 http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2022.008

# Raciocínio Argumentativo em Matemática no PISA e na BNCC: uma investigação com estudantes da Educação Básica[1]

**Carlos Augusto Aguilar Júnior**
Universidade Federal Fluminense (UFF) – Colégio Universitário Geraldo Reis (COLUNI/UFF)
carlosaugustobolivar@hotmail.com

**João Carlos Caldato**
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ) e Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ/Nilópolis)
profjoaocaldato@gmail.com

**Resumo**
O objetivo deste artigo é investigar como os estudantes, a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, raciocinam e argumentam sobre algumas afirmações matemáticas. Para isso, inicialmente foram analisados documentos oficiais, uma vez que se buscou articular aproximações entre a BNCC e a matriz do PISA. Inspirados em uma das questões-exemplo da matriz do PISA 2021/2022, empreendemos uma pesquisa exploratória, por meio de um questionário virtual, respondido por 52 alunos da Educação Básica. Dentre os resultados obtidos por meio de uma análise quanti-qualitativa inspirada na tipologia de prova de Nicolas Balacheff, constatou-se que os argumentos apresentados, em grande parte, eram pautados em verificações empíricas. Consideramos que a abordagem destas questões em avaliações de largo alcance estimula o trabalho pedagógico voltado à construção das habilidades de argumentar e demonstrar, importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática como também para sua atuação num contexto social mais ampliado.

**Palavras-chave:** BNCC. Matriz de Referência. Argumentação e Prova Matemática. Raciocínio. Avaliação.

# Argumentative Reasoning in Mathematics in PISA and BNCC: an investigation with students from Basic Education

**Abstract**
The objective of this article is to investigate how students from the final years of Fundamental Level reason and argue about some mathematical affirmatives. For this, official documents had been initially analyzed, looking for approaches articulating the BNCC and the PISA matrix. Inspired in one of the example-questions of the PISA matrix 2021/2022, an exploratory research was undertaken, by means of a virtual questionnaire, answered by 52 students of Basic Education. Among the results obtained through a quanti-qualitative analysis inspired in the tipology of tests by

[1] Este artigo é uma versão compilada, revisada e ampliada de dois textos distintos que foram enviados inicialmente ao IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática (SPEM) do Rio de Janeiro com publicação nos anais do evento (AGUILAR JÚNIOR; CALDATO, 2020) e ao I Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática (ENOPEM) com publicação nos anais do evento (CALDATO; AGUILAR JÚNIOR, 2020).

Nicolas Balacheff, it was evidenced that the presented arguments, to a large extent, were based in empirical verifications. We consider that the approach of these questions in wide scale evaluations stimulates the pedagogical work concerning the construction of the abilities to argue and to demonstrate, important for the development in Mathematics, as well as for the performance in a more extended social context.

**Keywords:** BNCC. Reference Matrix. Argumentation and Mathematical Proof. Reasoning. Assessement.

## Introdução

Ganham relevância no debate educacional as políticas públicas (de corte neoliberal) voltadas para a avaliação dos processos educacionais desenvolvidos nas escolas públicas. Desde os anos 1990, tanto em nível central, com a instituição do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), como de forma descentralizada, com o desenvolvimento de sistemas de avaliação educacional por iniciativa de cidades e de estados, a cultura da avaliação constitui um imperativo que amolda o cotidiano escolar e, em muitos casos, tenciona os percursos educativos, reduzindo os currículos às matrizes de referência dessas avaliações.

Neste sentido, a fim de se controlar o trabalho docente e as aprendizagens esperadas para que os alunos as desenvolvam, constata-se uma forte influência exercida pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e por outros órgãos internacionais para a estruturação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (JOLANDEK, 2020, p. 34). Isso se deve, também, ao fato de que esse documento curricular foi pensado em meio às tensões advindas dos resultados brasileiros nas avaliações internacionais de larga escala, como, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA, em inglês), coordenado pela OCDE.

Segundo Jolandek (2020), é possível identificar claramente elementos comuns entre a BNCC (BRASIL, 2018) e a matriz de referência do PISA (OCDE, 2018). Um deles diz respeito ao letramento matemático e que, segundo a OCDE, é definido como

> [...] a capacidade de um indivíduo de raciocinar matematicamente e de *formular*, *empregar* e *interpretar* matemática para resolver problemas em uma variedade de contextos do mundo real. Inclui conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas para descrever, explicar e prever fenômenos. Ajuda os indivíduos a conhecer a função que a matemática joga no mundo e faz julgamentos bem fundamentados e decisões necessárias para cidadãos construtivos, engajados e reflexivos do século XXI (OCDE, 2018, p. 7, tradução nossa, grifos nossos).

Em meio a este cenário, uma pergunta retórica se coloca: O que é ensinar matemática? Restringe-se a fazer com que nossos estudantes dominem técnicas de cálculo e resolução de enunciados/problemas? Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos finais do Ensino

Fundamental e do Ensino Médio (BRASIL, 1998, 1999) preceituavam, para além dessas habilidades, o trabalho com o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo por meio de atividades pedagógicas que fomentassem a argumentação e prova matemática desde então. Tomando como referência um dos princípios norteadores dos PCN, o ensino de Matemática deveria

> [...] garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL, 1998, p. 56).

Vivemos em uma sociedade em que a capacidade de produzir argumentos convincentes tem se tornado cada vez mais importante: basta vermos as realidades sociais que nos exigem pensar criticamente, tais como *fake news*, reportagens tendenciosas, preços abusivos, propagandas enganosas, dentre outras. Dessa forma, entendemos que o raciocínio argumentativo transcende a sala de aula de Matemática e, não à toa, a investigação sobre argumentação e provas vem recebendo atenção cada vez maior de educadores matemáticos.

Muitas são as pesquisas que exploram o trabalho com argumentação e provas na sala de aula do Ensino Básico (NOTARE; BASSO, 2018; CALDATO; UTSUMI; NASSER, 2017; NUNES; ALMOULOUD, 2013; AGUILAR JÚNIOR; NASSER, 2012). Em comum, essas pesquisas ressaltam a importância de se trabalhar com atividades exploratórias com os estudantes do Ensino Básico, visando ao fomento da cultura da argumentação em sala de aula (BOAVIDA, 2005), ao desenvolvimento do raciocínio matemático por meio da construção de argumentos que "demonstrem" a validade de uma afirmação feita em Matemática.

