Significados e Modelagem na Atividade Algébrica

Luciano Meira

Resumo / O ensino de matemática tem tradicionalmente provocado um divórcio entre o dito "mundo concreto" e o supostamente "abstrato", primeiro fazendo com que a criança realize ações práticas para apenas então pensar em termos de símbolos. No contexto da *modelagem algébrica*, este divórcio forçado entre o concreto e o abstrato resulta na ênfase (indevida) do exercício de regras e algoritmos de uma forma que parece suspender o significado dos eventos modeláveis algebricamente. Mas, será possível não produzir significado em qualquer situação de aprendizagem? *Produzir significados* é estabelecer relações entre conceitos, as ferramentas que utilizamos para construí-los (computadores ou registros escritos, por exemplo) e as atividades nas quais emergem (por exemplo, durante a resolução de problemas). Dessa forma, ao invés de assumir que os indivíduos suspendem o significado de expressões algébricas no processo de modelagem, este texto discute e exemplifica maneiras pelas quais é possível monitorar e investigar precisamente como alunos de matemática do ensino fundamental são capazes de construir tais relações nesse processo.

Palavras-chave / Atividade Algébrica, Modelagem, Produção de Significados.

Introdução

Muitos professores entendem que a matemática deve ser ensinada do concreto para o abstrato, primeiro fazendo com que a criança realize ações práticas para só depois pensar em termos de símbolos. Apesar de fazer sentindo em muitos contextos, este entendimento pode trazer sérias dificuldades para o ensino da matemática. Este texto traz uma reflexão sobre a questão do concreto e do abstrato no ensino de matemática, e da álgebra em particular. Discutirei esta questão em relação ao trabalho com "modelagem algébrica", talvez uma expressão desconhecida para o professor, que iremos definir simplesmente como o processo de criar equações para representar e estudar fenômenos (físicos, sociais, econômicos etc.).

Um dos problemas criados por esta separação entre o concreto e o abstrato no contexto da modelagem algébrica é que, muitas vezes, o ensino toma o "abstrato" como se fosse independente do "concreto" e enfatiza o exercício de regras e algoritmos de uma forma que parece "suspender o significado" dos eventos que a álgebra supostamente deveria modelar.

Mas, será possível não produzir significado em qualquer situação de aprendizagem? *Produzir significados* significa estabelecer relações entre os conceitos, as ferramentas que utilizamos para construí-los (computadores ou registros escritos, por exemplo) e as atividades nas quais os conceitos emergem (por exemplo, durante a resolução de problemas). Ao invés de assumir que o aluno suspende o significado das expressões algébricas que produz durante a modelagem, não seria mais útil para o ensino de álgebra tentar descobrir que relações eles constroem nesse processo? São estas questões que discutirei neste texto e no programa de TV.

Atividade algébrica e o problema do significado

Hoje já sabemos muito sobre as dificuldades que alunos e professores enfrentam no ensino e aprendizagem da álgebra. O pesquisador americano James Fey (1990) resumiu estas dificuldades assim: "Na matemática escolar atual os estudantes empregam um tempo enorme em tarefas envolvendo variáveis enquanto nomes literais para números desconhecidos e com equações e inequações que impõem condições nestes números. O ensino de álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis." (p. 70)

De fato, é possível que muitas das dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem da álgebra sejam resultado de ensinarmos apenas procedimentos e regras, limitando sua capacidade de compreender os conceitos, as representações e as atividades que são importantes neste domínio do conhecimento. Mas, o que nós sabemos sobre como os alunos produzem significado para a álgebra? O que sabemos sobre como eles fazem álgebra, ou seja, o que sabemos sobre sua "atividade algébrica"?

Essa idéia de "atividade algébrica" pode ser muito útil se quisermos ajudar nossos alunos a compreender e fazer sentido da álgebra. *Atividade algébrica* se refere a ações que envolvem, necessariamente mas não exclusivamente, uma intenção (ou motivação) do aluno (ou professor) em usar conhecimentos algébricos para resolver problemas e/ou comunicar resultados matemáticos. Por exemplo, o uso (mesmo com erros!) da linguagem da álgebra (que inclui, por exemplo, incógnitas e variáveis) durante a resolução de um problema engaja o indivíduo em atividade algébrica, no sentido em que ele ou ela está naquele momento compartilhando com outros indivíduos (por exemplo, alunos e professor numa sala de aula, ou mesmo o matemático profissional na universidade) uma forma específica e socialmente reconhecida de resolver problemas. Ou seja, na medida em que um aluno usa a linguagem da álgebra para resolver problemas (repito, mesmo que o faça com erros), ele ou ela está montando relações entre suas ações e a linguagem falada na sala de aula de matemática, o uso de certas palavras para fins matemáticos, a linguagem dos textos matemáticos, e a linguagem dos sistemas simbólicos escritos.

