Argumentações, Linguagens e Procedimentos em Tarefas de Geometria[1]

Jaqueline Araujo

Resumo / É algo desafiador falar de demonstração geométrica no contexto de formação inicial de professores, uma vez que implica estratégias mentais extremamente elaboradas e complexas. Por este e outros motivos de dimensão afetiva realizamos uma investigação cuja finalidade era apresentar tipos de argumentações e procedimentos utilizados por licenciandos em matemática em tarefas de demonstrações geométricas. Para a realização dessa pesquisa fizemos um estudo de caso numa turma de licenciatura em matemática e desenvolvemos análises que se pautam no modelo Van Hiele e nas concepções de argumentação e demonstração de Martínez Recio.
Palavras-chave / Dimensão afetiva, Demonstração, Geometria, Formação Inicial de Professores.

Abstract / It is something challenger to speak of geometric demonstration in the context of teachers' initial formation, once it implicates mental strategies extremely elaborated and complex. For this and other reasons of affectionate dimension we accomplished an investigation whose purpose was to present types of arguments and procedures used by students in mathematics in tasks of geometric demonstrations. For the accomplishment of that research we made a case study in a degree group in mathematics and we developed analyses that are ruled in the model Van Hiele and in the argument conceptions and demonstration of Martínez Recio.
Key-words / Dimension affective, Demonstration, Geometry, Pre-service teachers.

[1] Este artigo apresenta resultados de um trabalho exploratório da pesquisa "Relaciones entre cognición y afectos en la formación inicial geométrica de profesores de matemática" financiada pela CAPES.

1. Introdução

A razão para a diminuição do ensino da geometria na escola, segundo consta na literatura da área da educação matemática, em parte, está baseada nas dificuldades conceituais ocasionadas pelas argumetações lógicas e dedutivas que constituem a essência da geometria euclidiana.

Uma investigação desenvolvida nos Estados Unidos, por Dreyfus e Hadas (1994), por exemplo, constatou que alunos avançados da *high scholl* não compreendem o que seja uma demostração e propõem fazer uma discussão sobre os princípios causadores das dificuldades dos alunos de capacidade média, durante as demostrações. De um modo geral, as conclusões a que esses autores chegaram foram:

- uma afirmação matemática é correta em qualquer que seja a circunstância que as suposições se verificam;

- as mudanças ocorridas durante a passagem da geometria informal para a formal é fonte de muita confusão;

- as provas são apresentadas a partir de casos particulares, desconsiderando a generalidade da demonstração;

- a distinção entre as suposições e conclusões é motivo de dúvidas, uma vez que os alunos não identificam as diferenças entre estes elementos;

- os alunos não são acostumados a trabalhar com recíprocas falsas e isto pode gerar situações em que os alunos utilizam a recíproca de uma afirmação como correta sem ser;

- a associação de uma certa figura geométrica com uma posição padrão pode conduzir os alunos a erros conceituais.

A partir de constatações de que estudantes sentem dificuldades em apresentar formalmente uma argumentação analítica e compreender a diferença entre uma argumentação abstrata e uma evidência empírica, como as apresentadas anteriormente, Hoyles e Healy (2000: 9), autoras inglesas, desenvolveram uma investigação que tinha como objetivo *"...descobrir a forma de como os estudantes mais avançados que haviam passado por este currículo conceitualizavam a argumentação e a demonstração matemática, assim como para explorar formas de abordar dificuldades mediante novas metodologias de aprendizagem..."*. Os resultados encontrados mostram, dentre outras coisas, que as dificuldades que os estudantes entre 14 e 15 anos encontram em fazer demonstrações, se relacionam com a falta de costume em fazer deduções e predições. Assinalam ainda que "*...o ensino pode marcar diferenças na habilidade dos estudantes ao fazer demonstrações, mas também que as mesmas atividades e os mesmos métodos didáticos terão **inevitavelmente** distinta efetividade sobre os diferentes estudantes*." (Hoyles e Healy, 2000: 19-20)

No Brasil, nota-se também uma preocupação com o tema demonstração e argumentação matemática por parte dos educadores matemáticos como Oliveira (2001) que procurou desenvolver um trabalho que consistiu no acompanhamento do desempenho de professores de matemática no IM-UFRJ, durante um curso de aperfeiçoamento ocorrido no 1º semestre de 2000. Diferentemente dos demais autores anteriormente citados, Oliveira (2001) teve a preocupação de observar as dificuldades dos professores formados em relação à demonstração e avaliar a argumentação desses professores durante a realização do curso de aperfeiçoamento.