A nossa pesquisa possui um caráter documental, visto que analisamos a BNCC, assim como a matriz de referência de Matemática do PISA 2021/2022, cujo foco da avaliação nesta edição será a Matemática[2]. Por outro lado, este estudo também se caracteriza como uma pesquisa quanti-qualitativa, em que empreendemos um estudo exploratório por meio de um questionário virtual, respondido por 52 estudantes da Educação Básica, à luz do constructo teórico de Balacheff (1988).

Por consequência, inspirados em uma questões-exemplo do PISA 2021/2022, esses procedimentos teórico-metodológicos foram adotados a fim de atingir o seguinte objetivo: investigar como os estudantes, a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, raciocinam e argumentam sobre algumas afirmações matemáticas.

Posteriormente à introdução, este artigo estrutura-se em: fundamentação teórica, procedimentos metodológicos, descrição e análise dos documentos oficiais e dos questionários, considerações finais e referências.

---

[2] Esta edição estava prevista para ocorrer em 2021, porém, devido à pandemia de COVID-19, foi adiada para 2022.

## Fundamentação teórica

Introduzimos esta seção definindo algumas noções pertinentes ao nosso estudo, quais sejam: raciocínio, argumentação, prova e demonstração. Em seguida, apresentamos o modelo teórico que norteia a análise e descrição dos dados: a tipologia de prova. Tais fundamentações emergiram a partir das leituras de Balacheff (1987, 1988).

De acordo com Balacheff (1987), o *raciocínio* é definido como uma atividade intelectual, muitas vezes não explícita. Por isso, recorremos às argumentações apresentadas pelos estudantes a fim de inferir algumas hipóteses e conclusões. *Argumentação* é um discurso, oral ou escrito, destinado a convencer outrem sobre a veracidade de uma afirmação.

Com relação às outras duas noções, segundo o pesquisador francês, uma *prova* consiste em uma argumentação legitimada por certa comunidade, enquanto uma *demonstração* refere-se à prova situada no âmbito da comunidade matemática devido à particularidade da sua estrutura nesse grupo social. Balacheff (1987) fornece uma visão ampliada para a noção de prova, na qual estão incluídas as demonstrações (ou provas matemáticas) que se distinguem das demais pela sua forma e pelo seu caráter hipotético-dedutivo. Desse modo, apenas no contexto acadêmico-matemático, prova e demonstração são consideradas sinônimas.

É importante mencionar que o intuito da distinção anterior deve-se às nomenclaturas do modelo teórico denominado tipologia de provas, da qual Balacheff (1988) destaca quatro níveis considerando os raciocínios e conhecimentos apresentados ao elaborar uma justificativa: *empirismo ingênuo*, *experiência crucial*, *exemplo genérico* e *experiência mental*.

Para melhor compreendermos este modelo teórico, elaboramos a tabela 1 a fim de descrever e exemplificar cada um destes níveis. Para isso, inspirados em uma das afirmações propostas no questionário, considere a seguinte sentença: "Um número divisível por 4 também é divisível por 2".

**Tabela 1 – Descrição e exemplos para os níveis de prova**

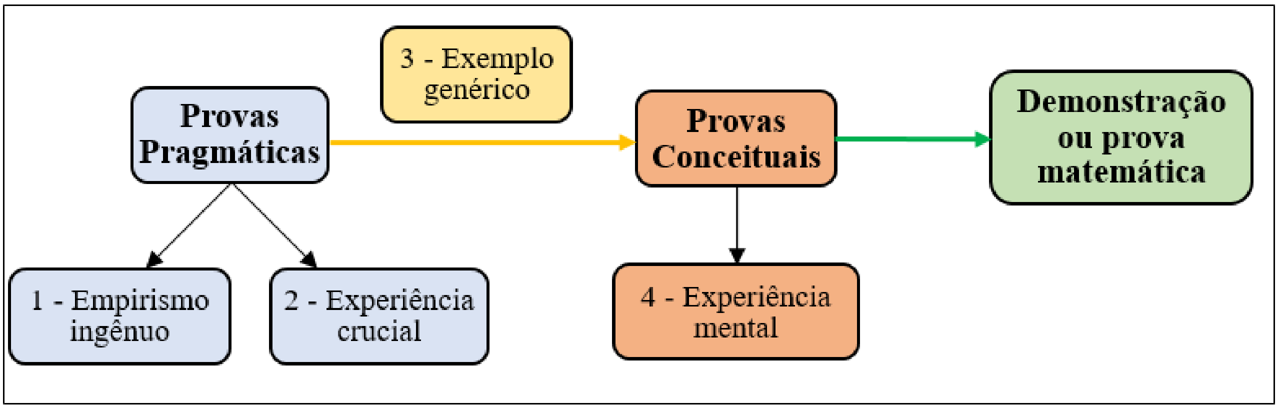
| NÍVEIS | DESCRIÇÃO | EXEMPLOS |
|---|---|---|
| **Empirismo ingênuo** | Consiste no exercício de argumentação em que o aluno tira suas conclusões a partir de um pequeno número de "testes". | Os alunos verificam a validade da afirmativa testando alguns exemplos:<br>$12 : 4 = 3$<br>$12 : 2 = 6$ |
| **Experiência crucial** | Consiste em eleger um experimento particular, na busca por um resultado geral. A principal diferença com o anterior é a evidência de generalização. | Os alunos julgam que, mostrando que a proposição vale com números muito grandes, valerá para todos os demais. Por exemplo:<br>$3548 : 4 = 887$<br>$3548 : 2 = 1774$ |
| **Exemplo genérico** | Consiste em eleger um exemplo como representante da classe de objetos, a fim de deduzir características que representam essa classe. | Como $12$ é divisível por 4, pode ser escrito como $12 = 4x3$. Por outro lado, reescrevendo como $12 = 2x2x3 = 2x(2x3) = 2x6$, resulta que $12$ também |

| | | |
|---|---|---|
| | | é divisível por 2. |
| **Experiência mental** | Consiste em utilizar o raciocínio lógico dedutivo para garantir a validade de uma afirmação de forma genérica (para toda a classe de objetos). | Se $p$ é um número é divisível por 4, então existe um número inteiro $m$, tal que: $p = 4m$. Porém, $p$ pode ser reescrito como $p = 2(2m)$. Logo, $p$ também é divisível por 2. |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em linhas gerais, os dois primeiros níveis baseiam-se na verificação empírica (exemplos numéricos, desenhos, observação) para validar uma afirmação, enquanto o último se reporta ao raciocínio lógico dedutivo para garantir a validade de forma genérica. Essa distinção é conhecida na literatura como *provas pragmáticas* e *provas conceituais*, respectivamente. Nesse contexto, o exemplo genérico constitui um estágio de transição entre ambas as provas.