A idéia de atividade algébrica pode ser comparada ao uso que o bebê entre 12 e 18 meses faz da língua materna nas fases iniciais do desenvolvimento da fala, quando ele já pode construir algumas palavras e sentenças que são "incorretas", mas muito ricas do ponto de vista dos seus objetivos de comunicar algo. Por exemplo, se um bebê de um ano diz "*aua*", podemos dizer que ela fala a língua portuguesa? Se pensarmos apenas do ponto de vista da gramática e dos gramáticos, a resposta provavelmente é "não!". Mas, se tomarmos os contextos de uso desta expressão, como por exemplo a presença de alguém familiar com o vocabulário da criança e/ou de um gesto onde ela aponta um filtro de água, então podemos supor que sua fala tem a intenção de comunicar o desejo por água ("Eu quero água" ≈ "aua").

No mesmo sentido, um aluno de quarta série que ainda não é capaz de usar a álgebra da mesma forma que o professor, pode mesmo assim estar fazendo álgebra pois já é capaz de criar relações (muitas vezes inusitadas) entre um sistema especializado de símbolos (a "linguagem" da álgebra), certas rotinas de ação, e formas de se comunicar que são parte do discurso da sala de aula (como "passar" termos de um lado a outro de equações, mesmo levando-se em conta que tal ação não faz sentido do ponto de vista matemático). Este aluno estará produzindo significados para a álgebra e, portanto, envolvido em atividade algébrica. Então, se prestarmos atenção ao significado que os alunos atribuem para os problemas e expressões algébricas, poderemos mais facilmente compreender suas dificuldades em álgebra e ajudá-los a não separarem tão fortemente o concreto do abstrato.

UM EXEMPLO

Há alguns anos, realizei entrevistas (Meira, 1996) com alunos de sétima série resolvendo problemas de modelagem com uma balança de dois pratos (na verdade, usei apenas o desenho de uma balança, como na figura abaixo). Antes de iniciar as entrevistas, passei algumas semanas visitando sua sala de aula e observei que as tarefas apresentadas pelo professor incluíam apenas a redução de polinômios, a resolução de equações lineares e o exercício de procedimentos para resolver problemas (mas, infelizmente, quase nunca os alunos criavam as equações para modelar os eventos descritos nos problemas, um trabalho que ficava sempre para o professor ou já estava pronto no livro didático!).

Exemplo de problema: Quanto deve pesar cada saco para que a balança permaneça em equilíbrio?

Nas entrevistas, apresentei aos alunos o desenho de uma balança de dois pratos, vários desenhos de pesos e sacos de massa desconhecida marcados com um "x", e problemas sobre o equilíbrio entre pesos e sacos na balança (como na ilustração acima). Esta metáfora da balança tem sido bastante utilizada para a modelagem com equações lineares, pois seu equilíbrio corresponde (ou seja, é modelável) a uma equação (ou seja, uma igualdade no sentido de uma equivalência) que compara os conteúdos dos dois pratos.

No problema da figura acima, a primeira dificuldade dos alunos é escrever a equação que corresponde a esta situação: $5+x=3+2x$. Um dos alunos entrevistados, por exemplo, começou com a "equação" $5x.3x^2$, e só com minha ajuda foi aos poucos se aproximando do formato correto! Mas, antes mesmo de tentar montar qualquer equação, os alunos primeiro resolviam o problema simplesmente atribuindo um valor hipotético ao saco marcado com um "x" no desenho: por exemplo, se $x=2 \Rightarrow 5+2=3+2+2$, uma solução aritmética perfeitamente aceitável.

Em geral, os alunos não conseguiam produzir equações corretas do ponto de vista matemático. Isso não foi surpresa, se lembrarmos que nunca tinham oportunidade de realizar esse tipo de tarefa em sua sala de aula. Ainda assim, as equações que eles efetivamente produziam não eram completamente sem sentido! De fato, como os alunos pareciam ter o objetivo de mostrar suas competências algébricas ao entrevistador (após minha solicitação que escrevessem equações para explicar o funcionamento da balança), as equações que eles criaram eram consistentemente manipuladas de forma a produzir o mesmo resultado do que chamavam a "resposta lógica" (obtida pelo teste de hipóteses exemplificado acima).