Compartilhamos, com a opinião de Oliveira, que a deficiência de argumentação dos professores pode refletir na formação da argumentação dos alunos da escola básica e gerar obstáculos que ocasionem problemas na forma desses alunos se comunicarem e se expressarem matematicamente.

A partir de uma reflexão acerca de estudos nessa linha e de nossa experiência como professora universitária, constatamos que a dificuldade em argumentar e demonstrar não ocorre somente nessas esferas e com esses sujeitos. Assim, como Martínez Recio (1999), percebemos que os estudantes para professores de matemática sentem dificuldades em demonstrar e comunicar-se matematicamente. Essas dificuldades dos estudantes a professores se tornaram mais reais para nós quando trabalhamos com a disciplina de geometria, utilizando o método axiomático dedutivo. Constatamos, através de nossa experiência, que muitos alunos não conseguiam exprimir seu conhecimento oralmente ou por escrito, sentiam dificuldades em formalizar seu raciocínio ou demonstrar uma propriedade genericamente, sentiam-se inseguros e amedrontados diante da possibilidade de resolver problemas geométricos, enfim, possuíam problemas em comunicar e conjecturar geometricamente, em decorrência das dificuldades que sentiam com relação às demonstrações.

Diante dessa realidade, sentimos a necessidade de desenvolver uma investigação que procurasse, em um primeiro momento, *apresentar os tipos de argumentações e procedimentos utilizados pelos estudantes para professores em um curso de formação inicial em tarefas geométricas,* uma vez que, acreditamos ser importante compreender como os alunos expressam seus pensamentos geométricos, para agir no sentido de desenvolver uma proposta pedagógica que se adequasse à realidade dos alunos e ao seus níveis de pensamento geométrico.

Para atingir tal objetivo, propusemos uma investigação, no ano de 2001-2002, durante o período que estávamos cursando uma disciplina investigativa, pelo Programa de Doutorado em Didática das Ciências Experimentais e da Matemática, da Universidade de Barcelona, centrada na área de psicologia e epistemologia em Educação Matemática, mais especificamente no ensino e aprendizagem da geometria e o desenvolvimento de processos cognitivos em tarefas geométricas, sendo nosso maior interesse contribuir com outros trabalhos que foram ou estão sendo elaborados e que dizem respeito aos aspectos cognitivos para fazer demonstração. Para isto, sintetizamos nosso campo de ação através da seguinte questão: *Quais são as características presentes nas argumentações e procedimentos desenvolvidos pelo licenciando em matemática durante tarefas geométricas?*

Essa investigação tem como finalidade apresentar os tipos de argumentações e procedimentos utilizados por licenciandos em matemática. Num primeiro momento, faremos um breve resumo dos principais conceitos teóricos que nortearam esse estudo e, num segundo, discorremos os dados gerais de onde e como ocorreu a investigação e, finalmente, apresentaremos os resultados obtidos.

2. Referencial Teórico

De acordo com Nasser e Tinoco (2001), atualmente a comunidade internacional em Educação Matemática está dando, cada vez mais, atenção ao tema argumentação e provas no ensino da matemática. Mas, se percorrermos a literatura que trata sobre esse tema, perceberemos que muitas são as definições dadas à noção de argumentação e prova. Canôas e Cunha (2001), por exemplo, destacam que argumentação pode ser entendida como:

- pensamento que implica todas as crenças que as pessoas possuem, julgamentos que fazem e as conclusões que inferem;

- diálogo entre duas ou mais pessoas que possuem visões diferentes em que cada um oferece e tenta convencer ou alterar a visão do outro.

Um outro autor que se dedicou ao tema foi Fetissov (1994) que, ao tentar responder o que é uma demonstração, a relaciona com a argumentação que foi considerada por ele como um conjunto de ponderações usadas para convencer seu interlocutor sobre determinada afirmação. Segundo este autor, a força do convencimento de um argumento está centrada no desenvolvimento do método indutivo ou dedutivo de raciocínio, que no seu entendimento são inseparáveis.

Ao contrário de Oliveira e Nasser, que não dão uma definição formal de argumentação, Martínez Recio (1999) apresenta uma noção de argumentação que se aproxima à de Fetissov (1994), no sentido, de que esta assume diferentes formas em determinados contextos. Segundo estes autores, argumentação matemática deve passar por processos de verificação buscando o caráter de verdade das proposições, devendo formar conhecimentos e ser validada por uma comunidade científica. Quando da argumentação forma-se conhecimento e é reconhecida por uma comunidade de interlocutores, tem-se uma prova. Se por outro lado os processos de prova são validados e a validez é logicamente conclusiva, tem-se uma demonstração.

