As Equações e o Conceito de Função

JANETE BOLITE FRANT

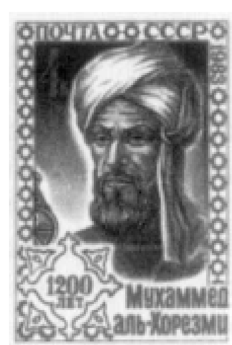
RESUMO / Neste texto vamos discutir as diferenças, semelhanças e relações entre as idéias de equações e funções; a elaboração de gráficos cartesianos e sua aplicação a vários campos do conhecimento, bem como a trajetória de suas construções na história da matemática. Embora voltado às 6ª, 7ª e 8ª séries da escola básica, o assunto é interessante também para a formação de professores e outros níveis de ensino. Pesquisas apontam para a importância que vem ganhando o ensino e a aprendizagem de função e indicam que este tema seja trabalhado na escola básica. Os vídeos mostram alunos trabalhando com os temas envolvidos.

PALAVRAS-CHAVE / Educação Matemática, Equações - Funções, Gráficos Cartesianos, Tecnologia.

Introdução

Ser professor em nosso país é tarefa árdua, em geral, requer que se trabalhe em pelo menos mais de uma escola para sobreviver e, quando sobra tempo nem sempre sobra dinheiro para fazer cursos de educação matemática ou comprar livros, muitas vezes é difícil encontrar livros onde moramos. Deste modo, resta-nos o livro didático ou a lembrança de algumas aulas que tivermos quando éramos estudantes. Neste programa temos a oportunidade de discutir um assunto que, quando abordado nos livros didáticos, deixam o professor sem muita possibilidade de criar seu próprio planejamento, portanto vamos lá. Muitas vezes o que parece simples, claro e óbvio esconde muitas facetas. Equações Algébricas e Funções não fogem a regra como veremos.

Para início de conversa, conhecer a história da matemática pode ter um papel mais útil em sala de aula do que o de ser simples "curiosidade" para entreter os alunos. Se viajarmos pela história veremos que o tema "equações", também chamado em textos antigos de "igualdades", é um assunto que foi tratado desde a antigüidade, ou seja, nos Papirus de Rind já é possível encontrar problemas cuja solução provinha da resolução de equações. A contribuição dos árabes foi tão importante que o nome Álgebra, acredita-se, tem sua origem no nome de um livro árabe. Função é uma idéia que surgiu lentamente a partir do século XVIII com a necessidade do homem estudar as "leis naturais", no entanto, somente no final do século XIX e início do século passado o conceito ganha generalidade e se afasta das condições iniciais de onde surgiu. Por vários motivos a escola adotou apenas esta definição formal de função baseada na teoria dos conjuntos, talvez pensando na uniformidade e unicidade da matemática e, misturando bem tudo isso, temos a impressão de que sempre foi assim.



Equações Algébricas e Funções

Se alguém disser que o conceito de igualdade é, em geral, considerado o mais simples e óbvio, na matemática, dificilmente será contestado. Afinal uma das primeiras lições que aprendemos foi que $1+1=2$. No entanto o símbolo "$=$" que nos parece hoje básico e indispensável tem apenas pouco mais de algumas centenas anos e, por mais de 2000 anos, vivemos sem este símbolo. Não porque não existissem símbolos, afinal desde as cavernas temos registros simbólicos, temos desde os primórdios registros dos números e dos símbolos de operações aritméticas, mas não existia o símbolo de igualdade.

Os matemáticos, em lugar de símbolos, usavam a linguagem cotidiana para expressar seus significados. Por exemplo, "Um número somado com 3 resulta 5"; "Que número pode ser decomposto como a soma de dois quadrados?"; "resolvendo o problema encontramos 17". Os exemplos mostram que existem vários significados para a igualdade "ser fatorado em", "resulta", "encontra-se" e assim por diante, dependendo do contexto matemático especificado. Assim vemos que, mesmo um caso considerado simples, envolve grande dose de complexidade e precisamos explicitar, pelo menos, parte dessa complexidade em sala de aula.

