Artigos

Ensinando Proporção a Crianças: Alternativas Pedagógicas em Sala de Aula[1]

Alina Galvão Spinillo

Resumo / É reconhecida a importância e a complexidade do conceito de proporção, bem como as dificuldades dos alunos em desenvolver uma compreensão apropriada desse conceito. O presente artigo apresenta uma prática de ensino conduzida em sala de aula voltada para o conceito de proporção com crianças de 2ª série do ensino fundamental. Apoiando-se em considerações teóricas e evidências empíricas derivadas de pesquisas na área, a experiência de ensino tomou por base o pressuposto de que a aprendizagem desempenha papel importante no desenvolvimento de formas mais elaboradas de raciocínio. O artigo procura fornecer ao leitor uma revisão da literatura e subsídios para uma análise acerca da natureza do pensamento proporcional.
Palavras-chave / Proporção, séries iniciais, crianças, alternativas pedagógicas.

Teaching Proportion to Children: Pedagogical Alternatives in the Classroom

Abstract / The importance and complexity of the concept of proportion are well-known, and so are the difficulties students have in developing a full understanding of this concept. This paper presents an educational practice conducted in a classroom focusing the teaching of proportion to children in the second year of primary school. Based on theoretical considerations and empirical evidence from several researches, it was assumed that the process of learning has an important role in the development of more complex forms of reasoning. The aim of the present paper is twofold: to provide the reader with a literature review on the topic, and with means for an analysis about the nature of the proportional reasoning.
Key-words / proportion, elementary grades, children, pedagogical alternatives.

[1] Este estudo recebeu apoio da CAPES (Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) do Ministério da Educação e da FACEPE (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Pernambuco). Agradecimentos especiais são endereçados à professora que, com sua dedicação e desejo de mudança, foi parceira nesta intervenção; e aos alunos que com disponibilidade e bom humor compartilharam suas formas de pensar e aprender.

1. Introdução

Na última década, o contexto de sala de aula tem sido ambiente amplamente investigado por pesquisadores interessados em: (a) examinar as interações entre alunos e professor, e alunos entre si; e (b) desenvolver práticas educacionais que facilitem a aprendizagem de conceitos específicos. O presente estudo refere-se a este segundo enfoque, tendo por objetivo apresentar e discutir uma prática de ensino voltada para o conceito de proporção com crianças de 2ª série do ensino fundamental em uma escola pública na cidade do Recife.

No Brasil, o ensino de proporção é introduzido na 6ª série do ensino fundamental por volta dos 11-12 anos de idade, por se acreditar que antes desta idade seria impossível a compreensão deste conceito. Tradicionalmente, como mencionado por Carraher, Carraher, Schliemann e Ruiz (1986), Nunes, Schliemann e Carraher (1993), e Schliemann e Nunes (1990), o ensino de proporção se caracteriza por: (a) levar o aluno a usar expressões do tipo "a está para b, assim como c está para d" e "a/b = c/d"; (2) explicar a distinção entre proporções diretas e inversas; e (c) apresentar problemas cuja resolução se restringe à aplicação do algoritmo da regra-de-três e de cálculos numéricos precisos. Porém, nem o uso apropriado da regra-de-três e nem o uso das expressões matemáticas associadas à proporção garantem a compreensão do aluno acerca das relações e dos princípios envolvidos neste conceito, e nem tampouco oferecem subsídios para que suas dificuldades sejam superadas.

No entanto, estudos em psicologia do desenvolvimento cognitivo têm mostrado que crianças desde os 6-7 anos possuem noções iniciais sobre proporção (e.g.; Müller, 1978; Spinillo, 1997; Spinillo & Bryant, 1991, 1999); e que, além disso, são capazes de aprender sobre este conceito a partir de situações de intervenção baseadas em estimativas (e.g.; Brink & Streefland, 1979; Müller, 1979; Siegler & Vago, 1978; Spinillo, 2002). Esses dados têm implicações educacionais importantes: é possível ensinar proporção em séries iniciais do ensino fundamental. Esta instrução, contudo, precisa voltar-se para as noções iniciais que as crianças possuem e para as habilidades que já dominam, ao invés da forte ênfase no uso do algoritmo, do simbolismo matemático e de cálculos numéricos precisos.