As idéias acerca de demonstração e argumentação na leitura de textos de Oliveira, Nasser e Tinoco, Canôas e Cunha estão relacionadas com as dificuldades que os alunos e/ou professores de matemática sentem em matemática/geometria, devido à dificuldade de se expressarem, argumentarem ou se comunicarem matematicamente. Por este motivo, estas autoras se empenharam em desenvolver trabalhos que procurassem explorar aspectos da demonstração geométrica em seus aspectos instrutivos e formais no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Por outro lado da leitura da obra de Fetissov (1994), interpretamos que este autor também tem uma preocupação com as dificuldades dos alunos quanto à demonstração formal e à ênfase dada pelo autor que é a de instruir o aluno a demonstrar rigorosamente. Para isto, o autor apresenta uma série de instruções que, segundo nossa avaliação, estão em um nível tão alto quanto a própria demonstração e que seriam pouco úteis para um aluno que, não ou pouco estudou geometria no ensino básico e que estaria no início de um curso de matemática.

Em conseqüência da estruturação dos textos, dos propósitos e concepções dos autores citados avaliamos que o primeiro grupo tem uma preocupação com o ensino e a aprendizagem da demonstração matemática por sujeitos que estavam mais próximos aos estudantes que tínhamos interesse em observar nessa pesquisa. Observamos ainda que as idéias de Martínez Recio sobre demonstração, prova e argumentação pareceram-nos bastante apropriadas para descrever e interpretar a realidade que queríamos investigar, uma vez que ele considera que prova pode assumir diferentes significados os quais dependem dos contextos em que são utilizados. Além disso, considera que o termo demonstração é o "*objeto emergente do sistema de práticas argumentativas (ou argumento) aceitas no seio de uma comunidade, por uma pessoa, diante de situações de validação, isto é, situação que requer justificar o caráter verdadeiro de um enunciado...*". (Martínez Recio, 1999: 59).

Se por um lado as idéias de Martínez Recio ajudaram-nos a definir o que seja demonstração, argumentação e prova, por outro lado nos pautamos nas idéias tiradas do artigo de Crowley (1994) que trata sobre o modelo Van Hiele para classificar os tipos de argumentações e linguagem utilizadas pelos alunos em situação de demonstração geométrica. Segundo esta autora, o modelo Van Hiele tem a finalidade de orientar a formação do pensamento geométrico e avaliar as habilidades dos alunos em atividades geométricas. Segundo o que consta no modelo Van Hiele, o pensamento geométrico pode ser dividido nos seguintes níveis de compreensão:

Nível 1: Visualização

Nesse nível o aluno percebe o espaço como algo que existe ao seu redor e os conceitos de geometria é compreendido na sua totalidade, quer dizer, que as figuras são conhecidas por sua forma como um todo, não por suas partes ou propriedades.

Nível 2: Descritivo-Analítico

É um nível em que o aluno começa a fazer análises dos conceitos geométricos, percebe as propriedades dos objetos, mas ainda não é capaz de explicar relações entre as propriedades, não vê interrelações entre figuras e não compreende as definições.

Nível 3: Abstrato-Relacional

Neste nível o aluno é capaz de estabelecer interrelações entre as propriedades dentro das figuras, assim como entre elas. Ele é capaz de fazer deduções e reconhecer classes de figuras. As definições passam a ter significado. O aluno é capaz de acompanhar e formular argumentações formais, mas não compreende as deduções como um todo.

Nível 4: Dedução Formal

É compreendido como o nível em que o aluno é capaz de estabelecer a geometria em um contexto de um sistema axiomático; compreender as inter-relações e os papéis dos axiomas, teoremas, definições e demonstrações. Estando neste nível, a pessoa constrói demonstrações de diferentes modos e compreende a interação entre condição necessária e suficiente, como é capaz de fazer distinção entre uma afirmação e sua recíproca.

Nível 5: Rigor

O aluno neste nível trabalha em vários sistemas axiomáticos e é capaz de comparar os resultados como pertencentes a cada um desses sistemas.

3. Metodologia

Para tratar sobre as características presentes nas argumentações e classificar os procedimentos desenvolvidos pelo licenciando em matemática durante tarefas de geometria, decidimos que faríamos um estudo de caso em que a coleta dos dados ocorreria no Campus Avançado da Universidade Federal de Goiás, instituição onde trabalhamos e porque conhecemos melhor sua realidade. Estivemos recolhendo os dados durante um período de seis meses no 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática, em 2001. Para isto, assumimos a disciplina de Geometria I de agosto até dezembro desse ano. Ministramos e observamos 64 horas/aula distribuídas ao longo dos 3º e 4º bimestres de 2001. Além da observação, analisamos duas entrevistas, a gravação e transcrição de uma prova oral e as respostas dos alunos em duas provas escritas, sendo uma delas diagnóstica.