No caso das equações algébricas podemos ter sempre o caminho do cotidiano e o caminho da ciência sem privilegiar um ou outro. Os PCNs valorizam mais o primeiro, mas se queremos que nossos alunos sejam capazes de criar algo novo não podemos nos limitar ao cotidiano de fora da sala de aula e temos que incluir o próprio cotidiano da aula de matemática.

Assim, resolver a equação $4x + 4 = 5$ pode expressar diferentes problemas, com diferentes significados: "O quádruplo de um número mais quatro dá 5. Que número é esse?", ou "João tem um saco de bolas de gude, sabendo que quatro vezes o total de bolas mais quatro dão 5, descubra quantas bolas João tem no saco." Ou ainda, "Dada a equação $4x + 4 = 5$ calcule o valor da incógnita."

Esta primeira reflexão nos conduz à uma primeira questão: **Incógnita e Variável** são a mesma coisa?

Das histórias de detetive às novelas, quando dizemos que alguém está incógnito isto significa que esse fulano está disfarçado e precisa ser conhecido. E em matemática? Quem seria a incógnita no caso da equação acima? Podemos dizer que "x" seria tal incógnita? E dizer que $x = 1$ seria como desvendar o mistério desta incógnita?

Como foi dito acima, a idéia de função vem de tentativas de se encontrar leis matemáticas para descrever fenômenos naturais. Existem noções relacionadas ao conceito de função que contribuem para construir seu significado. O conceito de função aparece da noção de dependência na variação de duas grandezas. Por exemplo, o comprimento de uma circunferência depende de seu raio, quanto maior o raio, maior é o comprimento da circunferência. Neste caso específico, podemos também falar que quanto maior o comprimento da circunferência maior é seu raio. E lá vem contexto novamente, no primeiro caso podemos dizer que o comprimento de uma circunferência varia em função do seu raio e assim expressarmos o comprimento da circunferência em função do raio. No segundo caso, é possível expressarmos o tamanho do raio em função do comprimento da circunferência, ou seja, é possível definir esta dependência por uma função, como por exemplo, "Dada a função real C(r) tal que para cada r, C(r) é expressa como 2Πr." A exploração da dependência entre os valores do raio e do comprimento de uma circunferência pode gerar diferentes investigações:

a) Sabendo que o comprimento de uma circunferência pode ser descrito como Π multiplicado pelo dobro do raio, que valores podem ser encontrados para tal comprimento, justifique sua resposta."

b) Sabendo que o raio de uma circunferência depende de seu comprimento e que pode ser descrito como o comprimento da circunferência dividido por 2Π, que valores podem ser encontrados para o raio, justifique sua resposta."

Agora podemos voltar ao papo sobre incógnita e variável. Podemos dizer que no segundo caso, "variando" os valores do raio encontramos os valores do comprimento da circunferência e portanto r seria uma variável? Mas r não é incógnita também?

Segunda questão: **Toda variável é uma incógnita?** E vem logo a terceira questão: **Toda incógnita é uma variável?**

Novamente parece que temos algo simples, trivial mas não nos deixemos enganar pois para definir função foi necessário recorrer a noção de conjuntos, também bastante recente, ou do contrário teríamos sempre que depender de resultados particulares marcados em tabelas e não obteríamos a generalização tão conveniente e "familiar".

Assim, o conceito matemático de variável pode ser exemplificado como a seguir. "Dado o conjunto E = {x real tal que x e (0,1)}, o que significa isso? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é suscetível de os representar a todos." (Caraça, pp127)

A partir daí, a definição de função tomou o aspecto que conhecemos hoje. Mais um exemplo, ao escrever **a = f(t)** estamos dizendo que se **a** é a variável do conjunto dos espaços e **t** é a variável do conjunto dos tempos, a lei matemática **f** consiste numa correspondência entre **t** e **a**. Ou mais geral, Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x) se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x para y; chamamos x de variável independente e y de variável dependente. Nossa preocupação, no que diz respeito aos termos variável e incógnita. Na escola básica, portanto, deve dirigir-se sempre ao objetivo da aprendizagem. As palavras variável e incógnita encerram idéias que ajudam a esclarecer conceitos fundamentais da Álgebra e devem ser utilizados com este objetivo. Não faz sentido mergulhar alunos do ensino fundamental em formalismos que só vão significar alguma coisa quando as idéias associadas a cada significado estiverem compreendidas.