Spinillo (1994; 1996) afirma que as noções iniciais que as crianças possuem sobre diversos conceitos matemáticos e as estratégias de resolução que espontaneamente adotam não são consideradas pela escola; ou porque se acredita que antes da instrução formal a criança não desenvolveu nenhuma forma de raciocínio matemático ou porque as formas de raciocínio que utilizam não são apropriadas, devendo serem substituídas pelo conhecimento formal. Porém, o conhecimento informal é relevante para a construção dos conhecimentos matemáticos escolares; no caso específico da proporção, é importante saber quais as noções iniciais que as crianças apresentam sobre este conceito e as estratégias de resolução que adotam.

2. A natureza do conceito de proporção e as noções iniciais das crianças antes do ensino escolar

Spinillo (1996) comenta que crianças entre 5-7 anos são capazes de compreender inúmeros princípios matemáticos básicos antes de serem formalmente ensinadas e antes de adquirir habilidades computacionais necessárias para representar seu conhecimento. Esse comentário encontra respaldo em pesquisas conduzidas com crianças sobre o conceito de proporção (e.g.; Singer, Kohn & Resnick, 1997; Spinillo & Bryant, 1991, 1999). Antes, de apresentar os resultados de algumas dessas pesquisas, é necessário compreender as relações entre quantidades que podem ser estabelecidas em problemas de proporção: (a) relações parte-parte; e (b) relações parte-todo[2].

Ao se estabelecer relações parte-parte, as quantidades dos problemas são comparadas em termos de razão (A:B), ou seja, na proporção de tantas partes de A para tantas partes de B. Por outro lado, ao se estabelecer relações parte-todo, as quantidades são comparadas em termos de fração (A/B), ou seja, em termos da quantidade de partes em relação ao todo (número total de partes). O problema do suco de laranja apresentado a seguir, extraído dos estudos de Noelting (1980a, 1980b), é um ótimo exemplo de como tais relações podem ser estabelecidas durante a resolução de um problema de proporção:

[2] Tais relações são características de problemas de comparação. Outros tipos de problemas de proporção, como os de incógnita, por exemplo, não são passíveis de serem resolvidos através de estratégias como aquelas apresentadas a seguir. Para maiores detalhes sobre os diferentes tipos de problemas de proporção, consultar Hart (1981,1984), Karplus, Pulos e Stage (1983), Lamon (1993) Tourniaire e Pulos (1985), e Lesh, Post e Behr (1988).

Duas jarras de bebidas são apresentadas: uma preparada com 3 copos de suco de laranja e 1 copo de água; e a outra com 2 copos de suco de laranja e 2 de água. Qual das duas bebidas tem o gosto mais forte de laranja, ou ambas têm o mesmo gosto?

Usando a estratégia parte-parte, compara-se em cada bebida o número de copos com suco de laranja com o número de copos com água, representando-se essas relações através das razões 3:1 e 2:2.

Usando a estratégia parte-todo, compara-se o número de copos com suco de laranja com o número total de copos em cada bebida, representando-se essas relações através das frações 3/4 e 2/4.

Um outro exemplo é o problema proposto por Bruner e Kenney (1966): Dois recipientes são apresentados: um estreito e alto, e outro largo e baixo, ambos com água até a metade. Qual recipiente está mais cheio que o outro, ou ambos estão igualmente cheios?

Usando a estratégia parte-parte, compara-se em cada recipiente o espaço ocupado com água com o espaço vazio, representando-se essas relações através das razões água: espaço vazio em um recipiente e água: espaço vazio no outro recipiente.

Usando a estratégia parte-todo, compara-se em cada recipiente o espaço ocupado com água com o volume total de cada recipiente, representando-se essas relações através das frações 1/2 e 1/2.