Neste trabalho, selecionamos os dados obtidos a partir da análise das questões quatro e cinco da prova diagnóstica, aplicada no início das aulas, em agosto de 2001. Além disso, foram analisadas a gravação da prova oral feita pelos alunos em meados do curso e duas entrevistas feitas com quatro alunos de uma amostra que refletia os perfis de alunos que se encontravam fazendo o curso de 2001. Esses perfis foram determinados a partir da aplicação e análise:

- de um questionário no qual obtivemos dados pessoais do aluno, sua formação escolar e profissional, bem como seus sentimentos e opiniões com relação à geometria;

- das observações, registradas nos diários de classes, das argumentações orais dos alunos realizadas durante as aulas, durante os meses de agosto e setembro;

- dos documentos produzidos por eles, como atividades feitas em sala e provas.

A prova diagnóstica foi aplicada a todo o grupo (33 pessoas que estavam presentes na classe no dia 28/08/2001) e portanto a análise acerca das argumentações dos alunos foi mais global. Com relação aos procedimentos, partimos da análise das entrevistas e prova oral realizadas com a amostra no 4º bimestre de 2001.

Esta prova continha cinco questões das quais a primeira era de nível descritivo-analítico, a segunda questão era de nível básico de visualização, a terceira apresentou características abstrato-relacional e a quarta e quinta questões eram de nível formal. A análise e os resultados das duas últimas questões, como já dissemos, são as que vão nos interessar nesse trabalho. De um modo geral, as caracterizamos como sendo dedutivas formais. Neste caso, os alunos teriam que raciocinar formalmente em um contexto de um sistema geométrico lógico subjacente, com termos definidos, axiomas, definições e teoremas, de acordo com o modelo Van Hiele.

Quanto à prova oral, ela fez parte da segunda prova aplicada que foi subdividida em escrita e oral. Nosso objetivo foi verificar as habilidades conceituais e procedimentais dos alunos quanto à construção geométrica de figuras planas, utilizando o computador. Os resultados obtidos foram os que se seguem.

4. Linguagem e Argumentação Geométrica

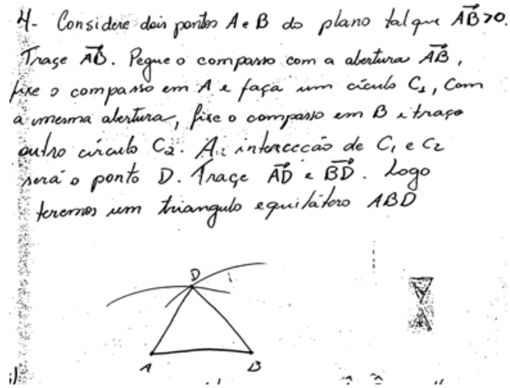
Ao elaborarmos a questão 4 da prova diagnóstica, que solicitava aos alunos que explicassem como eles construiriam um triângulo equilátero, justificando suas respostas, pretendíamos verificar como os alunos construiam um triângulo equilátero utilizando régua e compasso e qual era a linguagem por eles empregada. A partir dessa análise classificamos o nível de argumentação desses alunos ao final do 2º bimestre do ano letivo de 2001. As categorias encontradas foram as seguintes:

Quadro 1 (Categorias referentes à questão 4)

