Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental

Maria da Conceição Vieira Gomes

Resumo / O texto apresenta e sugere a exploração de diversas situações que podem levar à criação e manipulação de equações e de expressões algébricas em diferentes estágios do ensino fundamental. Tal manipulação constitui-se numa importante etapa na aquisição do instrumental algébrico que é tão poderoso para a resolução de problemas. Destaca-se a idéia de alfabetização algébrica e evidencia-se o entrelaçamento existente entre Álgebra, Geometria e Aritmética.

Palavras-chave / Alfabetização Algébrica, Álgebra nas Séries Iniciais, Atividades em Álgebra, Embricamento da Álgebra com a Geometria e com a Aritmética.

I. Considerações e algumas definições para ponto de partida

O que é Álgebra? E o que é Matemática? Sabemos que tanto uma quanto a outra são criações humanas cujas origens se perdem no tempo. E, apesar de documentação existente garantir que há mais de 3500 anos já existia boa quantidade de conhecimentos matemáticos, não é possível dar uma definição satisfatória para Matemática. Porém, se penso na produção do conhecimento matemático, parece-me viável a afirmativa de que ***fazer Matemática é descobrir relações e expressá-las de forma simbólica.*** Números, equações, expressões algébricas, diagramas, gráficos e tabelas são modos efetivos de expressar relações, comunicando-as a outros.

Vou falar aqui desse "fazer Matemática" em sala de aula, incluindo conceitos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria desde as séries iniciais. Nesta nossa conversa, vamos considerar que ***a geometria se ocupa do estudo de figuras situadas no espaço comum*** e que ***a álgebra elementar se constitui basicamente no estudo das equações e das expressões algébricas*** (funções).

Na minha prática em sala de aula tenho vivenciado a possibilidade de organizar atividades tais, que levam os alunos a descobrirem relações e a criarem formas de registrar suas descobertas. A possibilidade de dizer o que entendeu sobre o que está sendo discutido é apreciado pela maioria dos alunos e a variedade de respostas obtidas pode ser aproveitada para explorar diversos conceitos em qualquer nível de ensino. Todo o grupo, é claro, aí incluído também o professor, aprende com a diversidade revelada por seus elementos. Mesmo as representações que apresentem problemas possuem um significado, pois resultam da intenção de comunicação de quem as criou e, assim como a fala de uma criança pequena, representam uma etapa de um processo dinâmico. Desse modo, assim como os que lidam com essa criança entendem suas estranhas palavras, também o professor deve procurar entender os estranhos "erros" que seus alunos cometem.

De acordo com o nível de escolaridade ou de idade do grupo a que se destine, uma mesma relação pode ser apresentada através de situações distintas que podem gerar representações idênticas ou não. Vou dar um exemplo apresentando três atividades que podem levar à obtenção e manipulação de equações simples nas séries iniciais.

I.1. Descrição de atividades que possibilitam a exploração concomitante de conceitos da aritmética, da álgebra e da geometria

Atividade A: Distribuição e estimativa

Atividade em dupla numa classe de alfabetização.

Material para cada dupla: duas caixinhas de fósforos, uma forrada com papel verde e outra com papel amarelo, 8 feijões (ou outras sementes) e uma folha para cada um fazer registros

Atividade:

1ª parte: O jogo

- Cada aluno da dupla distribui os 8 feijões pelas duas caixas sem que seu par possa ver.

O outro escolhe uma das caixas. Ele pode segurar e sacudir somente uma das caixas e deve descobrir quantos feijões estão em cada caixa sem abri-las.

- Depois de dar a resposta, o segundo abre as caixas para verificar se acertou.

- Os dois se alternam nas duas ações, tentando fazer sempre distribuições diferentes das já feitas.

2ª parte: O registro

Quando os dois considerarem que já esgotaram todas as possibilidades, cada um registra, como achar melhor, as distribuições que fez.

3ª parte: Socialização e exploração dos registros

Tendo observado a feitura dos diversos registros, o professor vai apresentá-los todos à turma, explorando cada um deles.