O ensino de funções vem sendo ministrado, pela maior parte dos educadores, de forma fragmentada. Primeiro se define função, em geral, como um tipo especial de relação, para em seguida, apresentar formas de representação de função em uma ordem que vai dos diagramas para a forma algébrica e desta para os gráficos. Em seguida, começa o estudo dos diversos tipos (polinomial do 1ºgrau, polinomial do 2º grau, exponencial,...) cada tipo independentemente dos outro. Características como crescimento, raízes, etc, são exaustivamente repetidos para cada tipo e mesmo assim, ao final de cada um e início do outro, os alunos não se sentem confortáveis com o assunto, apresentam dúvidas e ficam desmotivados pois cometem erros em exercícios considerados “triviais” pelos professores.

Existem hoje novas propostas nas quais as funções são estudadas sem separação por tipos. Trata-se de estudar todas ao mesmo tempo através de diversas atividades.

Pode-se pensar o estudo das funções em dois grandes momentos: no primeiro, a construção do conceito de função é feito através de atividades que envolvam situações cotidianas. Nesse momento, busca-se que o aluno comece a perceber relações de dependência entre duas ou mais variáveis. A grande diferença entre essa proposta e a antiga é o fato de se trabalhar diferentes tipos de funções conjuntamente. Propõe-se que a análise de aspectos tais como: crescimento, raízes, máximos, mínimos, etc..., sejam estudadas de uma só vez com os vários tipos de funções e não em capítulos diferentes, como ocorre geralmente, como se o conceito "raiz", por exemplo, fosse um para a função quadrática e outro para a modular.

No segundo momento, trabalham-se as equações utilizando o que foi aprendido sobre funções. Na realidade, as equações aparecem no primeiro momento como representação de algumas funções: o aluno é levado a perceber que algumas equações podem expressar funções. No segundo momento, ele vai aplicar o conceito de função para achar a solução de equações mais sofisticadas.

As atividades conduzem os alunos a traçar as relações entre esses dois tópicos – funções e equações – vendo como um conceito pode auxiliar na análise e solução de problemas que envolvem o outro. Tem-se aqui uma grande preocupação em não deixar que os estudantes vejam esses conceitos como coisas distintas ou totalmente desvinculadas. Assim, procuramos incentivar os alunos a perceber as equações como igualdades entre duas funções $F(x) = H(x)$. Deve-se discutir com ele quando é possível fazer equivalência desta igualdade com a igualdade $F(x) – H(x) = 0$, de forma a recair em uma equação do tipo $G(x) = 0$. Definida na forma $F(x) = H(x)$, haverá casos em que a equação ou não tem solução ou é uma identidade algébrica, outro assunto bastante negligenciado pela escola e que acarreta bastante confusão na cabeça dos alunos. Por exemplo, diante de equações como $x = x$ ou $x = x + 1$, os alunos costumam encontrar extrema dificuldade em encontrar o conjunto solução. Isto ocorre em geral porque estes casos jamais são sequer apresentados aos estudantes. Estes casos são importantes na construção do conceito de equação.

As atividades são feitas em grupo e discutidas entre os alunos e entre esses e o professor, o qual desempenhará o papel de orientador e questionador. Ressaltamos ainda a importância de se trabalhar com relatórios escritos pelos alunos desenvolvendo assim o espírito científico de investigação.