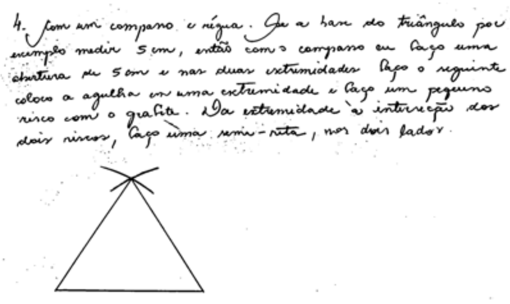
Categorias	Características das argumentações	Número de pessoas
Respostas com tentativa de linguagem formal	- Argumentações formais e rigorosas, acompanhadas de desenho.	1
	- Argumentações formais e rigorosas, sem desenho.	1
Respostas com linguagem informal	- Argumentação com seqüenciação lógico-dedutiva, pouco refinada, acompanhada de desenho. - Domínio do conceito de triângulo equilátero.	1
	- Argumentação com seqüenciação lógico-dedutiva, pouco refinada sem estar acompanahada de desenho. - Domínio do conceito de triângulo equilátero.	8
	- Argumentação empírica, pouco refinada, acompanhada de desenho. - Domínio do conceito de triângulo.	1
	- Argumentação sem sequenciação lógico-dedutiva, com parcial domínio do conceito de triângulo equilátero, sem estar acompanhada de desenho.	1
	- Argumentação incorreta com estabelecimento de deduções inadequadas e acompanhada de desenho. - Domínio da definição de triângulo equilátero.	2
	- Argumentação incorreta com estabelecimento de deduções inadequadas, sem estar acompanhada de desenho. - Falta de domínio da definição de triângulo equilátero.	3
	- Apresentação da definição de triângulo equilátero, sem desenho.	10
	- Apresentação inadequada da definição de triângulo equilátero, com desenho.	3
Sem resposta	---------	1

Através da análise da linguagem dos jovens e de suas capacidades de argumentação, os resultados indicaram que:

- o nível de pensamento geométrico de 6% dos jovens se classificaria como dedução formal uma vez que os alunos foram capazes de identificar os dados do problema e o que deveria ser construído, descrever a construção do triângulo equilátero valendo-se de uma linguagem simbólica mais sofisticada e generalizante e demonstrar compreensão das condições necessárias e suficientes para construir o triângulo equilátero;


4- Considere dois pontos A e B do plano tal que $\overline{AB} > 0$. Trace $\overline{AB}$. Pegue o compasso com a abertura $\overline{AB}$, fixe o compasso em A e faça um círculo C_1. Com a mesma abertura, fixe o compasso em B e trace outro círculo C_2. A intersecção de C_1 e C_2 será o ponto D. Trace $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$. Logo teremos um triângulo equilátero ABD

- 27 % em um nível abstrato relacional, já que foram capazes de estabelecer redes de relações conceituais, identificar um conjunto mínimo de propriedades para descrever a construção do triângulo e apresentar argumentos informais para explicar os procedimentos da construção;


4. Com um compasso e régua. Se a base do triângulo por exemplo medir 5 cm, então com o compasso eu faço uma abertura de 5 cm e nas duas extremidades faço o seguinte: coloco a agulha em uma extremidade e faço um pequeno risco com o grafite. Da extremidade à intersecção dos dois riscos, faço uma semi-reta, nos dois lados.

- cerca de 42% dos alunos apresentaram um nível de pensamento descritivo-analítico, sendo capazes de descrever informalmente os atributos essenciais do triângulo equilátero sem apresentar um esquema mesmo que informal de construção do triângulo.

Com todos os lados e ângulos congruentes.

- os 18% do restante dos estudantes estariam num nível de visualização, porque foram capazes de reconhecer o triângulo somente por sua aparência.

4.1. Reconhecimento das demonstrações

A questão quatro parecia indicar que a maioria dos jovens apresentavam uma argumentação informal e estavam em um nível de pensamento descritivo-analítico. Procuramos confirmar esse fato analisando mais um problema e verificando se, de fato, tal conclusão era procedente. De um modo geral, a última questão exigia do aluno um raciocínio formal e uma maior capacidade de movimentação dentro do sistema geométrico. O aluno teria que ser capaz de dominar conceitos geométricos tais como paralelogramo e suas propriedades, bissetriz, ângulo, etc., além disso, ser capaz de propor deduções que o levasse a resolver o problema através de uma seqüenciação lógica. Vejamos como os alunos resolveram o problema cinco da prova diagnóstica. Observamos que cada tópico em negrito corresponde à idéia central que procurava solucionar o problema.

Questão 5:

Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo se cortam em um ângulo reto.

- Desenho de diagonais como se fossem bissetrizes

Nesta categoria se encontravam 10 dos 33 alunos. Deste 10 alunos, 3 desenharam um retângulo e suas diagonais e outros sete alunos deixaram desenhados em suas provas paralelogramos e suas diagonais como sendo as bissetrizes. Considerando as respostas dadas por esses alunos, entendemos que a compreensão e a visualização da hipóstese do problema ficaram comprometidas, porque estes alunos não identificaram ou não sabiam que a diagonal coincide com a bissetriz somente para casos particulares, como do losango e do quadrado, e não perceberam que uma demonstração não admite exceções.