**Figura 1 – Classificação dos níveis de prova**




Fonte: Caldato (2018, p. 59).

É possível notar na figura 1 que os níveis de prova remetem a uma transição evolutiva da noção de demonstração (do empirismo ingênuo à experiência mental). Portanto, para que um estudante possa atingir o nível mais elevado e seja capaz de não apenas compreender o significado de uma demonstração, mas também de demonstrá-la, é necessário que ele vivencie todos os níveis anteriores durante a trajetória escolar (CALDATO, 2018, p. 59).

Tendo feitas as devidas discussões teóricas, discutiremos alguns aspectos metodológicos empregados na próxima seção.

## Procedimentos metodológicos

Como mencionamos na introdução, o objetivo deste estudo é investigar como os estudantes, a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, raciocinam e argumentam sobre algumas afirmações matemáticas que foram criadas a partir de uma questão-exemplo do PISA 2021/2022. A busca por alunos matriculados a partir do 8º ano até a 3ª série do Ensino Médio deve-se ao fato de que, segundo o Ministério da Educação (MEC), é nesse intervalo escolar que ocorre a escolha dos participantes do PISA. A única diferença é que, para realizar o exame, também é levada em consideração a faixa etária (entre 15 e 16 anos), o que desconsideramos em nosso estudo.

O PISA tem regularidade trienal e em cada edição avalia o letramento nas áreas de Leitura, Matemática e Ciências. A nossa escolha pela matriz de referência do PISA 2021/2022 – além da BNCC – justifica-se porque a próxima edição do programa terá a Matemática como foco da avaliação.

Assim, a nossa pesquisa, segundo Gonsalves (2001, p. 32), pode ser classificada como documental, visto que as referências eram fontes primárias, caracterizadas "pela relação direta com os fatos a serem analisados". Por outro lado, de acordo com o objetivo proposto, este estudo é exploratório, pois "[...] se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de oferecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno" (GONSALVES, 2001, p. 65).

Para atingir ao objetivo proposto neste estudo, elaborou-se um questionário no *Google Forms*[3] a fim de se coletarem os dados com os estudantes. Posteriormente, o link foi disponibilizado via *WhatsApp* para alguns profissionais da educação que atuavam no intervalo escolar descrito anteriormente. Tal escolha foi por conveniência, visto que eram pessoas conhecidas por nós, os pesquisadores. Em seguida, o link foi encaminhado virtualmente para os estudantes, matriculados em diferentes instituições de ensino, localizadas nos estados de São Paulo e do Rio de Janeiro.

É importante destacar que a aplicação do questionário ocorreu entre os dias 21 a 25 de setembro de 2020, em meio à pandemia de COVID-19. Por isso, as aulas presenciais estavam suspensas em ambos os estados, não sendo possível um encontro direto com os participantes. Contudo, há de se mencionar que a forma adotada para a coleta de dados permitiu maior abrangência da amostra, especialmente no sentido geográfico. Por outro lado, existem algumas limitações sobre as quais não é possível ter o controle, como, por exemplo, assegurar que não houve nenhum tipo de consulta durante a aplicação do instrumento.

Em vista disso, consideramos que o procedimento de coleta pode ser classificado, apesar das nossas limitações, como uma pesquisa *survey* (levantamento por questionário), descrita como "a obtenção de dados ou informações sobre características, ações ou opiniões de determinado grupo de pessoas, indicado como representante de uma população-alvo [...] por meio de um instrumento de pesquisa, normalmente um questionário" (ALYRIO, 2009, p. 129).

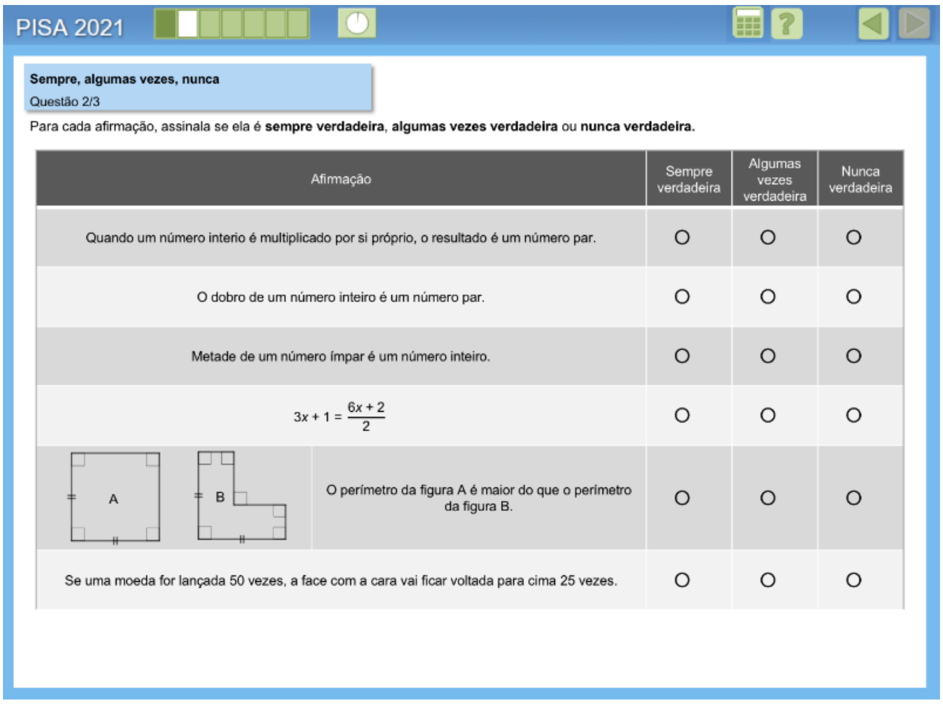
[3] Disponível através do link: https://forms.gle/WktAhLVrAEwynY9z7.

