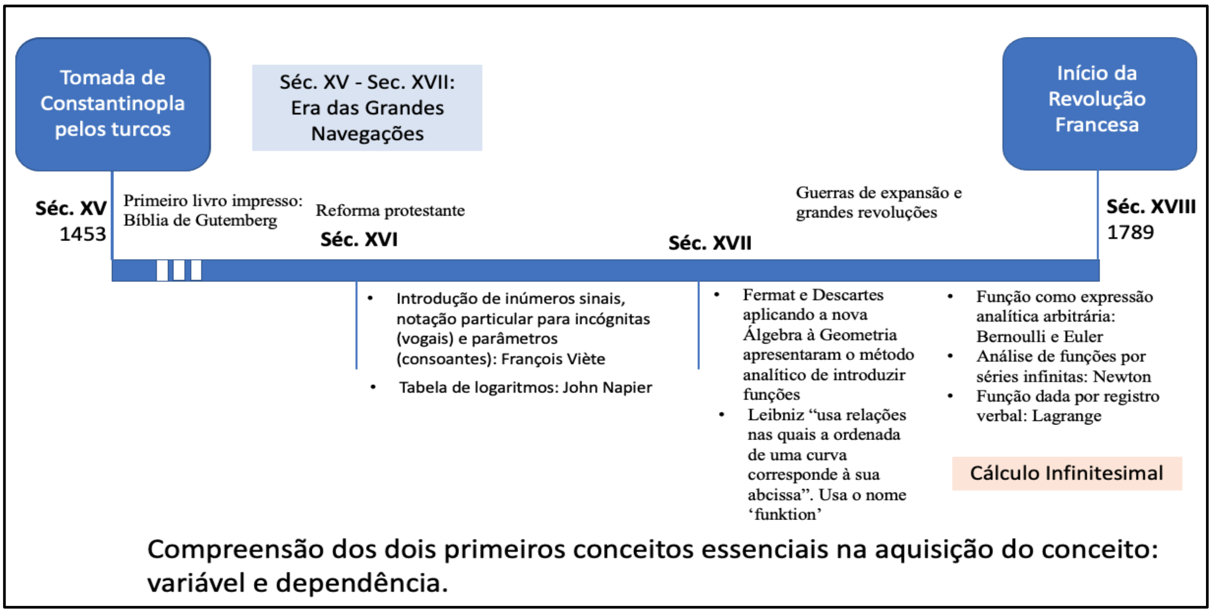
Podemos destacar dois matemáticos responsáveis por esse progresso na compreensão do conceito de função: François Viète (1540-1603) e John Napier (1550-1617). Viète introduziu inúmeros sinais/signos, uma notação particular para incógnitas (vogais) e parâmetros (consoantes), e Napier sua tabela de logaritmos. Contudo, Napier não usou sua notação para chegar a um conceito de função, e seu simbolismo foi aperfeiçoado por outros que chegaram muito próximo, ainda na Idade Moderna, do conceito de função: Descartes, Newton e Leibniz.

Fermat (1607-1665) e Descartes, aplicando a nova Álgebra à Geometria apresentaram o método analítico de introduzir funções que revolucionou a Matemática e assegurou um lugar central para a posterior noção/conceito de função em todas as ciências exatas. Leibniz (1646-1716) “usa relações nas quais a ordenada de uma curva corresponde à sua abcissa. Não coloca ainda a palavra função no sentido mais amplo e o nomeou com a palavra relação” (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 59). A palavra função (‘funktion’) surge na época com o significado de tarefa, posição ou modo de operação.

Seguindo a construção do conceito, ainda na Idade Moderna, despontam os matemáticos Johann Bernoulli (1667-1748) e Euler (1707-1783), considerando uma função como uma expressão analítica arbitrária. A análise mediante séries infinitas levou Isaac Newton (1643-1727) a definir função por meio delas. O método de fluxões foi aplicado a variáveis (fluentes) para o cálculo das taxas de variação (fluxos). Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736- 1813) descreve uma função usando um registro verbal. Na passagem do séc. XVIII para o séc. XIX, temos Augustin-Louis Cauchy (1789- 1857) dando um exemplo de uma função de duas sentenças.

