
Transição do Ensino Médio para o Superior: Implicações das pesquisas desenvolvidas por um grupo colaborativo

Lilian Nasser

Projeto Fundação-Universidade Federal do Rio de Janeiro
lnasser.mat@gmail.com

Geneci A. Sousa

Senai Cetiqt; Uniabeu; SEEDUC RJ; SME RJ
Projeto Fundação-Universidade Federal do Rio de Janeiro
prof.geneci@yahoo.com.br

Marcelo Torraca

SEEDUC-RJ
Projeto Fundação-Universidade Federal do Rio de Janeiro
torraca@gmail.com

Resumo

As dificuldades enfrentadas na transição do Ensino Médio para o Superior têm sido investigadas desde 2012 por um grupo do Projeto Fundação (IM/UFRJ), gerando diversas publicações. Este artigo tem como objetivo resumir as principais conclusões desses trabalhos investigativos. Utilizando o método de categorização adotado em pesquisas de Análise de Conteúdo, esses trabalhos foram revisados, gerando categorias, de acordo com os tópicos matemáticos do Ensino Médio que surgiram como determinantes das dificuldades. Para cada categoria são apresentados exemplos dessas dificuldades e sugeridas estratégias de abordagem que podem ser úteis, no futuro, para aprimorar o desempenho dos calouros em Pré-Cálculo e/ou Cálculo I. O fruto desta investigação é a base para um material, baseado na Resolução de Problemas, que deve trazer sugestões para professores do Ensino Médio e/ou de Pré-Cálculo, que os auxiliem a abordar de modo motivador e investigativo os tópicos que serão úteis na disciplina de Cálculo.

Palavras-chave: Ensino Médio. Transição. Cálculo.

Transition from Middle School to Superior Education: implications from the research developed by the Fundação Project

Abstract

The difficulties faced in the transition from Middle School to Superior Education have been investigated since 2012 by a group of Projeto Fundação (IM/UFRJ), generating several publications. This article aims to summarize the main conclusions of these papers. Using the categorization adopted in the research of Content Analysis, these articles had been revised, generating categories, concerning the mathematical topics of Middle School that appeared as determinant of the difficulties. For each category examples of these difficulties are presented and strategies of approach that can be useful, in

the future, to improve the performance of the freshmen in pre-Calculus and/or Calculus I are suggested. The fruit of this inquiry is the base for a material, based on Problem Solving, that must bring suggestions for Middle School and/or pre-Calculus teachers, to help them to approach in an investigative and motivative way the topics that will be useful in the discipline of Calculus.

Keywords: Middle School. Transition. Calculus.

Introdução

Os altos índices de evasão e reprovação na primeira disciplina de Cálculo têm sido tema de pesquisas nacionais e internacionais, buscando identificar as razões para esses problemas (REZENDE, 2003; OLIVEIRA e RAAD, 2012). Este trabalho é um recorte crítico de uma pesquisa ampla, desenvolvida no âmbito do Projeto Fundação (IM/UFRJ), que visa investigar a transição do Ensino Médio para o Superior, na tentativa de empreender ações para minimizar as dificuldades em disciplinas, como Cálculo I e Geometria Analítica. O baixo desempenho de alunos calouros em Cálculo é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Educação Básica (CAVASOTTO e VIALLI, 2011; BELLETTINI e SOUZA, 2018; TORRES E HAVELANGE, 2017). Por outro lado, Tall (1991) considera a falta de domínio do pensamento matemático avançado como causa para o baixo desempenho dos calouros, alegando que “a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica” (p. 20).

Apesar disso, a maturidade para a aprendizagem de Cálculo depende de vários conteúdos estudados em etapas anteriores. Por exemplo, a Geometria do Ensino Médio explora conteúdos que podem preparar para a representação de problemas típicos de máximos e mínimos e de taxas relacionadas (BALOMENOS et al, 1994). Por outro lado, o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente necessária no Ensino Superior, como citado por Caraça (1984, p. 109), que sugere que a função surge da necessidade de interpretar fenômenos da natureza, observar a interdependência entre duas grandezas e descrever regularidades.

Na aprendizagem de Matemática, em geral, é fundamental a percepção da relação entre os objetos matemáticos e as diversas formas de registro de sua representação. Esse argumento é corroborado pela teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, que afirma que “há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato” (DUVAL, 2003, p. 31).

Duval (2011) distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento é definido como uma transformação da representação no próprio registro onde ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna. Já a conversão envolve uma transformação de uma representação em outro tipo de registro.

A proposta deste trabalho é examinar toda a produção publicada pelo grupo a partir de 2012, destacando em categorias os conteúdos da Educação Básica citados como causadores das dificuldades em Cálculo. Para isso, é usado o referencial teórico de categorização, que faz parte da Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977).

A partir da categorização, são destacadas observações e recomendações dos trabalhos analisados, sugerindo ações aos professores que, se adotadas, podem ajudar a minimizar futuras dificuldades de seus alunos na disciplina de Cálculo.