Embora não tenhamos a pretensão de generalizar as nossas conclusões, consideramos que parte dos resultados gerados seja de natureza quantitativa. Por outro lado, devido às três perguntas discursivas do questionário, analisadas segundo a tipologia de Balacheff (1988), adotamos também um viés qualitativo. Deste modo, este estudo caracteriza-se por descrever uma abordagem quanti-qualitativa.

Com relação aos itens do questionário, é possível dividi-los em três etapas. Na etapa 1, apresentamos os objetivos da pesquisa, asseguramos o anonimato do respondente e questionamos se ele autorizava a utilização dos dados. A etapa 2 continha seis questões, as quais visavam coletar informações pessoais da amostra, tais como: idade, sexo, cor/raça, ano/série matriculado, tipo de instituição e reprovação. Na etapa 3 havia vinte afirmações matemáticas, e os participantes deveriam assinalar uma dentre três alternativas: "Sempre verdadeira" (SV), "Algumas vezes verdadeira" (AV) ou "Nunca verdadeira" (NV). Optamos, ainda, por acrescentar a opção "Não sei", a fim de que os discentes não "chutassem" a resposta. É importante salientar que até este momento do questionário todos os itens eram obrigatórios.

A inspiração para a última etapa foi um exemplo disponibilizado no site do PISA 2021/2022, intitulado "Sempre, Algumas vezes, Nunca", que ilustra uma gama de itens de raciocínio do simples ao mais complexo, incluindo uma variedade de tipos de pergunta do tipo sim/não, múltipla escolha e discursivas. Na figura 2, ilustramos uma das questões fechadas desse exemplo:

**Figura 2 – Delineamento da pesquisa**


PISA 2021

**Sempre, algumas vezes, nunca**
Questão 2/3

Para cada afirmação, assinala se ela é **sempre verdadeira**, **algumas vezes verdadeira** ou **nunca verdadeira**.

| Afirmação | Sempre verdadeira | Algumas vezes verdadeira | Nunca verdadeira |
|---|---|---|---|
| Quando um número interio é multiplicado por si próprio, o resultado é um número par. | O | O | O |
| O dobro de um número inteiro é um número par. | O | O | O |
| Metade de um número ímpar é um número inteiro. | O | O | O |
| $3x + 1 = \frac{6x + 2}{2}$ | O | O | O |
| A B — O perímetro da figura A é maior do que o perímetro da figura B. | O | O | O |
| Se uma moeda for lançada 50 vezes, a face com a cara vai ficar voltada para cima 25 vezes. | O | O | O |

Fonte: OCDE (2018, p. 62).

Além das vinte afirmações, a etapa 3 continha ainda três questões dissertativas não obrigatórias. A primeira solicitava que o participante indicasse uma sentença em que havia respondido à alternativa SV e justificasse o seu raciocínio. De forma análoga, as outras duas perguntas eram referentes às opções AV e NV.

Agora, tendo sido apresentados os detalhes dos procedimentos metodológicos adotados, nas próximas duas seções descrevemos e analisamos os dados observados nos documentos oficiais e nos questionários, respectivamente.

## Descrição e análise dos documentos oficiais

Durante a nossa leitura da BNCC, buscamos identificar trechos que discutiam conceitos, ideias e preceitos referentes às habilidades e competências relacionadas à argumentação e prova. Para tanto, realizamos buscas por meio de alguns prefixos, como "argument", "justi", "expli", "demonstr", "prov", "mostr" e "raciocin", os quais faziam alusão às palavras "argumente", "justifique", "explique", "demonstre", "prove", "mostre", "raciocínio" e seus respectivos cognatos. Além das orientações gerais para o trabalho com argumentação e prova (BRASIL, 2018, p. 265), a BNCC descreve oitos competências específicas para o Ensino Fundamental. Dentre elas, destacamos as competências 2 e 4 que fazem menção ao raciocínio argumentativo:

> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir *argumentos convincentes*, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> (...)
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo *argumentos convincentes* (BRASIL, 2018, p. 267, grifos nossos).

Já para o Ensino Médio, a BNCC descreve cinco competências específicas. Dentre elas, apresentamos as competências 3 e 5 que também remetem à argumentação matemática:

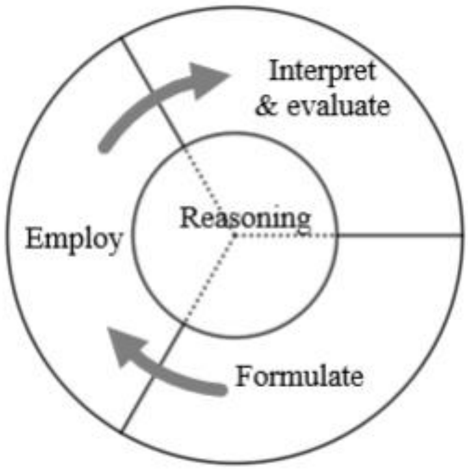
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir *argumentação consistente*.
> (...)
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma *demonstração* cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531, grifos nossos).

Considerando essas competências, vimos que se relacionam com a definição de letramento matemático (OCDE, 2018) descrita na introdução. Tal articulação com a BNCC deve-se ao fato de que este documento curricular foi pensado em meio às tensões advindas dos resultados brasileiros nas avaliações internacionais de largo alcance, bem como a posição do Brasil na agência internacional e as políticas emanadas pelas agências multilaterais, destacadamente a OCDE e o Banco Mundial, como se pode verificar na discussão realizada por Jolandek (2020).

Para concluir esta seção, retomamos a conceituação de letramento matemático, com destaque para os verbos "formular", "empregar" e "interpretar". A partir da definição, depreende-se que o estudante letrado em Matemática é aquele que detém, dentre outras habilidades, aquelas relacionadas ao raciocínio matemático, que passa pelos processos individuais de *formular* (situações com base na Matemática), *empregar* (raciocínio, conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas) e *interpretar/avaliar* (resultados matemáticos) (OCDE, 2018, p. 11).

A partir disso, a figura 3, extraída da matriz de referência do PISA 2021/2022, mostra a relação entre o raciocínio matemático (dedutivo e indutivo) e os três processos matemáticos (formular, empregar e interpretar/avaliar):

**Figura 3 – Relação entre raciocínio e os três processos matemáticos**




Fonte: OCDE (2018, p. 8).