De forma bastante resumida, apresentamos, na Figura 5, um resumo do desenvolvimento do conceito de função, na Idade Moderna. Essa terceira etapa foi certamente facilitada pela introdução (por Viète) da notação matemática.

Figura 5 – Linha do tempo – Idade Moderna (a busca pela definição de função)



Fonte: Elaborado pelos autores, segundo Youschkevitch (1976).

Na passagem para a Idade Contemporânea, encontramos Johann Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1789- 1857), o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas. Exemplo dado por ela: f(x) = c se x é racional, e f(x) = d se x é irracional, c e d constantes. Nicolai Ivanovich Lobatchevsky (1792- 1856) apresentou uma definição de função semelhante à definição de Dirichlet. Contudo incluiu a possibilidade de a função ter pontos isolados de descontinuidade, mas não considerando necessário acrescentar explicação algébrica (RÜTHING, 1984).

Em 1870, Hermann Hankel (1839- 1873) definiu função em registro verbal somente, como tantos outros matemáticos do seu tempo:

> uma função y de x, porque todo valor da variável x dentro de um certo intervalo corresponde a um certo valor de y; não importa se y é ou não dependente de x em todo intervalo de acordo com a mesma lei; se a dependência pode ou não ser expressa por meio de operações matemáticas. (RÜTHING, 1984, p. 75, nossa tradução)

George Boole (1815-1864, inglês) definiu função como transformação (em que cada elemento *x* é transformado no elemento *f(x)*), enquanto Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) utilizou a ideia de aplicação. E, finalmente, quando um grupo de matemáticos, em sua maioria franceses, criou a personagem Nicolas Bourbaki, um pseudônimo coletivo sob o qual escreveram uma série de livros que expunha a matemática da época, chegou-se à definição dos nossos livros da Escola Básica (RÜTHING, 1984, p. 77).

Atividades: algumas possibilidades

Apresentamos, nesta seção, algumas atividades, na forma de exercícios, as quais o professor poderá utilizar em sala de aula, numa tentativa de acompanhar, segundo o ano escolar do aluno, a evolução do conceito de função. A nossa experiência diz que a forma como é ensinado o tópico funções, partindo da definição, muitas vezes, não leva o aluno a uma completa compreensão do conceito, fazendo-o incorrer em repetidos erros em avaliações durante sua formação acadêmica. As duas primeiras atividades inserem os alunos em problemas que, intuitivamente, carregam o conceito de função. A terceira atividade segue o mesmo objetivo, apresentar o conceito de função, sem se referir ao objeto matemático como função, entretanto trazendo um diferencial, um registro geométrico. Na quarta atividade, para uma série/ano em que o aluno já tenha adquirido essa ideia intuitiva, esperamos, o professor usa de matematização segundo Freudenthal (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 243). Cada uma das atividades foi planejada de modo que, além de seguir o desenvolvimento histórico do conceito de função, como já mencionado, todas contemplem algum tipo de registro. Devido à pandemia de Covid-19, não tivemos a oportunidade de aplicar essas atividades em sala de aula para a escrita do artigo.

De acordo com a BNCC, a competência específica 1 de Matemática para o Ensino Fundamental é:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma

> ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 269)

O ensino de função na Educação Básica de acordo com a BNCC traz uma nova proposta de oferecer ao aluno a possibilidade de pensar a partir de informações compartilhadas e responder de uma maneira participativa e ativa. Temos observado o interesse mostrado pelos nossos alunos quando apresentamos algum fato histórico relacionado à matéria dada. Envolvidos com a dimensão dos processos históricos de ensino-aprendizagem de Cálculo I, em 2020, um dos autores apresentou um filme na primeira semana de aula, em ensino remoto, sobre a história do Cálculo envolvendo René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1673-1694), Johann Bernoulli (1667-1748), dentre outros. Foi aberto um fórum para discussão do filme e de alguns pontos específicos. O que constatamos foi, na maioria dos alunos, a surpresa de que a disciplina Cálculo fazia parte da vida deles, muito além de ser somente uma disciplina do curso de Administração, parte apenas da sua vida acadêmica.