Percurso Metodológico

A metodologia de pesquisa usando a Análise de Conteúdo proposta por Bardin (1977) foi definida como um

conjunto de técnicas de análise de comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (p. 44)

Embora não seja uma etapa obrigatória, a maioria dos procedimentos de análise organiza-se como um processo de categorização. Segundo Bardin (1977), a categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo os critérios previamente definidos. Esse método de pesquisa também é recomendado por Fiorentini e Lorenzato (2009), quando afirmam que “a categorização significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns” (p. 134).

De acordo com Bardin (1977), tratar o material é codificá-lo. A codificação corresponde a uma transformação dos dados em bruto por recorte, agregação e enumeração, que permite atingir uma representação do conteúdo.

A categorização é um processo do tipo estruturalista e comporta duas etapas: o inventário (isolar os elementos) e a classificação (repartir os elementos e procurar uma organização das mensagens). O primeiro objetivo da categorização é fornecer uma representação simplificada dos

dados em bruto. As categorias definidas num primeiro momento podem ser reorganizadas e, geralmente, as categorias terminais provêm do reagrupamento progressivo de categorias.

Procedendo à primeira etapa do processo de categorização, o inventário, apresentamos, no Quadro 1, um levantamento de 15 trabalhos produzidos (e publicados) pelo grupo, que mencionam conteúdos causadores de dificuldades ou erros na resolução de tarefas típicas da primeira disciplina de Cálculo ou de Pré-Cálculo. A etapa seguinte, de análise, consiste em identificar a primeira versão das categorias.

Quadro 1: Trabalhos produzidos que compõem o inventário

	Título	Autores	Publicação
1	Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?	Lilian Nasser, Geneci A. de Sousa, Marcelo A. Torraca	V SIPEM (2012) Petrópolis-RJ
2	Preparando para a aprendizagem de Cálculo: funções e geometria no Ensino Médio	Marcelo A. Torraca, Geneci Alves de Sousa, Priscila Dias Corrêa Lilian Nasser	Acta Latina (2013)
3	Resolução de problemas de máximos e mínimos em Cálculo I: prontidão a partir do Ensino Médio	Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Geneci Sousa, Daniella Assemany, Cecilia Amorim, Joana Marques	CIBEM 7 (2013) Montevideo – Uruguai
4	A transição do ensino médio para o superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas	Geneci Sousa, Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Daniella Assemany, Cecilia Azevedo	XI ENEM (2013) Curitiba – PR
5	Abordagem significativa para o tópico de funções na Educação Básica	Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Joana Marques, Bruna Lanzellote	VI EEMAT (2014) Niterói – RJ
6	Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação	Lilian Nasser, Geneci A. de Sousa, Marcelo A. Torraca	CIAEM (2015) México
7	Mobilizações didáticas para aprendizagem do conceito de função.	Lilian Nasser Geneci A. de Sousa Marcelo A. Torraca	Capítulo do livro organizado por Fonseca (2016)

8	Funções no Ensino Médio: o que muda com a proposta da Base Nacional Comum Curricular?	Lilian Nasser, Geneci Sousa, Marcelo Torraca, Rafael Vaz, Magno Ferreira	XII ENEM (2016) São Paulo – SP
9	Cálculo Diferencial e Integral I: como os alunos estão iniciando essa disciplina no curso de engenharia?	Geneci A. de Sousa Luciano Andrade	XII ENEM (2016)
10	Explorando imagens conceituais de alunos de Cálculo I relacionadas à continuidade de funções	Jeanne Barros Lilian Nasser Geneci A. de Sousa	EEMOP (2017) Ouro Preto – MG
11	Desempenho em Cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior	Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Geneci Sousa	GEPEM (2017)
12	Conversão de representações na transição do Ensino Médio para o Superior	Ângela Biazutti, Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Jeanne Barros, Alexandre Oliveira	CAREM (2018) La Plata – Argentina
13	Conversão de representações de retas e regiões do plano no Ensino Médio	Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Jeanne Barros	EEMAT (2018) UERJ – RJ
14	Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I	Lilian Nasser Angela C. Biazutti Marcelo Torraca Jeanne Barros	CIAEM 2019 Medelín– Colômbia
15	Resolução de problemas como trampolim para a aprendizagem de Cálculo 1	Lilian Nasser Angela C. Biazutti Jeanne Barros Rafael F. Novôa Vaz	XIII ENEM (2019) Cuiabá – MT

Fonte: os autores.

Categorização dos conteúdos de Ensino Médio

Examinando esses 15 trabalhos, foi possível categorizar os conteúdos /procedimentos típicos da Educação Básica citados como causas das dificuldades na disciplina de Cálculo. Nossa primeira análise selecionou 18 categorias, determinadas por tópicos citados como pontos de dificuldades em Cálculo em um ou mais trabalhos examinados. Foi feita então uma reorganização, agrupando alguns desses pontos, que resultou nas 9 categorias, mostradas no Quadro 2. Os trabalhos citados na 3ª coluna se referem à numeração dos trabalhos de acordo com o Quadro 1.

Quadro 2: Categorias identificadas na etapa de análise dos trabalhos.