Essas estratégias são igualmente apropriadas para solucionar os problemas apresentados. Enquanto adultos adotam ambas as estratégias, crianças resolvem tais problemas através de comparações parte-parte (razão). A preferência por esta estratégia decorre do fato de que, como documentado por Piaget e Szeminska (1975), é mais fácil comparar duas partes simultaneamente presentes (suco vs. água; água vs. espaço vazio) do que comparar uma parte com o todo ao qual pertence (número de copos com suco vs. número total de copos da bebida; espaço com água vs. volume total do recipiente).

A preferência por estratégias parte-parte é documentada por Spinillo e Bryant (1991; 1999) em que se verificou que desde os 6 anos, crianças são capazes de, usando estimativas, adotar julgamentos proporcionais para resolver tarefas de comparação entre razões representadas por quantidades contínuas e discretas. Analisando-se as justificativas das crianças nesses estudos, e em outros documentados na literatura, observou-se o uso freqüente de estratégias parte-parte para determinar a equivalência ou não-equivalência entre razões. Associada a esta estratégia, identificou-se o uso do referencial de 'metade' como âncora para realizar as estimativas, como pode ser ilustrado nos exemplos a seguir:

Tarefa do suco de laranja:
3 copos com suco: 1 copo com água vs. 2 copos com suco: 2 copos com água
"Fica mais forte nessa (3:1) porque tem mais suco que água. Na outra jarra (2:2) é metade de suco e metade de água. É igual de suco e de água, não fica forte não."

Tarefa dos recipientes com água
"Tem mais água nesse (copo estreito e alto) do que nesse daqui (copo largo e baixo). Mas os dois estão cheios do mesmo jeito, quer dizer, cheio igual, porque eles têm metade vazio e metade com água."

Recentemente, Spinillo (2002) investigou a possibilidade de que crianças entre 6 e 8 anos pudessem aprender sobre proporções, usando a estratégia de 'metade' de forma sistemática. Adotando um planejamento experimental consistindo em pré-teste, pós-teste e uma intervenção, 180 crianças foram igualmente divididas em três grupos: um que apenas realizava uma tarefa de proporção, um grupo controle e um grupo experimental. Às crianças do grupo experimental era sugerido o uso do referencial de 'metade' para resolver uma série de problemas de proporção, estabelecendo relações parte-parte. O desempenho no pós-teste foi superior ao desempenho no pré-teste apenas para as crianças que receberam a intervenção, as quais superavam as dificuldades iniciais detectadas no pré-teste. Verificou-se, ainda, que no pós-teste estas crianças apresentavam um desempenho superior ao das crianças dos demais grupos. Além do desempenho, observou-se que, após a intervenção, as crianças do grupo experimental passavam a usar um maior número de justificativas proporcionais para explicitar sua maneira de raciocinar do que as crianças dos outros dois grupos. Concluiu-se que crianças podem ser ensinadas a fazer julgamentos proporcionais, sendo a estratégia de 'metade' um referencial importante que auxilia a lidar com as quantidades e as relações cruciais ao raciocínio proporcional.

O uso dessa estratégia parece ser um passo importante na aprendizagem inicial deste conceito.

Uma vez que as crianças apresentam noções iniciais importantes sobre proporção e são capazes de, individualmente, se beneficiarem de uma intervenção específica como aquela realizada no estudo acima, cabe perguntar se seria possível criar situações didáticas que levassem os alunos a aprender sobre este conceito no contexto de sala de aula. Em vista disso, foi desenvolvida uma prática em sala de aula para o ensino de proporção em alunos do ensino fundamental que ainda não haviam sido formalmente instruídos sobre proporção. A prática pedagógica apresentada a seguir não deve ser entendida como um estudo clássico de intervenção, mas como um relato de uma experiência conduzida em sala de aula que tomou por base um referencial teórico que pressupõe que a aprendizagem desempenha papel importante no desenvolvimento de formas mais elaboradas de raciocínio e que, também, apoiou-se em considerações teóricas e evidências empíricas derivadas de pesquisas sobre o raciocínio proporcional em crianças.