Se alguém fez desenhos das caixas, uma com dois e outra com seis feijões, o professor pode pedir que cada um faça um desenho parecido que mostre outra arrumação possível.

Se um aluno escreveu um par de números, por exemplo **3** e **5**, o professor pode pedir que todos escrevam novos pares de números e vai registrando no quadro as soluções que forem sendo apresentadas.

O professor pode também propor uma organização das possíveis soluções introduzindo uma tabela que vai sendo preenchida pela turma.

verde	amarelo
0	8
1	7
2	.....

A tabela pode ser preenchida com a manipulação dos feijões feita pelos alunos que desejarem usá-los.

Cálculos podem surgir escritos por um aluno, porém, se isso não ocorrer, o professor pode desafiar a turma a escrever cálculos. Pode pedir, por exemplo, que escrevam cálculos que sirvam para substituir cada um dos desenhos a seguir:

Provavelmente alguém vai propor $3 + 5 = 8$ e $4 + 4 = 8$, deflagrando-se aí a busca de novos cálculos pertinentes à atividade anteriormente desenvolvida.

A proposta de organização de todos os possíveis cálculos feita com a participação dos alunos pode gerar atividade algébrica significativa, pois o desenrolar da feitura e a observação da seqüência abaixo evidenciam várias relações a serem exploradas.

$0 + 8 = 8$ $\quad 1 + 7 = 8$ $\quad 2 + 6 = 8$ $\quad 3 + 5 = 8$ $\quad 4 + 4 = 8$

$8 + 0 = 8$ $\quad 7 + 1 = 8$ $\quad 6 + 2 = 8$ $\quad 5 + 3 = 8$

Finalizando o comentário sobre esta etapa, observo que as propostas, os registros e as falas que vão sendo feitas pelos alunos vão ajudar a delimitar o quanto se pode avançar nessa exploração.

Atividade B: Resolução de um problema aberto envolvendo dinheiro. Uso de uma tabela.

(Obs.: Chama-se problema aberto àquele que admite várias soluções)

Numa turma de 3ª, 4ª , 5ª ou 6ª série, organizada em grupos com 2 ou 3 ou 4 alunos.

Situação:

Dois amigos Carlos e Miro juntaram o dinheiro que tinham para comprar uma pipa que custou R$ 2,50.

Atividade:

1ª parte: Busca de soluções

- Cada um preenche a tabela ao lado, mostrando em cada linha uma maneira possível de ter sido a contribuição de cada amigo.

Carlos	Miro

- Em seguida comparam as tabelas dos componentes do grupo, verificam se todas as soluções dadas estão corretas e contam o total de soluções que encontraram.

- Observando as tabelas, todos devem escrever cálculos que correspondam a soluções encontradas.

- Devem então fazer uma estimativa do número de soluções possíveis.

2ª parte: Análise de registros

- Para indicar que Carlos contribuiu com R$ 1,40 resolvi escrever **C = 1,40.**

Usando a mesma lógica como posso indicar a contribuição de Miro neste caso?

- Para representar essa situação resolvi escrever **C + M = 2,50.** Se a pipa tivesse custado R$ 3,00 como eu deveria escrever?

- Invente uma história parecida com a que foi dada, que possa ser representada pela seguinte igualdade: R + P + A = 45,00.

3ª parte: Discussão das respostas dadas

Estamos utilizando aqui números com ordens fracionárias. Observamos que a situação serve para diferentes séries, porém, isso implica que o nível da exploração vai depender da série e da turma em que a atividade se realize. Enquanto numa turma de nível mais alto podemos avançar na discussão do total de possibilidades (são ao todo 251), numa série mais baixa podemos apenas levantar o total de soluções encontradas, se isso bastar para a turma.

Como observamos na atividade anterior aqui se admite propor coisas novas relacionadas aos conceitos em pauta, assim o professor pode propor:

a) que os alunos completem cálculos do tipo: **1,10 + ... = 2,50**; **.........+ 2,05 = 2,50**

b) que os alunos expliquem (decodifiquem) o significado de igualdades do tipo:

2,25 + M = 2,50 ; **C + 0,50 = 2,50** ; **C = 2,50 – M**.