	Categoria	Frequência	Trabalhos que citam essa categoria (de acordo com os números no quadro 1)
1	Trato algébrico	8	4 – 6 – 7 – 8 – 11 – 13 – 15
2	Definição de função + Abordagem histórica	9	1 – 2 – 3 – 5 – 6 – 7 – 8 – 11
3	Características das funções	8	1 – 2 – 4 – 6 – 7 – 8 – 14 – 15
4	Gráficos de funções	12	1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 8 – 9 – 11 – 13 – 14 – 15
5	Funções definidas por várias sentenças	9	1 – 2 – 6 – 7 – 8 – 9 – 11 – 13 – 15
6	Conversão de representações + Interpretação de dados	16	3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15
7	Geometria plana + espacial	6	1 – 2 – 4 – 11
8	Vetores + Trigonometria	9	1 – 2 – 6 – 7 – 8 – 11
9	Identificar e Compreender Padrões	3	7 – 9 – 11

Fonte: os autores.

A análise desse quadro indica, por exemplo, que a categoria de trato algébrico foi citada 8 vezes como causa das dificuldades, às vezes em mais de um aspecto, nos trabalhos 4, 6, 7, 8, 11, 13 e 15. A seguir, cada categoria será examinada, com sugestões de abordagens para a Educação Básica, indicadas nos trabalhos.

Sugestões de abordagem

A maioria dos trabalhos examinados recomenda dois desdobramentos para superar as dificuldades na primeira disciplina de Cálculo. O primeiro é sugerir abordagens alternativas para as aulas de Matemática no Ensino Médio, que antecipem situações e problemas típicos, gerando o que chamamos de prontidão para o estudo de Cálculo. O segundo desdobramento é motivar os calouros para o estudo dessa disciplina, por meio do incentivo da resolução de problemas que mostrem a necessidade de aplicar conteúdos da Educação Básica, que devem ser revisitados, quando necessário. Essas estratégias podem ajudar os estudantes a preencher lacunas de aprendizagem e conseguir bom desempenho nos conteúdos de Cálculo.

A existência de obstáculos é apontada como causa de dificuldades na aprendizagem. Especificamente em relação à aquisição do conceito de função, Sierpinska (1992) destaca 16

obstáculos. Nos trabalhos analisados, alguns desses obstáculos são citados, em particular no que se refere ao tópico de funções.

A seguir, cada categoria será analisada, detalhando as dificuldades e as sugestões de abordagem citadas nos trabalhos examinados.

Categoria 1: Trato algébrico

Esta categoria surgiu da observação de dificuldades na disciplina de Cálculo com simplificação algébrica, e no uso de produtos notáveis ou fatoração, como no cálculo de limites, por exemplo. Encontramos casos de alunos que simplificaram um dos termos de um binômio, sem perceber a distinção de um monômio, ou cometem erros na multiplicação de polinômios, como mostrado na figura 1.

Figura 1: Erro no trato algébrico, cometido por aluno de Cálculo I.

The image shows handwritten mathematical work with several errors. On the left, the student starts with the formula $V = a \cdot b \cdot c$ and calculates $V = (8-2x) \cdot (5-2x) \cdot x$. They then differentiate to get $V' = 12x^2 - 12x + 40$ and solve $V = \frac{12x^2 - 12x + 40}{4} = 0$, leading to the quadratic equation $3x^2 - 3x + 10 = 0$ and solutions $x_1 = -5$ and $x_2 = 2$. On the right, the student calculates $V = (8x - 2x^2) \cdot (5x - 2x^2)$, which they incorrectly expand as $V = 40x^2 - 16x^3 - 10x^3 + 4x^4$. They then simplify to $V = 4x^4 - 6x^3 + 40x^2$ and differentiate to get $V' = 4x^3 - 6x^2 + 40x$. Finally, they calculate $V(0) = 0 \text{ cm}^3$, $V(-5) =$, and $V(2) = 88 \text{ cm}^3$.

Fonte: Trabalho 6 (2015, p. 7).

Na pesquisa desenvolvida no trabalho 3, os pesquisadores constataram que

os erros referentes ao conteúdo específico de Cálculo, como a aplicação da derivada, não foram tão significativos quanto os erros relativos ao trato algébrico. Esse resultado indica que é preciso conscientizar professores do Ensino Médio da possibilidade de adotar uma abordagem diferenciada para a Matemática, que amenize a transição para o Ensino Superior, [...] refletindo num aprimoramento no domínio do trato algébrico e na compreensão dos problemas. (NASSER et al, 2013, p.7)

Categoria 2: Definição de função

O tópico de funções foi citado em quase todos os trabalhos, aparecendo como tema de quatro categorias. Em relação à definição, várias sugestões aparecem nos trabalhos, como adiar a formalização matemática do conceito de função, por meio de uma definição, em favor de uma noção intuitiva, apoiada em exemplos e gráficos. O ensino de função não deve constituir tema à parte, mas

devem ser exploradas situações da resolução de problemas até a interpretação de gráficos. Além disso, é recomendável uma abordagem histórica da definição de função e, nesse sentido, as primeiras atividades devem ser por meio do estudo da variação de grandezas associadas a diferentes fenômenos de interdependência, como recomendado por Caraça (1984). De acordo com o trabalho 5,

tratando-se de representar a variação entre duas grandezas, é natural que a ideia de função seja introduzida por meio de exemplos práticos. E não é preciso aguardar a formalização do conceito de função no Ensino Médio. Observando exemplos práticos e a representação gráfica, é possível conseguir bons resultados com o estudo das funções a partir do segundo segmento do Ensino Fundamental, como defende Tinoco (2009). (NASSER et al, 2014, p. 2)

No trabalho 3, o baixo rendimento de calouros é atribuído a lacunas na aprendizagem de Matemática. Os autores afirmam que “o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente, necessária ao domínio do pensamento matemático avançado, inerente ao estudo de Cálculo” (NASSER et al, 2013, p.1).