Pesquisadores do grupo francês IREM (*Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*) acreditam que “os professores das disciplinas de exatas estão mais conscientes da dimensão cultural da matéria que ensinam face a uma apresentação da ciência como ‘produto terminado’”, como se apresenta hoje, seja na Escola Básica ou no Ensino Superior (VERLEY et al., 1991, tradução nossa). E acrescentam que:

> La confrontation avec les textes des mathématiciens change la représentation que chacun, enseignant ou élève, a des mathématiques. Celles-si prennent vie, eles ne sont plus um objet figé. Elles sont objets de recherches, de controverses, d´erreurs et de tâtonnements[3]. (VERLEY et al., 1991, p. 43)

A primeira atividade é a construção de uma tabela, portanto, uma representação tabular de uma função, relacionada à noção intuitiva como compreendemos que havia na época, segundo Youschkevitch (1976), noção intuitiva do conceito (Fig. 3). A escolha do sexto ano do Ensino Fundamental para começar a construção desse conceito, devemos a Tinoco (2001), a qual afirma que a compreensão intuitiva pode e deve ser dada nesse ano, ou até antes.

<u>Atividade 1</u>: Escrever uma tabela de recíprocos.

Objetivo: Representar uma função na sua forma tabular.

Público: alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Duração: 1 tempo de 50 min (sem oficina), ou mais 4 tempos (para a oficina).

O professor, ao introduzir o conceito de fração, solicita aos alunos que, a partir de uma

[3] “O confronto com os textos dos matemáticos muda a representação que todos, professor ou aluno, têm da matemática. Estes ganham vida, não são mais um objeto congelado. Eles são objeto de pesquisa, controvérsia, erros, e tentativa e erro” (tradução nossa).

medida (comprimento) que pode ser a diagonal da sala de aula, ou um dos lados da janela da sala de aula, ou mesmo, a altura da porta da sala de aula, dividam esta medida em partes (metade, um terço, quarta parte etc.). Sugerimos que o professor considere aproximação dessas partes pois o foco do exercício não é calcular fração, mas, sim, associar a coluna da esquerda de uma tabela à coluna da direita em uma relação biunívoca. Em seguida, pede a eles que preencham a segunda coluna de uma tabela com frações relacionadas à primeira coluna (2 partes, 3 partes, 4 partes, ...). Caso seja possível, na escola, propomos que o professor faça uso de uma oficina de tabletes, segundo orientações de Gonçalves (2013).

A segunda atividade, aqui proposta, é mais elaborada pelo fato de o professor necessitar explicar a seus alunos o método de multiplicação dos egípcios. Sugerimos que a atividade seja dividida em duas partes, porém com total de 50 min de duração.

Atividade 2: Método egípcio de multiplicação.

Objetivo: Representar uma função na sua forma tabular.

Público: alunos do 6º ano do Ensino Fundamental

Duração: 50 min.

A primeira parte da atividade consiste em explicar o método egípcio de duplicação para realizar multiplicações. O professor pode usar, como exemplo, a multiplicação de 42 por 31 (Figura 6), atribuída ao matemático Stifel, que pode ser encontrada em livros do período Renascentista (SMITH, 1953, p. 106). A partir da multiplicação *42*x*31*, num segundo momento, o professor deverá usar de diagramas com os conjuntos {*1*, *2*, *4*, *8*, *16*} e {*42*, *84*, *168*, *336*, *672*} e mostrar a relação entre eles (desenhando setas). Ainda, sem usar a palavra função, pedir aos alunos para completem novos diagramas cuja relação entre os números pode ser *x* e *50x*, ou *x* e *73x*.