## Descrição e análise dos questionários

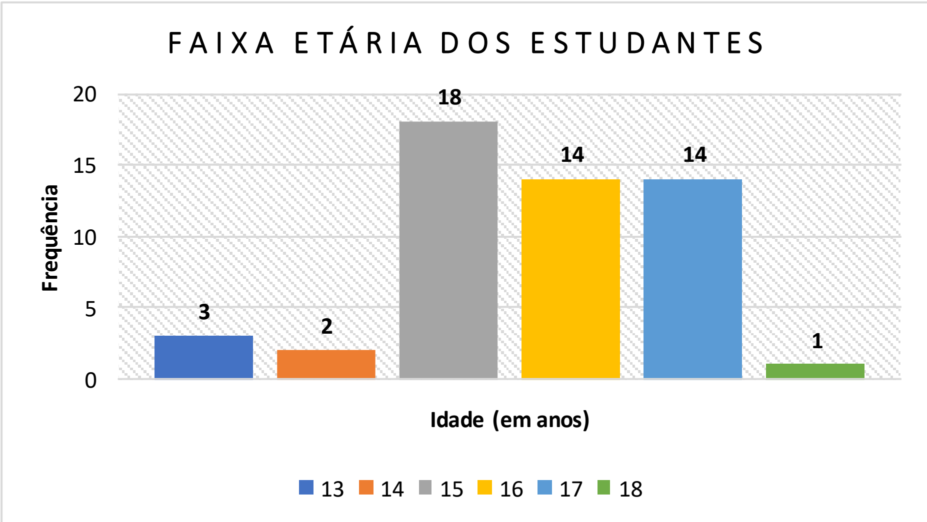
Nesta seção apresentamos a descrição e análise dos questionários respondidos pelos participantes. Iniciaremos pelas informações pessoais coletadas na etapa 2 e, em seguida, trataremos da etapa 3.

Ao todo, 53 participantes responderam ao questionário, mas um deles não autorizou a utilização dos dados. Portanto, a nossa amostra foi constituída por 52 estudantes, designados, respectivamente, por E1, E2, ..., E52, sendo 30 do sexo feminino e 22 do masculino.

Em relação à cor/raça, a maioria (28) denominou-se branca, seguido por parda (17), amarela/asiática (6) e indígena (1). Nenhum respondente assinalou a opção preta. Por outro lado, verificou-se um equilíbrio entre o tipo de instituição que os estudantes estavam cursando em 2020, visto que 55,8% eram de escolas particulares e 44,2% de públicas. Dentre as públicas, 12 participantes eram de instituições federais, 4 de estaduais e 7 de municipais.

Em relação à faixa etária, a maior parte da amostra tinha entre 15 a 17 anos de idade, segundo a figura 4. É importante destacar que, segundo os critérios do PISA, 57,7% dos estudantes poderiam ser selecionados para realizar o exame em uma hipotética aplicação em 2020.

**Figura 4 – Gráfico da faixa etária dos estudantes**




Fonte: elaborado pelos autores.

A maioria dos participantes estava matriculada no Ensino Médio em 2020, com destaque para a 1ª série, que apresentou a maior representatividade, com 36,5% da amostra, seguido pela 3ª série, com 23,1%, e pela 2ª série, com 19,2%. Com relação ao Ensino Fundamental, 13,5% dos estudantes eram do 8º ano e 7,7% do 9º ano.

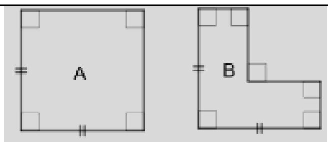
Por fim, questionamos se os discentes já haviam reprovado algum ano de escolaridade. Os dados evidenciaram 5 respostas afirmativas e 45 negativas. Embora seja um número aparentemente pequeno (5), a taxa de reprovação nesta amostra (isto é, de estudantes que já experimentaram a reprovação escolar) é de 9,6%, assemelhando-se às estatísticas oficiais coletadas pelo Censo Escolar de 2018, em que a taxa média de reprovação no Ensino Básico brasileiro foi de 8,4%, sendo de 5,1% nos anos iniciais do Ensino Fundamental, 9,5% nos anos finais deste mesmo segmento e 10,5% no Ensino Médio.

No prosseguimento desta seção, debruçamo-nos sobre a etapa 3, e a tabela 2 apresenta as vinte afirmações matemáticas propostas no questionário, as quatro alternativas e as respectivas frequências. É importante mencionar que as afirmações 1 a 10, 19 e 20 foram extraídas de uma questão-exemplo do PISA 2021/2022 e as demais foram de nossa autoria.

**Tabela 2 – Distribuição das alternativas em relação às vinte afirmações matemáticas[4]**

| Afirmações | Sempre verdadeira (SV) | Algumas vezes verdadeira (AV) | Nunca verdadeira (NV) | Não sei |
|---|---|---|---|---|
| 1. Quando um número inteiro é multiplicado por si próprio, o resultado é um número par. | 3 | **43 (82,7%)** | 3 | 3 |
| 2. O dobro de um número inteiro é um número par. | **44 (84,6%)** | 7 | 0 | 1 |
| 3. Metade de um número ímpar é um número inteiro. | 4 | 6 | **39 (75%)** | 3 |
| 4. A pessoa com maior número de moedas tem a maior quantia de dinheiro. | 1 | **45 (86,5%)** | 6 | 0 |
| 5. Se uma moeda for lançada 50 vezes, a face com a cara vai ficar voltada para cima 25 vezes. | 6 | **36 (69,2%)** | 4 | 6 |
| 6. Um número divisível por 4 também é divisível por 2. | **46 (88,5%)** | 6 | 0 | 0 |
| 7. Um número divisível por 9 também é divisível por 6. | 7 | **25 (48,1%)** | 16 | 4 |
| 8. A soma de dois números ímpares é um número ímpar. | 12 | 5 | **35 (67,3%)** | 0 |
| 9. Se adicionares o mesmo número ao numerador (cima) e ao denominador (baixo) de uma fração, o valor da fração aumenta. | 9 | **16 (30,8%)** | 14 | 13 |
| 10. $A - B = B - A$. | 9 | **19 (36,5%)** | **20 (38,5%)** | 4 |
| 11. $A/B = B/A$ (o símbolo / indica divisão). | 8 | **20 (38,5%)** | **22 (42,3%)** | 2 |
| 12. Quanto maior o número de lados de um polígono, maior o perímetro. | 18 | **23 (44,2%)** | 2 | 9 |
| 13. A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3. | **35 (67,3%)** | 11 | 0 | 6 |
| 14. O produto de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 6. | **28 (53,8%)** | 15 | 3 | 6 |
| 15. Um número elevado a zero é igual a 1. | **38 (73,1%)** | **8 (15,4%)** | 4 | 2 |
| 16. Um número dividido por zero é igual a zero. | 22 | 2 | **28 (53,8%)** | 0 |
| 17. Quando dividimos zero por um número, o resultado é zero. | **39 (75%)** | **5 (9,6%)** | 5 (9,6%) | 3 |
| 18. Os números ímpares também são números primos. | 10 | **38 (73,1%)** | 3 | 1 |
| $3x + 1 = \frac{6x + 2}{2}$ 19. A igualdade acima é... | **37 (71,2%)** | 4 | 8 | 3 |