O caráter desta etapa já foi explorado na atividade anterior.

Atividade C: Construções com as réguas Cuisinaire

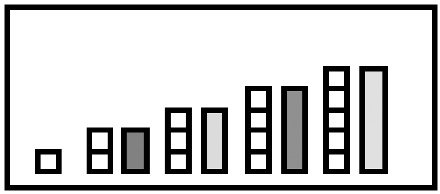
Numa classe de alfabetização ou da 1ª série, uma atividade em grupo com 3 ou 4 alunos.

Material para cada grupo: Um conjunto de réguas Cuisinaire em madeira ou papelão, uma folha para registros e lápis de cor.

Obs: É importante que a turma tenha anteriormente explorado livremente esse material de modo que já tenha verificado algumas relações entre as réguas, tais como: as de mesma cor são de mesmo tamanho e juntando brancas é possível compor uma do tamanho de uma régua de qualquer cor.

branca(b), vermelha(v), verde clara (c), roxa(r), amarela(a), verde escura(e), preta(p), marrom(m), azul(z), laranja (l)

b
b+b = v
b+b+b = c
b+b+b+b = l
etc….



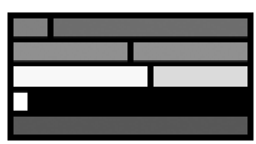
Atividade:

1ª parte: Construção de um muro segundo certas condições (regras) tendo por base uma régua .

- Construção de um muro tendo por base uma régua marrom e de modo que cada andar seja do comprimento da base e tenha sempre duas reguinhas.

- Cada aluno acrescenta um novo andar, procurando uma forma diferente da escolhida pelos anteriores.

Vermelha com verde escuro
Roxa com roxa
Amarela com verde claro
Branca com preta
Marrom



2ª parte: Registros das construções feitas.

Dependendo do que as crianças já tenham explorado desse material, diversos registros podem ser sugeridos. Desenhos, frases ou equações podem expressar relações que vão sendo descobertas.

Se combinarmos que

uma régua branca será representada pela letra **b**
uma régua vermelha será representada pela letra **v**
uma régua verde claro será representada pela letra **c**
uma régua roxa será representada pela letra **r**
uma régua amarela será representada pela letra **a**

uma régua verde escuro será representada pela letra **e**
uma régua preta será representada pela letra **p**
uma régua marrom será representada pela letra **m**
uma régua azul será representada pela letra **z**
uma régua laranja será representada pela letra **l**

e combinarmos também que **v + a** representa juntar as duas réguas formando um andar do nosso muro , então logo muitas relações do tipo **v + a = m** serão escritas e certamente nos surpreenderemos com a quantidade de expressões que serão criadas pela turma usando esses novos códigos, usando essa nova língua.

OBSERVAÇÕES GERAIS SOBRE AS ATIVIDADES A, B e C

As três situações apresentadas nas atividades A, B e C podem ser expressas por uma equação do tipo $x+y = f$ onde x e y representam variáveis e f é um valor fixo, ou ***seja ,*** $x+y = 8$, $x+y = 2{,}50$ e $x+y = m$ serviriam para representar respectivamente as situações A, B e C. No entanto, apesar de estarmos explorando uma mesma relação, as três formas de fazê-lo diferem muito entre elas e em cada caso os atores (alunos e professor) farão diferentes aprendizagens; todas elas complexas, que não significa difíceis e sim envolvendo diversos conceitos:

- Enquanto na situação A se opera com números naturais, na situação B se opera com decimais.

- Se tanto em A como em C estão em jogo números naturais, em C está presente um conceito geométrico, o comprimento. No entanto a atividade C pode ser transformada num problema de aritmética, se cada barra for substituída pelo correspondente número de barras brancas.

- Nas três atividades existe uma combinatória que também pode ser explorada.