Uma abordagem histórica do conceito de função é recomendada no trabalho 7. Os autores citam que não há consenso a respeito da origem do conceito de função, já que vários matemáticos tiveram papel importante na evolução desse conceito. Entre estes,

Leonhard Euler (1707-1783), em 1748, deu uma definição interessante de função: “uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes”. (NASSER et al, 2016a, p. 2)

Tudo indica que essa definição influenciou uma crença dos estudantes, que dificulta o reconhecimento de outros tipos de funções, como as definidas por mais de uma sentença, retratadas na categoria 5.

Categoria 3: Características das funções

Esta categoria inclui propriedades e características das funções abordadas na Educação Básica, como domínio e imagem, funções injetivas e sobrejetivas. Ainda no que se refere às características de funções, destaca-se o reconhecimento de funções pares e ímpares, que pode perfeitamente ser explorado, por meio da comparação e simetria de gráficos, mas que, em geral não ocorre no Ensino Médio.

O trabalho 10 recomenda que “o conceito de função de domínio discreto deve ser abordado com mais eficácia para que os alunos possam compreender que o gráfico desse tipo de função não apresenta um traço contínuo e sim, um conjunto de pontos” (BARROS et al, 2017, p.8).

Por outro lado, o trabalho 11 destaca que as progressões aritméticas e geométricas devem ser tratadas como funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Em relação às funções pares e ímpares, no trabalho 2, Torraca et al (2013) perceberam que

a identificação de funções pares ocorre com mais facilidade do que a de funções ímpares. Em particular, foi observada a dificuldade em completar o gráfico de uma função ímpar, quando esta não passa pela origem (função descontínua) (p. 1743).

Nesse trabalho também é destacada a importância do reconhecimento de funções pares e ímpares no cálculo de área entre duas curvas, como no problema de calcular a área compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^3$, no intervalo $[-1, 1]$.

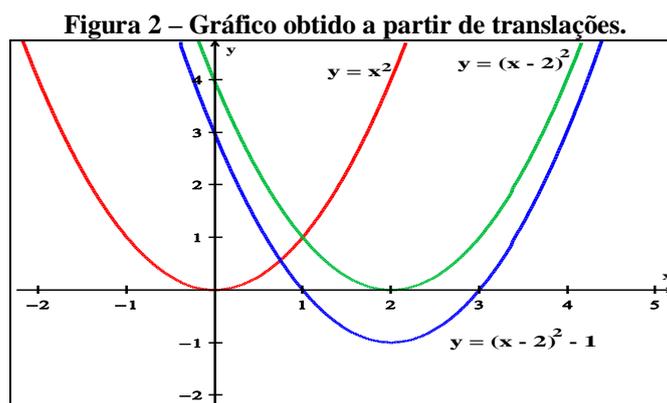
Os alunos normalmente utilizam a integral definida para resolver este problema, não percebendo que essa fórmula só é válida no caso em que é possível comparar as funções do integrando em todo o intervalo de integração. Neste caso, como a função é ímpar, há simetria em relação à origem, e essa integral tem zero como resultado, que certamente não pode ser o valor da área requerida. (TORRACA et al, 2013, p. 1746)

Nesta categoria, vale destacar que a 1ª versão da BNCC, de 2015, não abordou funções do tipo logarítmicas e deixou a representação de fenômenos e situações reais para o 3º ano do EM. Tal fato deveria ser abordado a partir do 1º ano, norteando a introdução ao estudo de funções. Já a versão BNCC de 2018 corrige essa posição, incluindo a habilidade:

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BRASIL, 2018, p. 531)

Categoria 4: Gráficos de funções

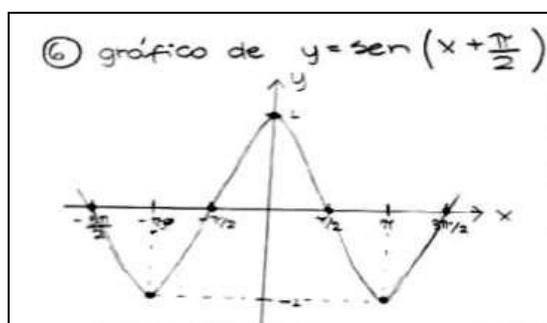
Uma das causas para as dificuldades dos alunos no traçado de gráficos de funções provém da abordagem ponto a ponto, adotada na Educação Básica. Nasser (2009) sugere a estratégia bem sucedida de usar transformações no plano, a partir de gráficos básicos conhecidos. Assim, os estudantes são levados a visualizar as modificações necessárias, como translações e reflexões, para chegar ao gráfico pretendido. Com esse processo, é possível esboçar gráficos sem a necessidade de conhecer suas raízes. Isso é útil, por exemplo, para os casos de funções quadráticas que não possuem zeros reais. O trabalho 7 também recomenda o uso de transformações no plano no traçado de gráficos. A figura 2 mostra as transformações aplicadas à parábola $y = x^2$ para obtenção da parábola $y = x^2 - 4x + 3$. É preciso completar o quadrado e expressar essa função por $y = (x - 2)^2 - 1$.