Como já disse, o processo de modelagem algébrica empregado pelos alunos era inadequado, na maioria das vezes. Entretanto, observe no trecho de entrevista reproduzido a seguir como mesmo esse uso inadequado da linguagem e dos procedimentos algébricos era aproveitado pelos alunos para <u>legitimar e dar significado a sua atividade matemática</u>. No exemplo abaixo, ao trabalhar com a situação da balança representada pela equação $5+x=3+2x$ (a mesma da figura acima), um aluno chegou ao resultado $x^3=2$, ao invés de $x=2$ (a resposta correta). O diálogo a seguir, iniciado pelo entrevistador, exemplifica o sentido de legitimar e dar significado à atividade algébrica que estou sugerindo.

Entrevistador: *Eu estou em dúvida aqui (apontando para o papel com as expressões), porque tem, é que tem x a terceira igual a dois (apontando para "$x^3=2$")... então não é o x que é igual a dois, é o x a terceira que é igual a dois...*
Sandro: *Não, é o x, agora o três a gente vai passar pra cá (como uma "potência" para o segundo membro da equação; escreve "$x=2^3$), aí aqui não seria mais um potência, seria um tipo, uma soma, aí daria dois quilos para cada saco...*
Entrevistador: *O que... o que é que demonstra esse três aí (em 2^3)?*
Sandro: *O saco, o número de x, o número dos sacos desejados*

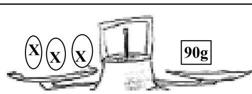
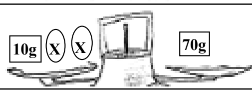
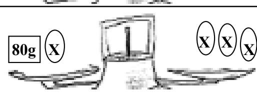
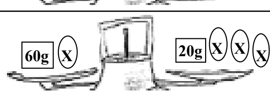
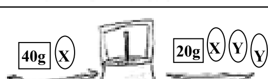
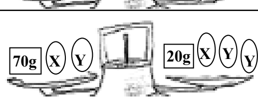
Se tomarmos a álgebra como um domínio matemático fechado (no qual podemos suspender ou eliminar os significados), as ações do aluno nesse diálogo parecem completamente sem sentido. Entretanto, se tomarmos a atividade do aluno (e não apenas a álgebra) como o foco de nossa análise, chegaremos a conclusões bem diferentes. A partir do que tenho sugerido neste texto, este aluno estava (assim como os indivíduos estão sempre) envolvido numa atividade motivada (isto é, orientada para objetivos) no contexto da qual ele atribuía significados algébricos às suas ações. Assim é que, com o objetivo de alinhar-se com a álgebra da escola, o aluno transforma a expressão "$x^3=2$" em "$x=2^3$" (onde o índice "3", antes uma potência, passa a representar o número de sacos no arranjo físico da balança), a fim de manter uma conexão entre sua equação e o evento que ela deveria modelar.

Em suma, essa pesquisa questionou a idéia de que os alunos "suspendem o significado" das equações durante a atividade algébrica, e demonstrou que eles estavam sempre tentando dar um sentido para suas ações, apesar de seu professor enfatizar apenas a correção e o rigor da álgebra. Esta competência de "dar sentido às coisas" (ou produzir significados) é raramente explorada no ensino fundamental, seja em relação à construção de interpretações aritméticas para problemas algébricos (por exemplo, o teste de hipótese que mencionei acima), ou em relação ao uso da álgebra como uma ferramenta para modelar situações e resolver problemas.

NA SALA DE AULA

O exemplo que apresentei mostrou que, mesmo quando incapazes de "pensar algebricamente" (ou seja, incapazes de compreender equações em termos de estruturas para generalizar), os alunos que entrevistei estavam envolvidos em "atividade algébrica" no sentido em que símbolos e procedimentos algébricos foram usados para atingir objetivos específicos (por exemplo, comunicar o resultado de um problema). Este tipo de análise pode ser bastante interessante, na medida em que levanta a questão da produção de significados em matemática e dos significados específicos que estudantes de álgebra desenvolvem.