3. Visão geral da prática conduzida em sala de aula

A alternativa educacional proposta foi implementada em uma sala de 2ª série do ensino fundamental de uma escola pública na cidade do Recife que atendia 23 alunos de baixa renda, com idades entre 8 e 9 anos, sendo alguns deles repetentes. O estudo consistiu em duas etapas: capacitação da professora e a intervenção realizada na sala de aula.

Primeira etapa: Capacitação da professora

Com o objetivo de preparar a professora, foram realizados cinco encontros com três horas de duração cada. Esses encontros consistiam em: (a) palestras sobre temas relativos à educação matemática e sobre o conceito de proporção; (b) discussão de textos previamente selecionados e lidos pela professora antes de cada encontro; (c) apresentação e discussão de atividades usualmente adotadas na pesquisa em psicologia do desenvolvimento cognitivo sobre o conceito de proporção; (d) análise de protocolos de crianças resolvendo problemas de proporção, identificando as dificuldades experimentadas, as estratégias de resolução adotadas e as noções iniciais que apresentavam; e (e) elaboração e planejamento de atividades a serem conduzidas durante a intervenção. Além desses, foram realizados encontros de apoio para acompanhar, avaliar e orientar a professora na condução das atividades.

Segunda etapa: A intervenção em sala de aula

Um total de 18 aulas foram ministradas no período de nove semanas, com duração aproximada de 90 minutos cada, em que eram propostas duas ou três atividades de resolução de problemas a serem realizadas em pequenos grupos. A exemplo de Shayer (1997), ao final de cada atividade cada grupo apresentava suas soluções, oralmente ou por escrito, para toda a sala, sendo conduzidas discussões acerca das diferentes formas de raciocinar dos alunos. Registros foram feitos por uma observadora que gravava algumas passagens, procurando cobrir a maior diversidade possível de atividades. A observadora auxiliava a professora na realização das atividades.

4. Aspectos gerais sobre a natureza da intervenção proposta

4.1. A assistência fornecida

Em situações de ensino-aprendizagem é de particular importância compreender o tipo de assistência que o adulto (professor) fornece à criança. Garton (1992) e Brainerd (1978; 1987), comentam que, apesar das inúmeras formas de assistência do adulto em estudos de intervenção, essas formas podem ser agrupadas em duas modalidades de intervenção: autodescoberta e instrução direta ou tutorada.

De maneira geral, a autodescoberta se caracteriza por situações que evitam uma diretividade por parte do adulto e por enfatizar a importância da ação e da manipulação ativa por parte da criança. O adulto apresenta contra-argumentações, procurando testar a segurança do raciocínio da criança e gerar situações de conflito, enquanto a criança é encorajada a fazer suas próprias descobertas. Por sua vez, a instrução direta ou tutorada requer um papel ativo do adulto que pode fazer intervenções explícitas, tais como: apresentar regras e estratégias de resolução, fornecer *feedback* e explicações, corrigir soluções e hipóteses inadequadas ou pouco efetivas. Apesar do papel ativo do adulto, o papel da criança não se restringe a uma recepção passiva de informações, ao contrário, ela participa ativamente de todo o processo.

A prática pedagógica proposta neste estudo caracterizou-se por uma intervenção de natureza tutorada em que a assistência da professora se baseava nos seguintes pontos:

(i) dirigir a atenção da criança para os aspectos relevantes de uma dada situação, tornando-os explícitos.

(ii) fornecer *feedback* acerca do acerto/erro dos alunos, corrigindo-os quando necessário. Tanto o *feedback* como as correções eram acompanhados de explicações. Com isso procurava-se promover redefinições e re-organizações conceituais que permitissem a emergência de formas mais apropriadas de raciocínio. Os erros eram interpretados como indicadores da perspectiva cognitiva do aluno.

(iii) apresentar contra-exemplos e contra-argumentos, com o objetivo de gerar conflitos e desafios que levassem à reflexão e promovessem discussões pertinentes sobre o problema que estava sendo resolvido.