Fonte: Trabalho 7 (2016a, p. 11)

Alguns obstáculos à aprendizagem de função citados por Sierpiska (1992) são relativos a esta categoria, como a concepção ingênua de que “o gráfico de uma função não precisa ser exato”. Nesse sentido, observa-se a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, talvez pela influência dos gráficos divulgados na mídia, que são desse tipo. Essa tendência é abordada no trabalho 7, que mostra o gráfico traçado por uma aluna para uma senóide, seguindo essa crença (figura 3). Ela foi capaz de perceber a translação horizontal aplicada à função $y = \text{sen}x$ marcando os pares ordenados, mas ligou-os por segmentos de reta.

Figura 3 - Exemplo de gráfico utilizando segmentos de reta para a ligação dos pontos.



Fonte: Trabalho 7 (2016a, p. 5)

O trabalho 11 destaca que a tecnologia pode ser utilizada para a observação de modificações no traçado de gráficos:

Perspectivas de melhoria do ensino–aprendizagem podem ser criadas com o uso de softwares para visualizar gráficos de funções (TORRACA, 2005), tais como Excel, Derive, Maple e Winplot. Além desses, podem ser usados o Geogebra e o Régua e Compasso, de fácil aplicação. Por exemplo, os alunos podem ser desafiados a investigar o que ocorre com o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando são feitas alterações nos coeficientes a , b e c , separadamente. . (NASSER at al, 2015, p.10)

Categoria 5: Funções definidas por várias sentenças

Os exemplos de funções utilizados no Ensino Médio e, principalmente, aqueles trabalhados na disciplina de Cálculo devem se aproximar da realidade dos estudantes, refletindo situações reais, em que as funções nem sempre são bem-comportadas como as funções polinomiais. Um dos obstáculos citados por Sierpinska (1992), a crença de que “apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções”, pode ser uma das causas para as dificuldades apresentadas nessa categoria. Muitos problemas reais são representados por funções definidas por mais de uma sentença, como o Imposto de Renda cobrado na fonte, ou tarifas que dependem da faixa de consumo. Esses tipos de problemas são abordados no trabalho 8 (2016b).

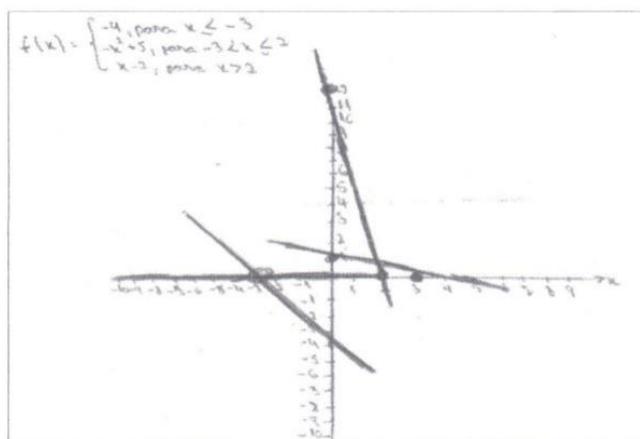
Na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC), a exploração desse tipo de função está incluída na seguinte habilidade:

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 539)

De acordo com o trabalho 5, Nasser et al (2014) citam que “muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma única expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças” (p. 4). A figura 4 mostra o gráfico apresentado por um aluno de Cálculo para a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -4, & \text{para } x \leq -3 \\ -x^2 + 5, & \text{para } -3 < x \leq 2 \\ x - 2, & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

Figura 4 – Gráfico incorreto de função definida por várias sentenças



Fonte: Trabalho 5 (2014, p. 4)

Categoria 6: Conversão de representações

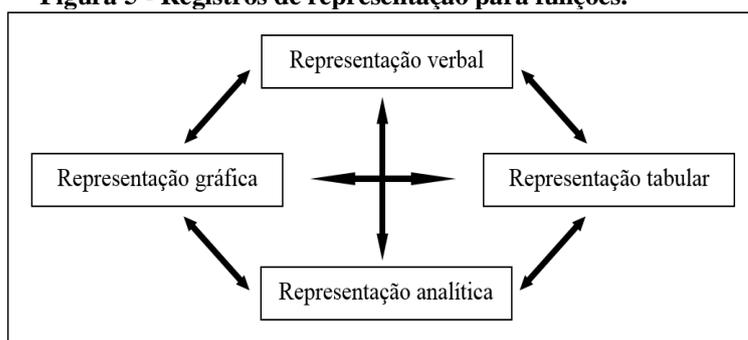
A diversidade de representações de funções também contribui para dificultar o domínio total desse conceito. De acordo com Duval, para a compreensão de um conceito, é necessário o domínio dos diversos registros de representação, e a conversão entre eles.