Figura 6 - Exemplo de produto usando o método de duplicação dos egípcios

1 . 42 =	42
2 . 42 =	84
4 . 42 =	168
8 . 42 =	336
16 . 42 =	672
31 . 42	1302

Fonte: Elaborado pelos autores, segundo Smith (1953, p. 106).

Como uma atividade extra e variação desse exercício, usamos o exemplo de Stifel (SMITH, 1953, p. 106), Figura 7, no qual alguns dados são omitidos num diagrama justamente para que o aluno possa completar. Isso será importante mais tarde, quando este mesmo aluno se deparar com a definição de função inversa. Essa atividade é muito simples, mas, acompanhando-a, existem conceitos relacionados a funções que serão aprofundados mais tarde. O direcionamento dos exercícios para pontos importantes do conceito de função nos parece uma boa metodologia para a aquisição efetiva do conceito ao longo do caminho de aprendizagem percorrido por esse aluno.

Figura 7 - Exercício de completar usando o método de duplicação dos egípcios

? . 42 =	42
2 . 42 =	84
? . 42 =	168
8 . 42 =	336
? . 42 =	672
31 . 42	1302

Fonte: Elaborado pelos autores, segundo exemplo de Stifel (Smith, 1953, p.106).

Nossa terceira atividade envolve uma representação gráfica de um problema de cinemática simples, ainda sem mencionar a palavra função, mas partindo da intuição que os estudantes possuem do movimento (velocidade, aceleração). Atividade é inspirada na percepção geométrica de Nicolau de Oresme em sua teoria de amplitude das formas (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 46). Sendo essa atividade um problema relacionado ao movimento, embora rudimentar, acreditamos que ele possa levar aos estudantes um conceito inicial sobre função. Temos, nesse caso, uma compreensão intuitiva, conjuntamente com uma matematização inicial, quando, aos nossos alunos, apresentamos problemas de cinemática, trazendo a eles um fenômeno que se repete, tem certa regularidade e precisa ser generalizado (TINOCO, 2001). Embora não tenhamos o gráfico de quaisquer das funções envolvidas na atividade, trabalhamos com uma forma geométrica, inspirada em Oresme, para trabalhar um problema cinemático simples.

<u>Atividade 3</u>: Um problema de cinemática.

Objetivo: Apresentar, em um problema de cinemática, conceitos essenciais (variável – dependência – regularidade – generalização), sem definir função, usando ideia intuitiva de velocidade que o aluno traz do dia a dia. O emprego de geometria na atividade é um convite para que, posteriormente, o aluno possa passar de um registro verbal para um registro gráfico, sem dificuldade em identificar a mesma função. A inspiração em Oresme é proposital para que as atividades sigam o desenvolvimento histórico do conceito de função.

Público: alunos a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.

Duração: 50 min.

A atividade relaciona a distância percorrida por um táxi, numa estrada reta, com o tempo gasto (mais adiante, ampliamos o problema, nossa quarta e última atividade, sob o ponto de vista da matemática financeira). Mais uma vez dividimos a atividade em dois momentos:

Parte 1: O professor desenha uma tabela, tempo *versus* quilometragem, considerando a cada 10 min, por exemplo, a distância percorrida por um táxi em uma estrada reta. A Tabela 1 apresenta um exemplo para essa atividade.

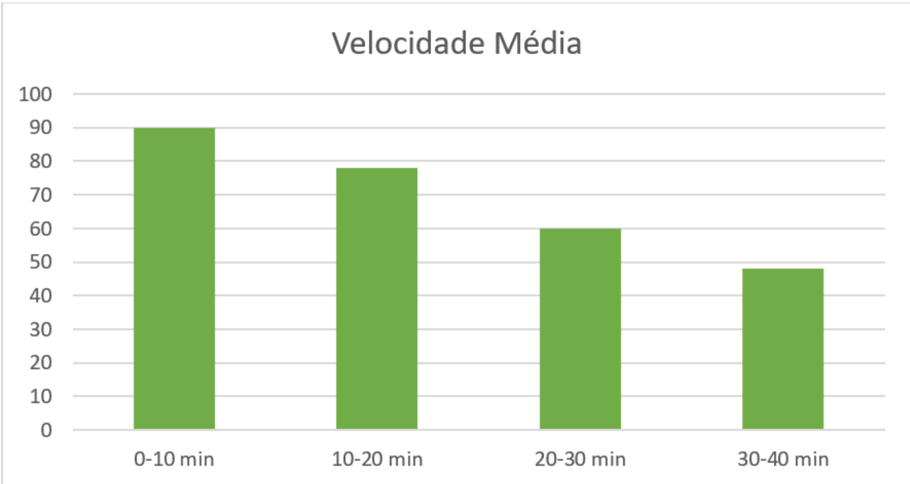
Tabela 1 – Exemplo de dados para a Parte 1 - atividade 3