Pode-se estender a exploração de cada uma dessas situações e se desafiados, os alunos costumam levantar questões que levam a tal. Por exemplo: na atividade A pode-se variar o total de feijões, na atividade B pode-se supor que são três amigos, já na atividade C pode-se mudar a regra de construção de cada andar do muro para “em cada andar usar peças de uma só cor”. Tais variações farão surgir novas tabelas, novos cálculos e novas equações cuja comparação com os anteriores enriquecerá em muito a aprendizagem.

Quanto às representações simbólicas suscitadas por tais atividades é interessante que todas as que forem propostas sejam mostradas para a turma toda e que sejam criticadas. Isso não significa rotular de boa ou má cada uma delas e sim mostrar que são diferentes. O professor também pode dar a sua representação, como foi feito na atividade B quando se escreve **C + M = 2,50** e na atividade C, indicando **v + a = m;** neste caso é importante que o professor verifique se está havendo compreensão da nova simbologia. Se para uma criança **v + a = m** está significando a composição da régua vermelha com a amarela, então ela poderá traduzir outras igualdades que lhe sejam apresentadas, usando as réguas, ou seja fará o caminho inverso. Também poderá com as réguas fazer as composições correspondentes a expressões do tipo **b + r**; **b + b + b**; **v + b + v + b** demonstrando com as réguas o está entendendo. Lembramos no entanto que problemas com a tradução e com a escrita sempre fazem parte do processo da aquisição de uma nova linguagem.

Tentei mostrar como situações simples podem propiciar significativa atividade algébrica a partir das séries iniciais. A seguir vou apresentar algumas situações que evidenciam o embricamento do estudo da Geometria com o da Álgebra. Antes de explorarmos tal embricamento, cabe lembrar a criação da Geometria Analítica apresentada por Descartes em 1637, fazendo o acoplamento da geometria com a álgebra. A importância de tal junção é revelada pelo enorme desenvolvimento da matemática a partir daí.

II. A geometria cria situações para aprendizagem da álgebra

Na exploração de figuras geométricas, sejam elas planas ou espaciais, geralmente uma forma mais efetiva de expressar relações que se evidenciam é conseguida através da álgebra. A seguir apresento alguns exemplos separados em dois grupos:

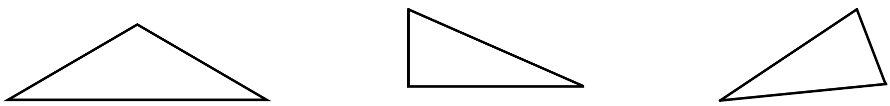
- no primeiro grupo estão propriedades de figuras geométricas que podem ser expressas por equações ou inequações (igualdades ou desigualdades)

- no segundo estão fórmulas para o cálculo de diversas medidas, ou seja, expressões algébricas que fornecem medidas em função de determinadas variáveis

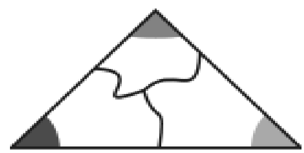
II.1. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS GERANDO IGUALDADES OU DESIGUALDADES

a) A **Lei angular de Tales**, propriedade que possui qualquer triângulo de que a soma de seus três ângulos internos é sempre igual a 180º tem como forma mais efetiva de representação a equação $\mathbf{a + b + c = 180^o}$, onde a, b e c representam as medidas dos ângulos em graus.

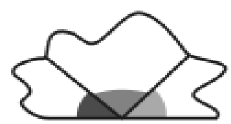
Uma atividade simples que propicia verificar a existência desta propriedade pode ser proposta na 4ª, 5ª ou 6ª série. Basta para isso que cada aluno desenhe num papel e recorte um triângulo que ele escolhe e em seguida faça a seguinte experiência:



1º - parte o triângulo preservando os "cantos", como mostra o desenho.



2º - justapõe os três pedaços juntando os três vértices



Como um grande número de diferentes triângulos está sendo submetido à mesma experiência será de grande impacto verificar que para todos, independente de forma ou tamanho, se obtém "um desenho" semelhante, no caso um segmento de reta que vai caracterizar um giro ou um ângulo de 180º ou meia volta ou dois ângulos retos.