(iv) utilizar diferentes suportes de representação: material concreto e representações gráficas variadas (desenhos, diagramas, representações icônicas e simbólicas – números e linguagem natural).

(v) conduzir discussões com a classe como um todo após a realização das atividades em pequenos grupos. Isso permitia que os alunos tivessem a oportunidade de compartilhar tanto os *insights* que tinham como também as dificuldades experimentadas e as formas de superá-las. Os alunos aprendiam a partir da socialização e discussão das idéias dos outros.

(vi) apresentar conclusões e fechamento de caráter geral ao final das atividades.

4.2. O pensamento e as ações dos alunos colocados em evidência

Foi estabelecido um ambiente de discussão que estimulava o aluno a explicitar, refletir sobre suas formas de raciocinar e proceder. Os alunos eram sistematicamente encorajados a explicitar suas posições, a ouvir a dos outros, fazer comparações entre elas e avaliar sua adequação. Neste sentido, a intervenção proposta baseou-se fortemente em um mecanismo cognitivo considerado da maior importância em situações de aprendizagem: a metacognição[3].

De maneira geral, a metacognição refere-se à habilidade do indivíduo em tomar seu próprio pensamento como objeto de análise e reflexão; sendo um processo intelectual que envolve, dentre outros aspectos, a consciência sobre os atos e processos de conhecer e de raciocinar em uma dada situação (ver Flavell, 1976, 1979; Seminério, Anselme &

[3] Diversas considerações acerca da metacognição em relação a conceitos e resolução de problemas em matemática são discutidas por Schoenfeld (1987).

Chahon, 1999). A metacognição teve papel de destaque no processo de ensino-aprendizagem proposto, por ser um mecanismo capaz de ativar processos de raciocínio, promover habilidades de gerenciamento cognitivo sobre processos de resolução, auxiliar na identificação de inconsistências no raciocínio, promovendo um redirecionamento deste para formas mais apropriadas. Esse mecanismo parece ser ativado mais freqüentemente em situações tutoradas do que em situações baseadas na autodescoberta.

Colocar as ações e as formas de raciocinar dos alunos em evidência, tornando-as objeto de análise e discussão, permitia que a professora compreendesse os processos de raciocínio dos alunos e, ainda, que cada aluno compreendesse a sua própria maneira de raciocinar e a maneira de raciocinar dos colegas. Para tal, justificativas e explicações eram solicitadas pela professora ("Como fez? Como pensou para resolver? Por que fez assim?"), independentemente do raciocínio adotado estar correto ou incorreto. O objetivo era expor, discutir, analisar e comparar as idéias veiculadas em sala de aula. Inicialmente a professora propunha uma situação-problema e aguardava que os alunos apresentassem suas formas de resolução; podendo, ela também apresentar suas próprias idéias.

5. Aspectos específicos sobre o ensino de proporção

Além dos aspectos gerais acima mencionados, a intervenção realizada apoiou-se em aspectos específicos relativos ao conceito de proporção (seus invariantes); nas noções intuitivas dos alunos; e em uma variedade de situações e representações relativas a este conceito. Neste sentido, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1997) teve papel fundamental na construção desta proposta.

Os pontos específicos que nortearam a presente intervenção podem ser, assim, descritos:

(i) Ênfase em estimativas

Sem dúvida, a quantificação numérica é essencial para um domínio pleno do conceito de proporção. No entanto, é importante considerar que as noções iniciais sobre este conceito se estruturam a partir de estimativas e julgamentos qualitativos, como afirmam Streefland (1984, 1985) e Spinillo (1996). Em se tratando de crianças jovens, como aquelas neste estudo, este ponto assume especial relevância. Estimativas e comparações qualitativas do tipo *'mais/menos que'*, *'maior/menor que'*, '*igual a*' foram exploradas em situações diversas que envolviam relações entre quantidades contínuas e discretas. Estimativas são processos de resolução semi-numéricos que propiciam a passagem de formas qualitativas de raciocínio para formas quantitativas precisas. Como afirmado por Lamon (1993), formas qualitativas de raciocínio proporcional guiam a aplicação futura de formas quantitativas. Importante mencionar que muitas das competências conceituais das crianças são bem mais desenvolvidas do que sua competência simbólica e numérica, sendo necessário, portanto, atentar-se para tais competências. Considerando isso, a intervenção proposta consistiu em apresentar atividades e situações-problema em que se enfatizava mais os princípios conceituais do que as habilidades de cálculo.