Destas respostas, ficou claro que estes alunos ainda não compreendiam bem o significado do que seja demonstração e como estabelecer deduções. Sentiam dificuldades em estabelecer inter-relações entre as propriedades, entre os objetos geométricos e classificar determinadas figuras devido à uma falta de adequada apropriação de conceitos e propriedades.

- Desenho do paralelogramo com suas bissetrizes, partindo do vértice de dois ângulos consecutivos

Dois alunos se encontravam nesta categoria. Consideramos que foram capazes de visualizar a hipótese proposta no problema, mas não foram capazes de propor uma solução com argumentações gerais, capazes de justificar e validar seus raciocínios.

- **Desenho de figura que se parece um retângulo e um segmento que intercepta dois de seus lados opostos e paralelos formando um ângulo reto com um desses lados**

Detectamos apenas um representante que não resolveu o problema, porque não conseguiu interpretar o enunciado do problema. Identificou a classe dos retângulos como sendo o conjunto de todos os paralelogramos. Não possuía os conceitos de bissetriz, retângulo e paralelogramo, conseqüentemente, não foi capaz de demonstrar dedutivamente o problema.

- Reconhece a propriedade em um caso particular explicitamente mediante linguagem informal

Identificamos quatro casos nesta categoria que tentaram fazer demonstrações para casos particulares como o losango e o quadrado. A conclusão a que chegamos foi a de que estes alunos não foram capazes de reconhecer que o problema não admite exceções, não conseguiram fazer deduções em níveis mais gerais e ainda não dominavam completamente os conceitos em questão para resolver o problema.

Apesar destas dificuldades, identificamos que estes alunos estavam em um nível mais avançado que os anteriores, já que tentam organizar logicamente seu raciocínio, utilizando vocabulário ou algumas notações matemáticas em um nível informal e com certa propriedade para os casos particulares.

- Desenvolvimento de estratégias equivocadas

Dez alunos que tentaram interpretar o enunciado fizeram para casos particulares e não foram felizes em suas argumentações, pois relacionaram mal os conceitos. Um aluno, por exemplo, partiu da tese para realizar a prova e outro partiu confundiu o conceito de bissetriz coincidente com o de diagonais.

De acordo com Dreyfus y Hadas (1994), as dificuldades desse grupo estariam mais centradas no nível conceitual e falhas causadas por problemas logísticos e organização de planos de ações capazes fornecer a solução do problema.

- Demonstra a proposição valendo-se de gráfico e mediante expressões algébricas

Nesta categoria havia apenas um representante que demonstra o problema mediante o uso de expressões algébricas sem indicação específica que justifique o uso das propriedades utilizadas.

A interpretação que fazemos neste caso é de que o aluno dominava os conceitos em questão, contudo utilizava uma estratégia habitualmente desenvolvida nos cursos do ensino básico.

- Demonstra formalmente o problema

Apenas um aluno demonstrou e justificou corretamente seu raciocinio. Ele foi capaz de interpretar corretamente o enunciado identificando e diferenciando claramente hipótese de tese. Utilizou uma linguagem formal e notação capazes de interpretar e simbolizar a relação intuitiva apresentada na forma gráfica do enunciado. Foi capaz de encapsular (Martínez Recio, 1999) corretamente os conceitos de ângulos, paralelismo, bissetriz, o teorema que garante que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer mede 180º e de apresentar significações conceituais capazes de expressar toda a generalidade exigida em uma demostração.

4.2. Aportações gerais das soluções apresentadas nas questões quatro e cinco e dos procedimentos usados na resolução de tarefas geométricas

A conclusão a que chegamos ao analisar a prova diagnóstica dos alunos após um semestre de aulas de geometria, é que um pouco mais da metade dos alunos já estava desenvolvendo uma argumentação lógica informal. Ainda estavam sentindo certa dificuldade em ordenar classes de figuras geométricas e estabelecer relações entre as propriedades e conceitos geométricos, o que comprometeu a solução da questão cinco. Apesar disso, constatamos que foram capazes de reconhecer propriedades do triângulo equilátero e definí-lo, o que mostrou que não sentiram muitas dificuldades em reconhecer a propriedade da figura e aplicá-la diretamente na resolução do problema. A partir dessa análise, identificamos que esses alunos apresentaram raciocínios que localizavam no nível descritivo-analítico do modelo de Van-Hiele.

Com esses dados classificamos que cerca de 12% desses alunos foram inseridos no nível de dedução formal, já que foram capazes de estabelecer a geometria em um contexto de um sistema axiomático: compreender as inter-relações e os papéis dos axiomas, teoremas, definições e realizar genericamente as demonstrações pedidas.