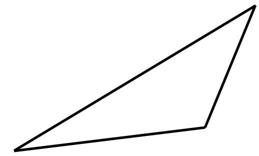
É importante fazer duas observações:

1ª) a propriedade não está sendo demonstrada através desta manipulação; uma demonstração rigorosa desta propriedade só é possível bem mais adiante, geralmente a partir da última série do ensino fundamental.

2ª) enquanto a equação $\mathbf{a+b+c = 180^o}$ serve para representar qualquer triângulo, um desenho consegue representar apenas os triângulos congruentes ao desenhado.

b) A **relação entre ângulos não congruentes formados por duas retas secantes,** pode ser expressa por: $\mathbf{y = 180^o - x}$, onde **x** e **y** representam as medidas dos ângulos em graus.

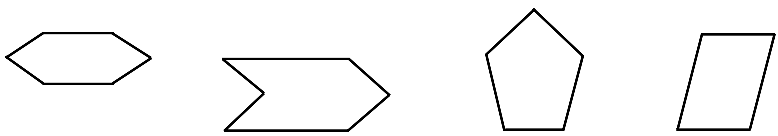
c) A relação existente entre os comprimentos dos três lados de qualquer triângulo, **condição de existência do triângulo**, também denominada desigualdade triangular pode ser representada pelas desigualdades:



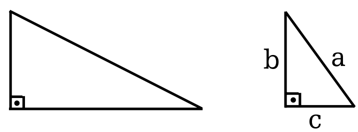
$\mathbf{m < t + p;\ t < m + p;\ p < t + m}$

onde **m, t** e **p** representam os comprimentos dos lados.

d) A **igualdade entre o número de vértices e o número de lados** de um polígono qualquer: $\mathbf{v = n}$



e) O **Teorema de Pitágoras:** $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$; onde **a, b** e **c** são medidas dos lados de um triângulo retângulo, sendo **a** a medida do lado oposto ao ângulo reto.



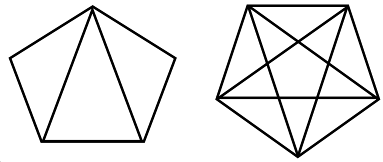
Para esta relação existe um grande número de demonstrações e a exploração destas demonstrações enseja a abordagem de várias conceitos da álgebra e da geometria tais como: área, números irracionais, semelhança de triângulos, operações com expressões algébricas.

Aqui não serão apresentadas demonstrações desta relação pois tais demonstrações podem ser encontradas em vários textos.

II.2. Medidas (número de diagonais, perímetro, área e volume) gerando expressões algébricas, identidades e operações com expressões algébricas

Certas medidas, de determinados tipos de figuras geométricas, são funções de outras medidas da mesma figura. Ou dizendo de outra forma: uma fórmula do ângulo interno de um polígono regular, uma fórmula da área de um polígono, uma fórmula do volume de uma pirâmide, uma fórmula da altura de um triângulo equilátero, são expressões algébricas que representam essas funções.

a) **Cálculo do número de diagonais de um polígono a partir do número de lados desse polígono**



Número de diagonais:

a) que partem de um vértice: **n-3**

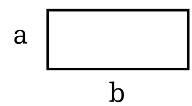
b) total: **[n (n -3)] : 2**

sendo **n** o número de lados do polígono.

Estas expressões são de fácil justificativa com o uso de poucos exemplos.

b) **Perímetro do retângulo em função dos comprimentos dos lados**

Esta tarefa simples de expressar o perímetro de um retângulo a partir dos comprimentos dos lados deve ser aproveitada para propiciar significativa atividade algébrica.