A necessidade de articular diferentes registros de um objeto matemático está explícita na competência específica 4 da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio:

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. (BRASIL, 2018, p. 523)

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval indica a necessidade de levar os alunos a dominar as representações verbal, gráfica, tabular e analítica, e a articular a transição entre esses registros, como esquematizado na figura 5, proveniente do trabalho 13.

Figura 5 - Registros de representação para funções.



Fonte: Trabalho 13 (2018, p. 4)

Nas atividades aplicadas, principalmente no trabalho 13, os alunos do Ensino Médio apresentaram baixo desempenho na conversão entre as representações verbal, analítica e gráfica. Recomenda-se que os alunos explorem exercícios envolvendo a modelagem em problemas diversos, com a análise das variáveis envolvidas e sua relação, para facilitar conversões a partir da representação verbal.

De acordo com Duval (2011),

a razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica. (DUVAL, 2011, p. 97)

Duval (2011) estabelece três abordagens possíveis para as representações gráficas: a abordagem ponto a ponto, uma abordagem de extensão do traçado efetuado e uma abordagem de interpretação global de propriedades das figuras.

Uma das causas das dificuldades deve-se à passagem da expressão para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, o que acarreta problemas na passagem inversa, constituindo um obstáculo.

A figura 6 mostra o erro de um aluno ao modelar um problema clássico de máximos e mínimos, usado na pesquisa do trabalho 6. Esse tipo de erro é muito comum, retratando as dificuldades dos discentes nas conversões do registro verbal para analítico.

Figura 6 – Erro ao equacionar um problema de máximos e mínimos.

Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 8 dm por 5 dm. Para isso, deve se retirar quadrados de lado x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. **Expresse o volume V da caixa como uma função de x .**

$1 \times 4 \times 7 = 28 \text{ dm}^3$
 $(V) \quad 8 \text{ dm}$
 $2 \times 3 \times 6 = 36 \text{ dm}^3$
 $40x - 13x^2 + x^3 = \dots$
 $\boxed{\text{Volume} = x^3 - 13x^2 + 40x}$
 $\text{Volume} = x \cdot (8-x) \cdot (5-x)$
 $\rightarrow V = x(40 - 8x - 5x + x^2)$
 $1 - 13 + 40 = 28 \text{ dm}^3$
 $8 - 52 + 40 = 36 \text{ dm}^3$

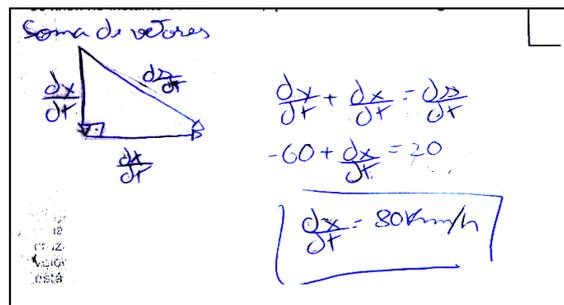
Fonte: Trabalho 6 (2015, p. 8)

Categoria 7: Geometria plana e espacial

Em relação à Geometria, é preciso desenvolver ações ao longo do Ensino Médio que gerem a prontidão para o estudo de Cálculo. Um aspecto importante é a visualização de sólidos geométricos, com análise dos elementos que aparecem em suas seções transversais e interseções, que podem facilitar a resolução de problemas de taxas relacionadas e de máximos e mínimos (BALOMENOS et al, 1994). A Geometria Analítica também pode preparar para a representação e visualização das situações, reduzindo as dificuldades observadas na resolução de problemas de taxas relacionadas.

No trabalho 11, os autores observam que em geral, as dificuldades dos alunos em problemas de taxas relacionadas “não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre as grandezas envolvidas no problema ou os elementos da figura.” Um exemplo desse tipo de erro é apresentado na figura 7.

Figura 7 - Erro na aplicação do Teorema de Pitágoras



Fonte: Trabalho 4 (2013, p.11)

É preciso explorar atividades geométricas que gerem a prontidão para o estudo de Cálculo ao longo do Ensino Médio. Um aspecto importante é a visualização de sólidos geométricos, analisando os elementos que aparecem em suas seções transversais e interseções, facilitando a resolução de problemas de máximos e mínimos. A Geometria Analítica também pode preparar para a representação e visualização das situações, como no caso dos problemas analisados no trabalho 4 (p.15).

No trabalho 1, os autores destacam que no Ensino Médio, “em relação à Geometria, a proposta deve contemplar representações gráficas de figuras bi e tridimensionais, típicas de problemas de taxas relacionadas e de máximos e mínimos” (Nasser et al, 2012, p. 17).

Categoria 8: Vetores + Trigonometria

O conceito de vetor não faz parte do currículo de Matemática do Ensino Médio, e nem consta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ao ingressar no Ensino Superior, alguns alunos trazem uma noção de vetor, da Física do Ensino Médio, mas uma abordagem de Geometria Analítica poderia ajudar na representação e visualização das situações, como no caso dos problemas analisados no trabalho 4 (p.15).