O restante dos alunos seria classificado ainda num nível básico de reconhecimento, uma vez que o máximo que conseguiu nas tarefas foi apresentar algum tipo de definição e expressar o entendimento do exercício, apresentando figuras que expressassem a interpretação do problema.

Diante dessas constatações e de outras feitas no decorrer do segundo semestre do ano letivo de 2001, obtidas das correções de provas e outras atividades em sala, queríamos saber quais eram os procedimentos utilizados pelos alunos que mais ou menos os auxiliavam durante a resolução dos problemas. Em duas entrevistas feitas com os alunos e análise das respostas dos alunos às questões de uma prova oral ocorrida em outubro de 2001, os alunos responderam que os procedimentos que dificultavam a compreensão e a resolução de problemas geométricos foram:

a) não diferenciar hipótese da tese e interpretar o enunciado do problema;

(La): *"enquanto eu não sentei com ela (a professora anterior) e ela não ensinou umas coisas básicas eu não conseguia acompanhar. Enquanto ela não me ensinou diferenciar hipótese de tese, o que o exercício tava pedindo, a questão principalmente da ida e da volta."*

b) não explicar os passos de uma construção geométrica e justificá-la;

(La): *"Ah! eu acho assim que vai ter muito construa. Isso vai acabar comigo, porque nossa acho custoso demais. (...) Construir o quadrado na borda do papel assim, tem que mostrar passo a passo, eu esqueci..."*

c) estudar os problemas sem levar em consideração a teoria;

(La): *"Mas a parte do mostre, se a gente souber bem a teoria, a gente consegue mostrar muita coisa. Não é verdade? Porque a primeira vez que a gente estudou para a prova só fiz exercício, não estudou teoria não, só caiu coisa da teoria e aí a gente se danou."*

d) não questionar o professor quando se tem dúvidas;

(Lu): *"eu não consigo perguntar, se for alguma coisa forte, pode repetir, alguma explicação e conseguir entender o que foi dito atrás tem alguma relação, mas a maioria das vezes a gente omite, então fica a falha e uma coisa que era pequena, mas que fica grande..."*

e) não argumentar;

(Jo): *"A primeira avaliação, a última questão eu tinha certeza que eu desenvolvia, mas eu fiquei com medo com relação à escrita. Os cálculos, eu sabia como fazer os cálculos, mas fiquei com medo com relação à escrita".*

f) não propor um plano de ação para resolução do problema;

(Jo): *"Agora aquela segunda avaliação saí com a cabeça doendo. Saí com cabeça doendo mesmo, porque eu não consegui desenvolver a linha de raciocínio."*

g) não visualizar o que estava sendo proposto;

(Jo): *"Ajuda. Eu acredito que sim, porque de repente eu sei de alguma coisa até o fato no desenho, assim eu não vejo tão facilmente, já a Patrícia vê melhor. E outra coisa no escrever eu consigo ver uma coisa que ela não vê, então a gente vai fazendo as coisas assim."*

Dentre os procedimentos que os alunos levantaram nas entrevistas e prova oral que os ajudaram a ter êxito na compreensão e resolução de problemas geométricos, destacam-se:

a) desenhar figuras;

(Lu): *"gosto de desenhar bastante, eu desenho, eu desenho para eu visualizar bem, porque tenho dificuldade. Eu estudo primeiro a matéria, depois eu faço o desenho e concluo."*

b) estudar toda teoria;

(Ju): *"Eu leio os teoremas, os axiomas, proposições, tudo. Olho o que está sendo demosntrado e faço exercícios. É assim que estudo. Leio tudinho. A matéria toda."*

c) estudar em grupo;

(Jo): *"Ajuda. Eu acredito que sim, porque de repente eu sei de alguma coisa até o fato no desenho, assim eu não vejo tão facilmente, já a Patrícia vê melhor. E outra coisa no escrever eu consigo ver uma coisa que ela não vê, então a gente vai fazendo as coisas assim."*

d) estudar conceitos geométricos através de livros de níveis menos avançados;

(Ju): *"Igual eu tava falando para (Jo) o negócio do teorema de Pitágoras, tava vendo o livro do 2º grau e aí tem a relação de hipotenusa para o cateto, hipotenusa para o cateto, duas relações e soma as duas e chega no teorema de Pitágoras. (...) peguei o livro sábado né, e olhei o livro né, e lembrei o que você falou e falei vou tentar chegar nessa relação."*

e) construir figuras geméticas no computador e fazer experiências movimentando as figuras;