[4] Para auxiliar na leitura dos dados, utilizamos um esquema de cores, a saber: **VERDE:** a maioria dos participantes (porcentagem maior do que 50%) assinalou a alternativa correta; **AMARELO:** a alternativa com a maior frequência era a correta (porcentagem menor do que 50%); **VERMELHO**/**AZUL:** a alternativa com a maior frequência (em vermelho) não era a correta (em azul).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  20. O perímetro da figura A é maior do que o perímetro da figura B. | 16 | 8 | **25 (48,1%)** | 3 |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com base na tabela 2, é possível afirmar que o desempenho dos estudantes em doze das vinte afirmações foi satisfatório (destacadas em verde), visto que a maioria deles assinalou a alternativa correta. Porém, neste estudo abordaremos somente as afirmações que apresentaram frequências problemáticas, ou seja, as destacadas em amarelo ou em vermelho/azul.

Para auxiliar na análise dessas sentenças, utilizaremos também alguns trechos escritos pelos participantes nas questões discursivas. Mas, de antemão, exibimos a tabela 3, que mostra quais foram as afirmações escolhidas pelos estudantes para ilustrar cada uma das três alternativas. Novamente utilizaremos as cores azul e vermelho para destacar, respectivamente, as indicações corretas e equivocadas.

**Tabela 3 – Distribuição das respostas discursivas em relação às vinte afirmações matemáticas**[5]

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **SV** | - | 12 | 1 | - | 1 | 6 | - | - | - | 1 | - | 1 | 2 | - | 5 | 3 | 3 | 1 | 6 | - | **42** |
| **AV** | 7 | - | - | 8 | 7 | - | 1 | - | 1 | 6 | 2 | - | - | 2 | - | - | - | 7 | - | - | **41** |
| **NV** | - | - | 11 | - | 1 | - | - | 11 | - | 5 | 1 | - | - | - | 2 | 7 | - | - | 1 | 4 | **43** |

Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, abordaremos os resultados das afirmações 7, 9, 10, 11, 12, 15, 17 e 20.

Com relação à afirmação 7, sobre um número divisível por nove também ser por seis, é possível constatar na tabela 2 que não houve um consenso entre os participantes, visto que 25 assinalaram a alternativa correta AV e 16 marcaram NV. Com base na tabela 3, apenas o E41 argumentou sobre essa sentença, ao afirmar que "*depende muito do número, se for 54, por exemplo, será divisível por 6, mas se for 81 não será*". No caso, o discente apresentou uma simples verificação numérica para validá-la, a qual enquadramos no empirismo ingênuo de Balacheff (1988). Já para contestá-la, o aluno exibiu um contraexemplo. É importante destacar que a taxonomia desse pesquisador não categoriza as refutações.

Devido ao baixo quantitativo de justificativas, utilizaremos a afirmação 6, sobre a divisibilidade por quatro e por dois, para inferir algumas hipóteses. Verifica-se que a maioria da

[5] Não foram consideradas as respostas que apenas indicaram a afirmação, sem justificá-la. Desconsideramos também as respostas que não possibilitavam associar a uma determinada afirmação. Além disso, alguns estudantes indicaram e argumentaram mais de uma afirmação por questão.

amostra julgou adequadamente esse item. Com base nas respostas discursivas, o principal argumento para corroborá-la deve-se ao fato de que, "*como quatro é múltiplo de dois, todo número divisível por quatro também será divisível por dois*" (Justificativa do E30). Devido ao indicativo de generalização, consideramos esse raciocínio uma experiência crucial. Sendo assim, uma provável inferência é de que os 16 estudantes que marcaram "Nunca" na afirmação 7 tenham raciocinado erroneamente, do seguinte modo: como nove não é múltiplo de seis, os números divisíveis por nove não serão por seis. Ou ainda, há a possibilidade de terem realizado somente uma verificação numérica (empirismo ingênuo) com o doze, por exemplo, e generalizado que a afirmativa era sempre falsa.

A afirmação 9, "se adicionares o mesmo número ao numerador (cima) e ao denominador (baixo) de uma fração, o valor da fração aumenta", provavelmente, foi a menos consensual entre os participantes, visto que as frequências das quatro alternativas foram próximas. Inclusive essa assertiva deteve a maior representatividade da opção NS, com 13 discentes, talvez devido à própria dificuldade que os alunos costumam demonstrar no tratamento desse conteúdo. Além disso, 16 assinalaram a opção correta AV, 14 marcaram NV e 9 escolheram SV. Com base nas questões discursivas, observou-se que apenas o E14 argumentou sobre essa sentença, como mostra o fragmento a seguir:

"[algumas vezes é verdadeira], *pois na maioria dos casos isso realmente ocorre, mas supondo que tanto o numerador quanto o denominador sejam o mesmo número, ao adicionarmos outro em ambos o valor da fração continuará o mesmo*".

Destaca-se nessa resposta a construção de um argumento que busca generalizar esse resultado para o caso específico (fração aparente que representa a unidade).