Os resultados obtidos no trabalho 1 (2012) indicam que, em geral, conteúdos importantes da Geometria Analítica não são abordados no Ensino Médio. A falta de exploração de vetores prejudica a identificação e o tratamento das diversas representações de uma reta no plano, indicando a necessidade da “inclusão do estudo de vetores no Ensino Médio” (Nasser et al, 2012, p. 11).

Outro conteúdo identificado como ponto de dificuldade dos estudantes foi o estudo de trigonometria. Como já citado no caso de gráfico de funções, as transformações lineares também podem facilitar a compreensão e a descrição das transformações que ocorrem nos gráficos de funções trigonométricas, ao se alterarem os parâmetros da forma algébrica de funções como, por exemplo, nas expressões $y = a \cdot \cos x + b$ ou $y = b + a \cdot \sin x$.

As funções trigonométricas estão incluídas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 528), na habilidade:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Categoria 9: Identificar e Compreender Padrões

Esta categoria foi citada em 4 trabalhos, como uma boa estratégia de introdução ao estudo de função no Ensino Fundamental. É recomendada a exploração de padrões em sequências numéricas ou de figuras, incentivando os alunos a encontrar uma expressão algébrica para representá-los. Recomenda-se a exploração de padrões no Ensino Médio, uma vez que a habilidade desta categoria está incluída na Competência 5 da BNCC do Ensino Médio: “Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, ...” (p. 540).

No trabalho 9 (p. 4), foi utilizado o “Triângulo de Sierpinski” numa tarefa para verificar se os estudantes conseguiam analisar padrões em uma figura. Os resultados indicam que os alunos tinham o domínio da construção da figura, mas não conseguiam inferir o modelo matemático.

Considerações Finais

Na transição do Ensino Médio para o Superior, algumas instituições adotam uma disciplina de Pré-Cálculo, com a finalidade de cobrir as lacunas de aprendizagem da Educação Básica. No entanto, há relatos na literatura mostrando que essa medida pode não ser bem-sucedida (DIEFENTHÄLER, 2017). Como relatado no trabalho 14, o problema simplesmente pode mudar de lugar, com índices de reprovação em Pré-Cálculo tão ou mais altos que os de reprovação em Cálculo I: “a explicação parece ser que os alunos ficam desmotivados para estudar um conteúdo que já conhecem, segundo a opinião deles” (trabalho 14, 2019a, p. 2).

A análise das categorias provenientes dos trabalhos produzidos sugere que a dificuldade dos alunos em apreender os conceitos matemáticos, na disciplina de Cálculo I pode estar relacionada com a falta de incentivo ao pensamento matemático, priorizando apenas a resolução de exercícios mecânicos. Os trabalhos analisados indicam a necessidade de um novo olhar para o currículo do Ensino Médio, revestido de abordagens didáticas mais abrangentes.

Tendo em vista a ênfase dada aos registros de representação na nova BNCC do Ensino Médio (BRASIL, 2018), este trabalho aponta para a necessidade de abordar, de forma mais profunda e eficaz,

a conversão de registros de representação nas aulas da Educação Básica. Observa-se, no entanto, que os livros didáticos, em geral, não trabalham atividades que enfatizem essas conversões. A representação de regiões do plano limitadas por retas, mostrada no trabalho 12, é uma boa oportunidade de explorar no Ensino Médio problemas de otimização, que preparam para o estudo de problemas de máximo e mínimo nos cursos de Cálculo. Além disso, auxilia na aprendizagem de funções definidas por várias sentenças, tópico que em geral não é abordado nesse nível de ensino, e é muito útil na modelagem de problemas reais.

Recomenda-se uma reformulação na forma de abordagem de grande parte dos conteúdos de Matemática. Nesse sentido, seria adequado o oferecimento de programas de Formação Continuada para professores da Escola Básica que abordem não apenas os conteúdos matemáticos em que os alunos apresentam mais dificuldades, mas também dando ideias para que sejam ensinados de forma abrangente. Esse tipo de estratégia também deve ser adotado nos cursos de Formação Inicial, com licenciandos.

Em relação ao conceito de função, devem ser propostas atividades que favoreçam a superação dos obstáculos, permitindo o domínio desse conceito. Nasser et al (2019b, p. 7) afirmam que os exemplos de funções utilizados no Ensino Médio e, principalmente, aqueles trabalhados na disciplina de Cálculo devem se aproximar da realidade dos estudantes, refletindo situações reais, em que as funções nem sempre são bem-comportadas como as funções polinomiais.

Para superar as dificuldades detectadas nas categorias identificadas no desenvolvimento dessa pesquisa, um material baseado na Resolução de Problemas está sendo desenvolvido e testado. As atividades, voltadas para os professores de Ensino Médio e/ou de Pré-Cálculo, são exploradas com o uso do Geogebra, permitindo a visualização das situações propostas nos problemas.