O papel quadriculado facilita a construção dos gráficos, mas algumas atividades podem ser feitas em computador ou com uma calculadora gráfica pois feitas a mão levariam uma eternidade. Quando se dispõe de recursos, não deve abrir mão da experimentação dos recursos tecnológicos, já amplamente veiculados entre os educadores matemáticos no Brasil e no mundo. Estas novas tecnologias auxiliam os alunos a construir gráficos de funções e a visualizar equações mais elaboradas, que se fossem feitos “à mão” dariam muito trabalho e talvez até não permitissem aos educandos ver algumas importantes características de algumas funções. Em outras palavras, a “máquina” entra aqui, como um recurso a mais na construção de gráficos, permitindo dessa forma que os alunos gastem mais tempo observando e conjecturando do que fazendo cálculos, além de tornar possível a observação de outros diferentes tipos de funções. Vale lembrar, que o custo com calculadoras é bem inferior já que com 10 calculadoras podemos trabalhar numa turma com cerca de quarenta alunos divididos em grupo de quatro e as mesmas podem ser, assim como os computadores, utilizadas em outras turmas. Uma outra vantagem da calculadora é que por ser menor cabem dez em uma pasta e podem ser levadas para a própria sala não requerendo nenhum outro gasto.

É claro que nem todo trabalho se limita ao computador e a calculadora, “o papel e o lápis” têm sua importância, visto que só observar não é suficiente, é preciso que o aluno anote suas conclusões e as defronte com as dos colegas, a escrita matemática é de extrema importância para que o aluno consiga organizar o que está vendo e ir construindo o conceito sobre o que concluiu. A nova proposta é deixar o aluno PENSAR, chegar a conclusões por si próprio, construir conhecimento, pois só se aprende quando o objetivo do estudo tem sentido.

V. Bibliografia para o professor referente aos artigos anteriores

ARCAVI, A - *Álgebra, História e Representação*. Série Reflexões em Educação Matemática. Org: Fainguelernt, E., Gottlieb, F., e Frant, J.B., vol. 2, p- 38-74. 1996.

ABRANTES, P. (1995). *Avaliação em educação matemática.* Rio de Janeiro: MEM/USU - GEPEM.

ABRANTES, P., LEAL, L. C. & PONTE, J. P. (Orgs). (1995). *Investigar para aprender matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

AZEVEDO, M. V. R. (1993). *Jogando e construindo matemática.* São Paulo: Ed. Unidas.

ADLER, I. - *Iniciação à matemática hoje* - Ao Livro Técnico SA. - Matemática e desenvolvimento mental - Cultrix.

BICUDO, M. A. - *Educação Matemática* - Cortez. Revista Educação e Matemática, n.56, p.35-39, 2000.

BIGODE, Antônio José Lopes – *Matemática Hoje é Feita Assim*, 6ª série, São Paulo, FTD. 2000.

BOYER, Carl B - *História da Matemática* - Edgard Blucher/EDUSP. 1974.

CARAÇA, B.J. - *Conceitos fundamentais da matemática* - Lisboa, Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CARRAHER, T.N. et alii - *A matemática da vida diária* - Recife, (mimeo), 1988.

___________ - *Na vida dez na escola zero* - Cadernos de pesquisa nº42 - São Paulo, 1982.

CARRAHER, Terezinha Nunes (org.) "Aprender pensando", Editora Vozes.

CHAGAS, Clarice. Como meninos do ensino fundamental pensam equação. Monografia de Especialização em Ensino de Matemática - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. (mimeo) Orientador: Monica Rabello de Castro, Rio de Janeiro, 2002

COLL, C., MARTIN, E., MAURI, M., ONRUBIA, J. SOLÉ, I. & ZABALA, A. - *O construtivismo na sala de aula* - (C. Sclilling, trad.) São Paulo: Ática, 1997.

CROWLEY, Mary L.: *O Modelo de Van Hiele de desenvolvimento do ensamento geométrico: Aprendendo e ensinando geometria*; Organizadores: Mary Montgomery Lindquist e Albert P. Shulte; Tradução: Hygino H. Domingues; Editora Atual; SP; pp. 1 - 20; (1994).

COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P., trad. Domingues, Hygino H. –

Idéias da Álgebra, São Paulo, Atual. 1994.

D'AMBROSIO, U. - *Da realidade à ação: reflexões sobre a Educação Matemática* - São Paulo, Summus, 1986.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática; Da Teoria à Prática. 2.ed. Campinas, Editora Papirus,1997,121p.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. (1993) A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. IN: Schliemann, A.D., Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L. & Da Rocha Falcão, J.T. (1993) *Estudos em psicologia da educação matemática*. Recife, Editora Universitária UFPE.

DIENES, Z.P. - *Aprendizado moderno da matemática* - Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

___________ - *O poder da matemática* – São Paulo, EPU, 1975

___________ - *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática* - São Paulo, EPU, 1975

DIENES, Z P, GOLDING - *Exploração do espaço e prática da medição* - Coleção "Os primeiros passos em Matemática" vol 3 - São Paulo, EPU, 1975

EVES, Howard: *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*; Vol.3; Tradução: Hygino H. Domingues; Atual Editora; SP; (1993).

FAINGUELERNT, Estela Kaufman: CHAVES, Luiz; KOHN, Maurício; BARRETO, Sandra Maria; SINISCALCHI, Solange: *Trabalhando com geometria*; Editora Ática, Vol 3; SP; 1989.

IFRAH, George "Os Números, a história de uma grande invenção", Editora Globo, 1992.

IMENES, Luis Márcio, "Descobrindo o teorema de Pitágoras" da coleção Vivendo a Matemática, Editora Scipione.

LERNER, Délia. Matemática na escola aqui e agora. Artes Médicas, Porto Alegre.

LINS, Romulo & GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.* Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MAHER,C. Professores podem ajudar seus alunos a construir argumentos convincentes? - Série Reflexões em Educação Matemática vol 5, MEM/USU, Rio de Janeiro, 1998.

MEIRA, L. (1996). Atividade algébrica e produção de significados em matemática: Um estudo de caso. M.G. Dias e A. Spinillo (Eds.), Tópicos

Em Psicologia Cognitiva. Recife: Editora Universitária da UFPE.

MEIRA, Luciano - *Atividade algébrica e produção de significados em matemática: Um estudo de caso.* M.G. Dias e A. Spinillo (Eds.), Tópicos Em Psicologia Cognitiva. Recife: Editora Universitária da UFPE. (1996).

OLIVEIRA, Rosana - *Pensando Algebricamente antes da 7ª série: Uma Outra Perspectiva sobre os Processos de Construção do Conhecimento* - Dissertação de Mestrado, USU – RJ. 1997.

PAPPERT, S. (1984). *Logo - computadores e educação.* São Paulo: Brasiliense.

PAPY e PAPY, Frederique. – *Mathématique moderne* – Paris, Didier Editeur, vols 2, 3, 5 e 6, 1967.

PARRA, Cecília et outros - *Didática da Matemática* - Reflexões Pedagógicas. Trad. Juan Acunã Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

POLYA, George. A arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1977.

POWELL, A. B. e LOPES, J. - *A escrita como veículo da aprendizagem matemática* - Rio de Janeiro, Boletim GEPEM, 1995.

PROJETO FUNDÃO - *Geometria na Era da Imagem e do Movimento* - Org LEITE, Maria Laura M. & NASSER, Lilian. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

REVUZ, A. - *Matemática moderna, matemática viva* - São Paulo, Fundo de Cultura, 1967.

ROCHA, Tânia, BORGES, Heloisa. Jogos Matemágicos. Belo Horizonte, Editora do Brasil, 1992.75 p.

SCHOENFELD, Alan H. Heurísitcas na sala de aula. IN: KRULIK, Stephen, Reys, Robert. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. (Trad. Hygino Domingues e Olga Corbo) São Paulo: Editora Atual, 1998.

VALENTE, J. A. - Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação, Campinas, Unicamp, 1993.