As afirmações 10 e 11, sobre a comutatividade da subtração e da divisão, respectivamente, apresentaram índices semelhantes, visto que houve praticamente um empate entre as alternativas NV e AV. Os estudantes que assinalaram a primeira delas possivelmente basearam-se em uma verificação simples (empirismo ingênuo) ou ainda assumiram que, por serem letras distintas, os valores associados a elas também eram diferentes. Os fragmentos dos E40 e E8, respectivamente, corroboram isso:

"*se você pegar 3/6 vai dar 0,5 e 6/3 e vai dar 2.*"

"*[...] visto que não tem chance das subtrações (A - B e B - A) serem igualdades pelo fato de A ser diferente de B.*"

Os discentes que indicaram AV, que era a alternativa correta para ambas as sentenças, apresentaram diferentes argumentos. O E26 justificou que a afirmação 10 nem sempre era verdadeira através de um exemplo numérico ($20 - 3 \neq 3 - 20$). Já o E17 argumentou sobre a afirmação 11 utilizando apenas termos matemáticos: "*$A/B$ será igual a $B/A$, se $B = A$*". Contudo, ele não considerou o caso em que os números são opostos, que foi devidamente apontado pelo E19: "*Apenas se $A^2 = B^2$*". Apesar das evidências de generalização dos dois últimos estudantes, não as consideramos uma prova conceitual no sentido de Balacheff (1988), visto que não foram descritas a partir de deduções lógicas.

As duas afirmações geométricas do questionário (12 e 20), curiosamente, não foram consensuais entre os participantes, visto que nenhuma alternativa predominou sobre as demais.

Com relação à afirmação 12, sobre o aumento no número de lados de um polígono implicar o aumento do perímetro, 23 participantes escolheram a opção correta AV e 18 marcaram SV. Ao verificar a tabela 3, notou-se que apenas o E14 indicou essa afirmação para justificar, conforme ilustra o trecho a seguir:

"[é sempre verdadeira], *pois se há um triângulo com um lado medindo x, seu perímetro será de 3x, e se aumentarmos o número de lados para transformá-lo em um quadrado com mesmo tamanho de lado, seu perímetro será de 4x.*"

Logo, devido ao baixo quantitativo de justificativas, será necessário inferir algumas hipóteses. Possivelmente, quem assinalou a opção SV raciocinou como o E14. Contudo, para comprovar que a afirmação 12 nem sempre era verdadeira, bastaria um desenho que servisse como contraexemplo.

Com relação à afirmação 20, sobre o perímetro da figura A ser maior do que o perímetro da figura B, 25 estudantes escolheram a opção correta NV e 16 marcaram SV. Porém, nenhum dos quatro alunos que indicaram essa afirmação para justificar a opção correta obteve êxito. Apesar disso, possivelmente a maioria dos discentes que assinalaram NS atribui valores numéricos para os lados.

Finalmente, apresentamos os resultados das afirmações mais problemáticas (15 e 17) baseados na tabela 2, visto que registraram a menor frequência de acertos.

Na afirmação 15, sobre um número elevado a zero ser igual a 1, verifica-se que 38 escolheram SV e apenas 8 assinalaram corretamente AV. Porém, as respostas dos participantes que indicaram essa sentença para justificar não nos deram nenhuma pista sobre a causa desses índices, visto que a maioria reescreveu a própria afirmação para mostrar que era verdadeira. Uma hipótese é que durante o processo de ensino-aprendizagem ocorra um efeito similar à brincadeira "telefone sem fio" em relação a certas propriedades matemáticas.

Sabemos que todo número elevado a zero é igual a 1, *exceto* o próprio zero, visto que constitui uma indeterminação. Contudo, ao longo da trajetória escolar, a maioria dos alunos acaba não pronunciando o trecho final da frase, por isso a analogia com tal brincadeira de criança. Deste modo, é imprescindível que nós, professores, sempre que ensinarmos os conceitos de potenciação, enunciemos essa propriedade por completa e, se possível, também a justifique, a fim de que não se torne um “mantra” entre os alunos.

Já a afirmação 17, sobre a divisão de zero por um número ser igual a zero, a pesquisa registrou 39 estudantes na opção SV e 5 na correta AV. Para ilustrar a alternativa que teve a maior representatividade da amostra, segue a justificativa descrita pelo E16:

“*Quando dividimos zero por qualquer número, o resultado é sempre zero, já que, por exemplo, se João tem 0 maçãs e ele quer dividir entre 5 amigos, ele não tem maçãs para dividir, portanto todos ficam com zero maçãs.*”

Acredita-se que esse raciocínio predominou entre os participantes. Mais uma vez, inferimos que tais indicadores sejam motivados pela repetição de certos “mantras”, como “zero dividido por qualquer coisa é sempre zero”, sem nenhuma problematização. Deste modo, o que era exceção, no caso, quando o divisor também é zero, passa a ser incorporado à regra.

É importante destacar que, apesar de 28 participantes terem assinalado a alternativa correta “NV” na afirmação 16, sobre a divisão por zero ser igual a zero, notou-se que outros 22 julgaram que esse item era sempre verdadeiro. Isso pode ser um indicativo de que a divisão envolvendo o zero, esteja ele no dividendo ou no divisor, suscite dúvidas entre os estudantes da Educação Básica.

Em vista dos resultados, propomos na figura 5 uma problematização informal que poderia ser desenvolvida na Educação Básica sobre uma divisão envolvendo o zero:

**Figura 5 – Problematização sobre divisão com o zero**

Suponha que fosse possível dividir um número por zero, por exemplo, $\frac{2}{0}$ e que o resultado fosse igual a zero. Por outro lado, sabemos que é válida a divisão $\frac{0}{2}$, cujo resultado é zero. Logo, ao comparar ambas as divisões, teríamos $\frac{2}{0} = \frac{0}{2}$. Porém, pela propriedade fundamental das proporções, obteríamos a igualdade $4 = 0$ (e tantas outras) que é contraditória. Portanto, a nossa suposição não pode ser verdadeira. No caso da divisão $\frac{0}{0}$, é possível questionar se o resultado é igual a 0, visto que “zero dividido por um número é 0”, ou se é igual a 1, dado que “um número dividido por ele mesmo é 1”. E posteriormente encaminhar a discussão para uma indeterminação.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Passemos, agora, às considerações finais deste manuscrito.

## Considerações Finais

Este estudo se propôs a investigar como uma amostra de 52 estudantes da Educação Básica de escolas públicas e privadas raciocina e argumenta sobre 20 afirmações matemáticas, por meio da aplicação de um questionário virtual.