Quando se propõe que os alunos expressem o perímetro do retângulo desenhado ao lado,sabendo que **a** e **b** são os comprimentos dos lados**,** geralmente se obtêm deles diferentes expressões, por exemplo:

a + b + a + b, ou **b + a + b + a** ou **a + a + b + b**, ou **2x (a + b)** ou **2a + 2b** ou **2 x a + 2 x b** ou **2x a + b**

Partindo da verificação se cada expressão apresentada serve ou não, o professor pode aproveitar para explorar novas questões, a saber: identidades, operações com expressões algébricas, uso de parênteses e certas convenções na indicação das operações.

Assim, não importa quem sejam **a** ou **b**, teremos sempre

a + b + a + b = 2 x a + 2 x b

a + b + a + b = 2x (a + b)

2x (a + b) = 2 x a + 2 x b

2a + 2b = 2x (a + b)

Ou seja, como as expressões em negrito representam a mesma coisa (o perímetro do mesmo retângulo), então as igualdades entre elas são de fato identidades. Pois, para qualquer valor que se dê a **a** ou a **b,** as igualdades sempre se verificam.

Deve-se discutir o significado e importância do uso de parênteses. Uma boa ocasião para isso é ao explorar a diferença entre **2x a + b** e **2x (a + b)**, pois para muitos alunos ambas as expressões representam o mesmo. Pode-se aqui explicitar que **2x (a + b)** significa **(a + b) + (a + b)**, já **2x a + b** significa **a + a + b.**

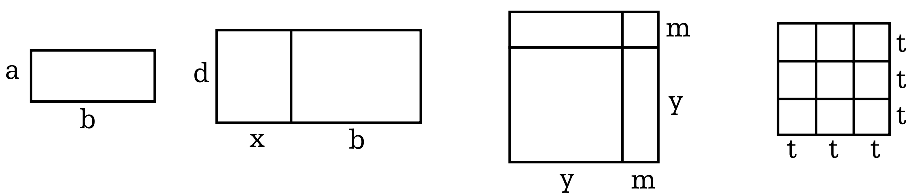
Ao se escrever a expressão **2a + 2b**, deve-se explicitar que está sendo usada uma convenção em que se economizam os sinais da multiplicação.

2x (a + b) ou **(a + a) + (b + b)** ou **2a + 2b**

c) **Área do retângulo em função das medidas dos lados**

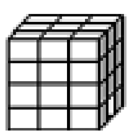
Após a exploração do conceito de área, através de comparações e medições usando diversas unidades de medida, chega-se a formas indiretas de obtenção dessa medida para certas figuras especiais. No caso do retângulo verifica-se que a área pode ser calculada multiplicando-se os comprimentos de dois lados perpendiculares.

a.b   d . (b + x) $(y + m)^2$ $(3t)^2$

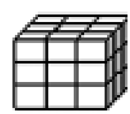


d) **Volume de paralelepípedos em função das medidas das arestas**

a.b.c ou **abc;**



a.a.a ou **a^3;**



III. A álgebra cria situações para aprendizagem da geometria

Enquanto a exploração de figuras geométricas remete a um fazer algébrico como foi exemplificado acima, também são muitas as ocasiões em que para o estudo de expressões e de equações lança-se mão de conceitos geométricos que podem ser relacionados com essas expressões ou equações. Neste caso faz-se o caminho inverso do exposto acima.

IV. Concluindo

Pretendi mostrar que existem situações com forte significado mesmo para alunos das classes iniciais, que podem levar à criação e manipulação de equações e de expressões algébricas. Tal manipulação constitui-se numa importante etapa na aquisição do instrumental algébrico que é tão poderoso para a resolução de problemas.

Procurei destacar a importância do professor testar a cada etapa os significados que vão sendo atribuídos por seus alunos às representações que vão sendo manipuladas.

Usei o erro, elemento presente no processo de qualquer aprendizagem, para introduzir uma nova questão relativa às expressões, o uso dos parênteses. Geralmente o erro permite o aprofundamento do que está sendo estudado e deve ser usado para tal.

Apresentei exemplos que evidenciem o estreito relacionamento entre a Geometria e a Álgebra de modo que ao explorar uma delas freqüentemente se recorre à outra, ficando claro o entrelaçamento de ambas.