A idéia da *álgebra como uma atividade* (e não apenas como um domínio do conhecimento acadêmico) sugere uma nova abordagem para o ensino da álgebra. Por exemplo, vemos que é necessário diversificar as situações de uso da álgebra como ferramenta de modelagem. Segundo Lins (1994), por exemplo, situações com a balança de dois pratos são adequadas para trabalhar com equações do tipo "3x+10=100", mas essa metáfora não é apropriada para equações do tipo "3x+100=10", visto que a balança não comporta operações com valores negativos. Ainda assim, existem pelo menos seis tipos de equações para a balança de dois pratos que o professor pode explorar na sala de aula. Veja os exemplos na tabela abaixo:

<table>
<tr><th>Exemplo de situação na balança</th><th>Equação</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$3x = 90$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$2x + 10 = 70$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x + 80 = 3x$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x + 60 = 3x + 20$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x + 40 = x + 2y + 20$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x + y + 70 = x + 2y + 20$</td></tr>
</table>

Mas, é importante perceber que as tarefas que trazemos para a aula são sempre transformadas pelos alunos, na medida em que eles criam significados próprios que dependem de seus objetivos. Assim, ao invés de enfatizar as tarefas em si e esperar que tenham um significado único e fixo, o professor deve preocupar-se em gradualmente aproximar os significados criados pelos alunos e aqueles pretendidos pela tarefa. Esta forma de olhar a atividade dos alunos requer uma nova forma de comunicação e aprendizagem na sala de aula. Ao trabalhar com as situações da balança, por exemplo, seria interessante promover um formato de aula que incluísse pelo menos as seguintes características (que devem ser adaptados pelo professor para cada sala de aula):

1. Permita que os alunos resolvam os problemas testando hipóteses para os valores das incógnitas (como no exemplo da seção anterior). Isso lhes dará familiaridade com o comportamento da balança e suas relações com a matemática.

2. Mesmo que os alunos já obtenham as respostas corretas com o teste de hipóteses (uma estratégia essencialmente aritmética), incentive-os a escrever equações sobre o comportamento da balança (uma estratégia de modelagem algébrica). Reúna-os em duplas para que possam começar a compartilhar suas idéias com os colegas.

3. Convide-os a registrarem (ou registre você mesma) todos os tipos de expressões produzidas no quadro (inclua as "erradas" e mesmo aquelas que não estão escritas com símbolos algébricos).

4. Incentive cada aluno (ou dupla de alunos) a apresentar sua equação, explicando os detalhes de como a construiu. Isso pode tomar muito tempo da aula, mas o desenvolvimento dessa capacidade de construir argumentos para defender idéias é o principal objetivo da escola em qualquer área.

5. O professor não precisa descartar as idéias erradas do ponto de vista matemático assim que elas aparecem! Organize-se para fazer perguntas sobre o significado das ações dos alunos, explicitando os contrastes entre as equações produzidas e a situação da balança. No exemplo que dei na seção anterior, um dos alunos entrevistados propôs a "equação" $5x.3x^2$ (quando deveria ser "$5+x=3+2x$"). Neste caso, entre outras coisas, poderíamos começar perguntando: "Como nós sabemos o que está em um prato da balança e o que está no outro?" Observe aqui que o ponto na expressão pode não ser uma multiplicação, mas

simplesmente uma separação entre os conteúdos dos pratos na balança. Neste caso, nossa próxima pergunta poderia ser: "Para conseguir o equilíbrio na balança, qual deve ser a relação entre os conteúdos dos pratos?" e "Como poderíamos representar esta relação matematicamente?" (tudo isso numa linguagem que melhor se adapte à compreensão dos alunos na classe em que a atividade está sendo realizada).

6. Uma vez que os alunos tenham argumentado em favor de suas expressões (tendo, talvez, já realizado modificações em relação a suas idéias iniciais), o professor poderia até propor votações entre os alunos para a escolha da equação mais adequada entre as apresentadas no quadro, a fim de tentar perceber em que direção a maioria da turma está organizando sua compreensão do problema. A cada votação, solicite novas defesas das equações mais votadas e menos votadas, introduzindo novas questões que irão gradualmente alertando os alunos para as modelagens mais ou menos adequadas da situação da balança. (Observe que o importante não é a votação em si, mas a defesa que os alunos são capazes de fazer sobre sua produção.)

7. A resposta correta não precisa ser alcançada já no primeiro problema. Aliás, diga-se de passagem, uma resposta correta não indica necessariamente que um aluno pensou mais corretamente que outro que deu uma resposta errada! Portanto, planeje vários problemas e muitas situações nas quais os alunos podem gradualmente exercitar sua capacidade de construir representações matemáticas (por exemplo, equações algébricas) e defender seus pontos de vista.

O trabalho do professor é fundamental e insubstituível em todos esses pontos. É assim que estaremos criando oportunidades para o aluno aprender a construir argumentos matemáticos para problemas e situações, a justificar suas ações e se engajar em atividades de discussão nas quais a álgebra funcione como uma ferramenta de modelagem e resolução de problemas.