(E): *"Vocês acham que o Cabri tá ajudando a visualizarem as relações?"*

(Jo): *"A visualizar ajuda né. Colocar, mudar a figura para ver como fica. Porque se a gente desenhar, a gente desenha uma vez aquela coisa certinha, né. Agora o Cabri não, a gente tenta vários métodos, várias coisas para ver se aquilo dá certo mesmo."*

(Ju): *"É bem mais rápido."*

(Jo): *"É."*

(Ju): *"Você tenta, testa e se não funciona e testa de novo até chegar onde você quer. Se fosse com régua e papel leva muito tempo."*

f) refazer problemas e demonstrações;

(Lu): *"As outras nós tivemos erros, tivemos falhas, pegamos nós dois juntos novamente, como ele propôs fazer novamente a prova junto. Houve falha nesse e nesse aspecto, então vamos ver se a gente consegue mudar isso."*

g) recordar conceitos previamente estudados;

(Jo): *"Quando eu li a questão né, a primeira coisa que me veio em mente que pra mim construir um retângulo inscrito nessa circunferência eu ia ter que ter ângulos opostos suplementares."*

5. Considerações finais

A partir dos dados anteriormente apresentados, percebemos que os elementos procedimentais, que implicam no uso ou aplicação da matemática (Giménez, 1997) cumprem papel importante na aprendizagem da geometria, pois dão maior ou menor sentido ao fazer matemático dos estudantes.

No curso de licenciatura em matemática temos dado pouca atenção a esta prática e muitas vezes deixamos que nossos alunos descubram solitariamente os meios de resolução de problemas, porque acredita-se que o aluno adulto já possui processos cognitivos superiores e maturidade para vencer obstáculos e conflitos surgidos durante o desenvolvimento dessas atividades. Nossa experiência e este estudo nos mostram que em nosso curso ainda temos muito o que fazer em termos de desenvolver métodos mais eficientes que capacitem nossos alunos a se expressarem geometricamente, a visualizar e representar graficamente suas idéias a interpretar e planejar um problema, bem como capacitá-los profissionalmente para trabalhar a geometria no ensino básico.

A falta de ajustar nosso ensino às dificuldades encontradas pelos alunos, principalmente no que diz respeito a uma regulação do conhecimento conceitual e procedimental, é ainda um obstáculo que impede nossos alunos de adquirirem significativamente os conceitos geométricos e obterem maiores êxitos nas atividades propostas, constituindo-se um desafio que nossa pesquisa e atuação profissional pretendem contemplar.

6. Bibliografia

BARBOSA, A. C. M. Investigando e justificando problemas geométricos com o Cabri Géomètre II. In: *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n 39 p. 51-72, set. 2001

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM/ IMPA, 1995.

CROWLEY, M. O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: (Orgs) LINQUIDST, M. M. e SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria.* Tradução H. H. Domingues, São Paulo: Atual, p. 1-19, 1994.

CUNHA, Mª. C. C. da e CÂNOAS, S. S. Argumentação Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 7, *Anais*, Rio de Janeiro. 1 CD-ROM

DREYFUS, T. e HADAS, N. Euclides deve permanecer e até ser ensinado. In: (Orgs) LINQUIDIST, M. M. e SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

FETISSOV, A. I. A demonstração em geometria. Tradução H. H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 59-72, 1994.

FONT, V. *Distintas concepciones sobre la didáctica de las matemáticas*. Dep. de Didáctica de las ciencias experimentales y de las matemáticas, Universidad de Barcelona., Barcelona, 2000.

GIMÉNEZ, J. Evaluación en matemáticas: una integración de perspectivas. Madrid: Editorial Síntesis, 1997.

GODINO, J. D. Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *UNO,* n. 25. p. 77-87, 2000.

HOYLES, C. e HEALY, L. Relacionando la argumentación informal con la demostración formal mediante experimentos pedagógicos computacionales. *UNO*, n. 25. p. 9-20, 2000.

LÜDKE, A. e ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens* *qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

FAZENDA, I. *Metodologia de pesquisa educacional*. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

NASSER, L. e TINOCO, L. A. de A. Preparando o raciocínio dedutivo. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 7, *Anais*, Rio de Janeiro. 1 CD-ROM

OLIVEIRA, A. A. de (2001) Deficiência de argumentação dos alunos-reflexo da formação do professor? In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 7, *Anais*, Rio de Janeiro. 1 CD-ROM.

MARTÍNEZ RECIO, A. *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Tesis Doctoral Dep. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 1999.

REZENDE, E. Q. F. e QUEIROZ, Mª. L. B. de. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Campinas: Editora da UNICAMP, São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.