Referências

- BALOMENOS, R., FERRINI-MUNDY, J. e DICK, T. **Geometria: prontidão para o Cálculo**. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Atual Editora, São Paulo, 1994.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edição revista e atualizada. Edições 70, Lisboa, Portugal, 1977.
- BARROS, J.; NASSER, L; SOUSA, G. **Explorando imagens conceituais de alunos de Cálculo I relacionadas à continuidade de funções**. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO. *Anais UFOP*, Ouro Preto, 2017.
- BELLETTINI, M. T.; SOUZA, S.A **Implantação da disciplina de Pré-Cálculo como política pedagógica de permanência nos cursos de graduação do centro tecnológico da UFSC**. In:

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GESTION UNIVERSITARIA, XIII. *Anais...* UFSC, Santa Catarina, 2018.

BIAZUTTI, A.C.; NASSER, L.; TORRACA, M.; BARROS, J.; OLIVEIRA, A. **Conversão de Representações na transição do Ensino Médio para o Superior**. In: CONGRESO ARGENTINO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, XIII, 2018, La Plata. *Anais*. Universidad Nacional de La Plata. La Plata, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. BNCC, 2018. Disponível em:<
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>.

CARAÇA, B. DE J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Livraria Sá da Costa Editora. Lisboa, Portugal, 1984.

CAVASOTTO, M.; VIALI, L. Dificuldades na aprendizagem de Cálculo: o que os erros podem informar. In: Boletim do GEPEM, Rio de Janeiro, nº 59, p. 15-33, 2011.

DIEFENTHÄLER, A. T. (2017). *Disciplina Pré-Cálculo: um olhar a partir do desempenho dos acadêmicos*. Disponível em:
<http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/4238/Andressa%20Tais%20Diefenthaler.pdf?sequence=1>

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, p.11-33, 2003.

DUVAL, R. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros**. In: REVEMAT, ISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2009). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos**. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 43-58). SBEM, 2009.

NASSER, L.; BIAZUTTI, A.C.; TORRACA, M.; BARROS, J. **Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I**. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN, XIV, 2019, Medellín. *Anais...* CIAEM, Medellín, 2019a.

NASSER, L.; BIAZUTTI, A. C.; BARROS, J.; VAZ, R. F. N. **Resolução de Problemas como trampolim para a aprendizagem de Cálculo I**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2019. *Anais*. SBEM: Cuiabá, 2019b.

NASSER, L.; TORRACA, M.; BARROS, J. Conversão de representações de retas e regiões do plano no Ensino Médio. In: VII EEMAT. *Anais*. Rio de Janeiro, 2018.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. **Desempenho em Cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior**. Boletim GEPEM, n. 70, 2017.

- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.A. **Mobilizações Didáticas para aprendizagem do Conceito de função.** In: LAERTE FONSECA (Org.). *Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem*. 1ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016a, p. 183-196.
- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.; VAZ, R.; FERREIRA, M. **XII ENEM, Funções no Ensino Médio: o que muda com a proposta da Base Nacional Comum Curricular?** ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2016b. *Anais*. SBEM: São Paulo – SP, 2016.
- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. **Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação.** In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN, XIV, 2015, Chiapas. *Anais...* CIAEM, Chiapas, 2015.
- NASSER, L.; TORRACA, M.A; MARQUES, J; LANZELLOTE, B. **Abordagem significativa para o tópico de funções na Educação Básica.** ENCONTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2014. *Anais...* EEMAT: Niterói – RJ, 2014.
- NASSER, L.; TORRACA, M.A; SOUSA, G.; ASSEMAN, D. AMORIM C; MARQUES, J. **Resolução de problemas de máximos e mínimos em Cálculo I: prontidão a partir do Ensino Médio.** CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, VII, 2013. *Anais...* CIBEM: Montevideo – Uruguai, 2013.
- NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. - **Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo?** Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.
- OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. **A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo.** In: Boletim do GEPEM, Nº 61, p. 125-137. Rio de Janeiro, 2012.
- REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** São Paulo: USP, 2003. 450 p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E; HAREL, G (Ed.) **The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy.** MAA Notes, p.25-58, 1992.
- SOUSA, G.; ANDRADE, L. **Cálculo Diferencial e Integral I: como os alunos estão iniciando essa disciplina no curso de Engenharia?** Atas do X ENEM, São Paulo, SP, Brasil, 2016.
- SOUSA, G.; NASSER, L.; TORRACA, M.A; ASSEMAN, D.; AZEVEDO.; C. **A transição do ensino médio para o superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013. *Anais...* SBEM: Curitiba – PR, 2013.
- TALL, D. (Ed.): **Advanced Mathematical Thinking.** Kluwer Academic Publishers, 1991.
- TINOCO, L. A. A.(coord.). **Construindo o Conceito de Função.** Projeto Fundação. IM- UFRJ, 2009.
- TORRACA, M. A. A. Um estudo sobre álgebra em sistemas computacionais formativos. Dissertação (Mestrado em Informática), NCE – UFRJ, 2015.

TORRACA, M; SOUSA, G; CORREA, P.; NASSER, L. **Preparando para a aprendizagem de Cálculo: funções e geometria no ensino médio.** Acta Latina, 2013

TORRES, A. F. N.; HAVELANGE, L. S. **Investigação dos conhecimentos de assuntos Pré-Cálculo em estudantes da Licenciatura em Matemática.** In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, IV, 2017, João Pessoa. Anais... Campina Grande: Realize Editora, 2017.