Com relação às respostas discursivas dos participantes, constatou-se que os argumentos eram pautados em verificações empíricas, sendo poucos os que apresentaram indicativos de generalização. Logo, é possível inferir que o raciocínio argumentativo dos estudantes que constituíram a nossa amostra enquadra-se na prova pragmática de Balacheff (1988). Porém, destaca-se que esse resultado não é inédito no campo da Educação Matemática, visto que outras pesquisas (SOUZA, 2009; AGUILAR JÚNIOR, 2012; CALDATO; UTSUMI; NASSER, 2017) descrevem considerações semelhantes ao investigar as justificativas de alunos da Educação Básica. Considerando agora o advento da BNCC, que reforça a proposta do desenvolvimento do raciocínio matemático e das habilidades relacionadas à argumentação, chegando a propor até competências específicas, a pesquisa em tela sinaliza que o trabalho pedagógico com justificativas e provas em Matemática faz-se necessário.

Com relação à análise dos documentos oficiais, verificamos que existem aproximações entre a matriz do PISA 2021/2022 e a BNCC, especialmente no que tange ao que se define por letramento matemático e o trabalho pedagógico com vistas ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Independentemente das críticas e das tensões que envolvem as avaliações de largo alcance e o que representa social, econômica, cultural e politicamente uma centralização curricular tencionada por organismos internacionais como OCDE e Banco Mundial e por movimentos nacionais que reúnem de banqueiros a cervejeiros, o grande capital brasileiro, vimos de forma positiva que a habilidade de argumentar e demonstrar em Matemática tenha sido contemplada como uma competência a ser desenvolvida no Ensino Básico, tanto na matriz de referência quanto no texto do documento curricular.

Por fim, acreditamos que a maior contribuição deste estudo para a comunidade científica seja a reflexão oriunda das afirmações 15 e 17 sobre o valor de zero elevado a zero e a divisão por zero, respectivamente. Formulamos a hipótese de que certas propriedades matemáticas, quando não problematizadas durante a Educação Básica, podem desencadear um efeito de “telefone sem fio” entre os alunos.

Portanto, para o desenvolvimento do raciocínio argumentativo nos estudantes, defendemos uma abordagem do ensino da Matemática de forma problematizada, a fim de privilegiar a produção de sentidos em detrimento da mera exposição de fatos, procedimentos e informações (GIRALDO, 2019). Um trabalho mais focado em justificativas deve ser estimulado também nos instrumentos de avaliações institucionais (provas, testes, trabalhos internos das escolas, elaborados pelos professores), a fim de que se crie uma cultura em prol da argumentação, fundamental para atuação do estudante em outros contextos sociais, para além da sala de aula de Matemática.

## Agradecimentos

Os autores manifestam os sinceros agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento e incentivo a esta pesquisa. Agradecemos, ainda, aos estudantes que gentilmente participaram desta investigação, à professora Ana Cristina Andrade dos Santos pelo olhar crítico e atencioso e à professora Lilian Nasser pela inspiração, incentivo e tradução do resumo.

## Referências

AGUILAR JÚNIOR, C. A.; CALDATO, J. C. Argumentação e prova matemática no PISA 2012. In: Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro, 4, Rio de Janeiro/RJ. **Anais**..., 2020, p. 1-14. Disponível em: http://eventos.sbem.com.br/index.php/spem-rj/ix-spem-rj/paper/view/1453/1212. Acesso em: 16 mar. 2021.

AGUILAR JÚNIOR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. **VIDYA**, Santa Maria/RS, v. 32, n. 2, p.133-147, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/278. Acesso em: 16 mar. 2021.

ALYRIO, R. D. **Métodos e técnicas de pesquisa em administração**. Volume único. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009. 281 p. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/6448. Acesso em: 16 mar. 2021.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 147-176, 1987.

______. Aspects of proof in pupil’s practice of school mathematics. In: D. PIMM (Ed.), **Mathematics teachers and children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em matemática**: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 996f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, 2005. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3140. Acesso em: 16 mar. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 16 mar. 2021.

______. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 16 mar. 2021.

______. **PCN + Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Secretaria de

Educação Básica. Brasília, MEC/SEB, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 16 mar. 2021.

CALDATO, J.; AGUILAR JÚNIOR, C. A. Raciocínio Argumentativo em Matemática: uma investigação com estudantes da Educação Básica. In: Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática, 1, Barra do Bugres/MT. **Anais**..., 2020, p. 1-15. Disponível em: https://matematicanaescola.com/eventos/index.php/ienopem/ienopem/paper/view/118/124. Acesso em: 16 mar. 2021.

CALDATO, J. **Argumentação, prova e demonstração**: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em matemática. 219 F. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2090_Carlos%20Caldato%20Correia.pdf. Acesso em: 16 mar. 2021.

CALDATO, J.; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. **RevistaTriângulo**, Uberaba/MG, v. 10 n. 2, p. 74-93, 2017. Disponível em: http://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583/0. Acesso em: 16 mar. 2021.

GIRALDO, V. Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada. In: 13º ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais**... Cuiabá: SBEM, 2019. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php. Acesso em: 16 mar. 2021.

GONSALVES, E. P. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. 2 ed. Campinas: Alínea, 2001. 80 p.

JOLANDEK, E. G. **Reforma curricular, avaliação em larga escala e pisa**: um olhar a partir de percepções docentes. 2020. 189 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2020. Disponível em: https://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/3093. Acesso em: 16 mar. 2021.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A. Argumentação e prova matemática com geometria dinâmica. **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre/RS, v. 16, n. 1, p. 1-10, 2018. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86021. Acesso em: 16 mar. 2021.

NUNES, J. S. V; ALMOULOUD, S. A. O modelo de Toulmin e a análise da prática da argumentação em matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo/SP, v. 15, n.2, p. 487-512, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/14592. Acesso em: 16 mar. 2021.

ORGANIZAÇÃO PARA COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO (OCDE). **PISA 2021 Matriz de referência de Matemática**[6]. OCDE, 2018. Disponível em: https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf. Acesso em: 16 mar. 2021.

SOUZA, M. E. C. O. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar**: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. 115 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11429. Acesso em: 16 mar. 2021.

[6] Tradução nossa para *PISA 2021 Mathematics Framework*.