t (tempo)	s (distância percorrida)
10 min	15 km
10 min	13 km
10 min	10 km
10 min	8 km

Fonte: Elaborado pelos autores.

Parte 2: São calculadas as velocidades médias que, nesse caso, não serão constantes. E, seguindo a forma de representação de Oresme para tempo *versus* velocidade (MENDONÇA; NETO, 2016, Fig. 2, p. 51), é feita uma representação semelhante (tempo na horizontal e barras verticais com as velocidades médias, Fig. 8). Por fim, o professor discute com os estudantes o que pode significar, em termos de aceleração, as mudanças de velocidade média ao longo do tempo.

Figura 8 – Exemplo de dados para a Parte 2 - atividade 3 considerando a Tabela 1



Fonte: Elaborado pelos autores.

Nessas escolhas de atividades, já passamos pelo registro tabular, passando agora para um registro 'inicial' gráfico, sendo de fácil compreensão do estudante, inclusive para a discussão final da atividade. Em nossa quarta atividade, por fim, discutimos com os estudantes vários registros de representação de uma função (verbal, analítico e gráfico) para a completa compreensão do conceito.

<u>Atividade 4</u>: Problema do táxi.

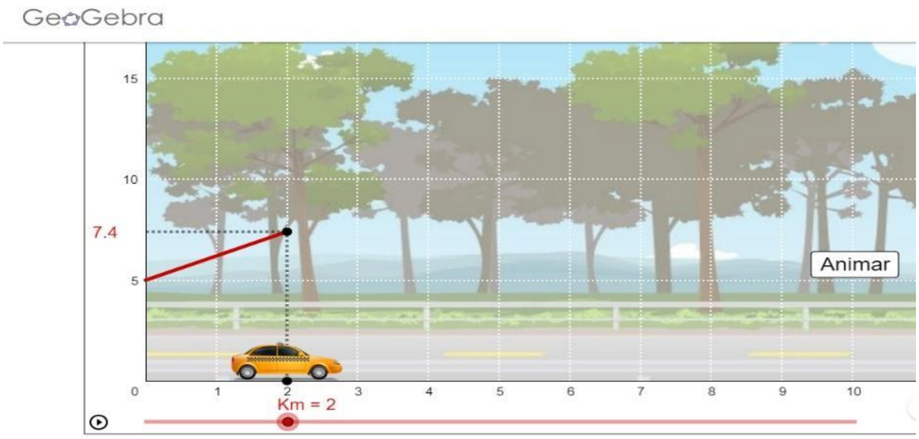
Objetivo: Discutir com os alunos os seguintes registros de representação de função: verbal, analítico e gráfico.

Público: alunos a partir do 9º ano do Ensino Fundamental.

Duração: 50 min.

Esta atividade pode ser aplicada, conjuntamente, com a atividade 3 para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, considerada, então, uma terceira parte daquela. Utilizamos, desta vez, um exercício do banco de dados do GeoGebra (Fig. 9) de Azuaite Schneider (SCHNEIDER, 2018). O professor descreverá para seus alunos como é cobrado o valor a ser pago pelo passageiro: quando você utiliza um táxi, o valor cobrado no final do trajeto é a soma do valor da "bandeirada" com o valor referente ao número de quilômetros rodados. A "bandeirada" é um valor fixo, cobrado pelos taxistas, que independe de quantos quilômetros você vai rodar. Você pode observar que, ao entrar em um táxi, já está fixado esse valor no taxímetro. Você também pode observar que, para cada quilômetro rodado, há um valor fixo, isto é, a variação do preço é proporcional à distância percorrida. Suponha que o valor da bandeirada seja de R$5,00 e que o valor de cada quilômetro rodado seja R$1,20. Então, a função que relaciona o número de quilômetros rodados com o valor total a ser pago é uma função afim ~~dada pelo gráfico acima~~ (SCHNEIDER, 2018). Portanto, o professor usará do registro gráfico com animação para a descrição do problema. A partir daí, ele obtém o registro algébrico.

Figura 9 - Exemplo da tarifa a ser paga durante uma corrida de táxi



Fonte: Schneider (2018).

Todas as quatro atividades sugeridas podem ser aplicadas, num primeiro momento, para levar aos estudantes do Ensino Médio o conceito de função, sem necessariamente definir função. A definição deverá ser dada num segundo momento, por exemplo, no bimestre seguinte. Não estamos sugerindo, em hipótese alguma, que o professor omita a definição ou sequer fale a palavra função. O que recomendamos é o ensino por etapas, seguindo cronologicamente o desenvolvimento histórico do conceito para somente, então, passar para a definição. Nasser e Cardoso (2016) apontam que a aprendizagem de funções é um processo evolutivo, lento e gradual devido à sua complexidade, uma vez que existem vários tipos diferentes de representações para uma mesma função. Assim, o ensino-aprendizagem do conceito de função não se esgota nas quatro atividades, ao contrário, apenas inicia-se.

Considerações Finais

Abordamos a importância dos aspectos históricos na evolução do conceito de função, pois acreditamos que, antes de descrever os vários modos de interagir com as funções em aplicações e problemas diversos, é importante saber como surgiram, quem desenvolveu e aprimorou. Na Educação Básica, a apresentação de função é superficial, muitas vezes apenas com o uso de fórmulas para resolução de problemas e interpretação de gráficos. Deveria ser abordada de uma forma mais interessante, mostrando-a como uma conquista coletiva, em que cada passo do desenvolvimento do conceito de função fosse discutido e modificado ao longo dos séculos. As várias etapas dessa conquista mostram, igualmente, o crescimento do pensamento abstrato, dando oportunidade ao estudante em seguir esse caminho na sua construção do conceito de função.

O que faz a construção da matemática e a consequente construção das funções no seu bojo são as necessidades da época. Foi possível pontuar em cada época em que nível se encontrava o conceito de função. Pela própria necessidade da época, na Antiguidade, em que a matemática se encontrava em pleno desenvolvimento, segundo o que tem chegado até aos nossos dias, a função encontrava-se implícita na resolução de problemas práticos.

Por isso, sugerimos atividades que, de uma forma ou de outra, apresentam o desenvolvimento histórico do conceito de função; em particular, exercícios que envolvam tabelas do que poderia ser uma função, sem que seja dada a definição de função, mas apenas a compreensão intuitiva, para alunos a partir do 6º ano, baseando-se em Tinoco (2001).

A terceira atividade segue o movimento histórico na busca do conceito, pois da fase de descrição tabular de funções, surge um esboço de representação geométrica na Idade Média nos trabalhos de Oresme,ainda que sua representação não seja aquela de Descartes usando o plano cartesiano. Com a quarta atividade, finalizamos nosso grupo de atividades sugeridas, nos inspirando no início da Idade Moderna, quando Viéte traz o simbolismo que impulsionará para passagem da representação verbal e/ou tabular para uma expressão algébrica. Seguindo em diante com relação à evolução do conceito, as atividades, não acreditamos, sejam próprias para a Escola Básica, pois a Idade Moderna se caracterizou pelo nascimento da ciência moderna, quando Isaac Newton contribuiu utilizando, justamente, um método experimental, baseando-se na indução ao invés de se prender nos resultados mediante observação. Nos séculos XVI e XVII as contribuições causaram importantes transformações, marcando assim esse período, que está relacionado ao nascimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Agradecimentos

Este trabalho, quanto ao aspecto histórico da Matemática, é fruto de pesquisa no grupo de estudo de História da Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da UERJ, coordenado pelo professor João Bosco Pitombeira.

Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular** – Ensino Fundamental. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica>. Acesso em: 27 set. 2020.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

COSTA, A. C.; BITTENCOURT, R. R.; FERNANDES, F. A. Análise de erros em questões sobre função afim. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6771_3608_ID.pdf>. Acesso em: 27 set. 2020.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica:** sua presença e importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

______. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: R. Eletr. De Educ. Matemática, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 02 out. 2020.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de Ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237–252, 2016.

GONÇALVES, C. Introdução à Matemática Cuneiforme e Oficina de Tabletes. In: SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 1., 2013, Brasília. SBM: Brasília, 2013. 43 p. Mini-curso. Disponível em: <https://sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/26/2017/07/Minicurso_Carlos_Matematica_Cuneiforme_e_Oficina_de_Tabletes.pdf>. Acesso em: 10 março 2020.

IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

MENDONÇA, Adriana Ferreira; NETO, Hermínio Borges. Nicole Oresme: Perspectivas Históricas para Uso em Sala de Aula. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Ceará, v. 3, n. 9, p. 48–62, dez. 2016. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM>. Acesso em: 24 ago. 2020.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Atas...** Petrópolis: SBEM, 2012. 1 CD-ROM.

______. Aprendizagem de cálculo: dificuldades e sugestões para a superação. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2015. **Atas...** Tuxtla Gutierrez: 2015.

NASSER, L.; CARDOSO, E. Adaptação da teoria de Van Hiele para o tópico de funções no Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais..**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5104_2377_ID.pdf>. Acesso em: 04 out. 2020.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2005.

RAGAB, A.; METZGER, A. al-Bīrūnī, Abū Rayḥān. In: AMILS R. et al. (Ed.) **Encyclopedia of Astrobiology**. Berlin: SpringerLink, 4 maio 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-27833-4_5190-1>. Acesso em: 04 out. 2020.

REZENDE, W. M.; BOTELHO, L. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno Dá Licença:** revista do programa de extensão da Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, v. 6, p. 64–75, dez. 2007. Disponível em: <http://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf>. Acesso em: 12 out. 2020.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2017.

RÜTHING, D. Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki, **Mathematical Intelligencer**, Springer, v. 6, n. 4, p. 72–77, dez. 1984.

SCHNEIDER, A. Função Afim (Problema do Táxi). **GeoGebra**. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/G7YXJEYN>. Acesso em: 02 out. 2020.

SIERPINSKA, A. **The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy**. 25. Ed Dubinsky e Guershon Harel, Editores. MAA Notes and Reports Series. Montreal: Concordia University, 1992. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/238287243_On_understanding_the_notion_of_function>. Acesso em: 10 out. 2020.

SILVA, A. P. P. N. **A leitura de Fontes Antigas e a Formação de um Corpo Interdisciplinar de Conhecimentos**: um exemplo a partir do Almagesto de Ptolomeu. 2013. 95 f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 24 jul. 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16105/1/AnaPPNS_DISSERT.pdf>. Acesso em: 12 out. 2020.

SMITH, D. E. **History of Mathematics - special topics of elementar mathematics** (vol. II). New York: Dover, 1953.

TINOCO, L. **Construindo o Conceito de Função**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, projeto Fundão, 2001.

VERLEY, J.-L. et al. Mathématiques: approche par des textes historiques. **Repères-IREM**, n. 3, p. 43-52, abr. 1991. Disponível em: <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR97015/IWR97015.pdf>. Acesso em: 12 out. 2020.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, **Arch. Hist. Ex. Sci.**, Moscou, v. 16, p. 37–85, 1976.