(ii) Uso de pontos de referência como âncoras para o raciocínio

Pontos de referência, como o referencial 'metade', por exemplo, são fundamentais em atividades que envolvem estimativas. Como indicado pela literatura na área, o uso do referencial de 'metade' é estratégia importante para decidir, em termos qualitativos e semi-numéricos, acerca da equivalência ou não-equivalência entre razões. Situações diversas foram apresentadas aos alunos em que este referencial era amplamente utilizado na resolução dos problemas apresentados. Cabe ressaltar que estimar e usar âncoras são habilidades importantes para o raciocínio matemático de modo geral, como apontado por Sowder (1995); e para o raciocínio proporcional, em particular, como sugerem Lovett e Singer (1991), Spinillo e Bryant (1991), e Spinillo (1996, 1997, 2002). Embora pouco desenvolvidas e estimuladas no contexto escolar, essas habilidades foram amplamente adotadas durante a intervenção.

(iii) Reflexão acerca das relações envolvidas no pensamento proporcional

O pensamento proporcional refere-se à habilidade de estabelecer relações: relações de primeira-ordem e relações de segunda-ordem[4]. Tomando como exemplo o problema do suco de laranja apresentado anteriormente, as relações de primeira-ordem são aquelas entre o espaço ocupado por água e o espaço vazio em cada recipiente; enquanto as relações de segunda ordem consistem em comparar as relações água-

[4] Spinillo (1992; 1997) discute amplamente acerca das relações de primeira e de segunda-ordem envolvidas no raciocínio proporcional.

espaço vazio em cada recipiente. Pesquisas mostram que uma das possíveis causas das dificuldades das crianças com problemas de proporção decorre de dificuldades em lidar com as relações de primeira-ordem que são o ponto de partida do pensamento proporcional (Spinillo & Bryant, 1991, 1999; Spinillo, 1992, 1993, 1997). Assim sendo, a intervenção proposta consistia em explicitar e discutir com os alunos as relações de primeira-ordem estabelecidas durante a resolução dos problema apresentados, sem entretanto, adotar esta terminologia.

(iv) Ênfase em problemas de proporção do tipo comparação

Segundo alguns autores, problemas de incógnita tendem a ser mais difíceis que problemas de comparação (e.g.; Tourniaire, 1986; Tourniaire & Pulos, 1985), pois requerem a aplicação da regra de três em que o termo a ser descoberto (incógnita) é numericamente quantificado. Além disso, por não envolverem dimensões complementares, tais problemas não podem ser resolvidos através de relações parte-parte que são aquelas utilizadas preferencialmente pelas crianças. Problemas de comparação, por outro lado, permitem, mais freqüentemente, o aparecimento de comparações qualitativas e o uso de relações parte-parte, como demonstrado nas soluções dadas pelas crianças no problema dos recipientes com água e no problema do suco de laranja. Assim, a grande maioria dos problemas apresentados em sala de aula tratava-se de problemas de comparação que permitiam o estabelecimento de relações parte-parte e de julgamentos qualitativos.

(v) O uso de quantidades extensivas

A compreensão das quantidades extensivas e intensivas por crianças é amplamente discutida por Nunes, Campos, Magina e Bryant (2001). Segundo os autores, desde muito novas as crianças têm uma compreensão de quantidades extensivas discretas, passando, posteriormente a compreender quantidades extensivas contínuas; mas experimentam dificuldades com quantidades intensivas. Lamon (1993) verificou que quantidades intensivas, como velocidade e preço, não são passíveis de representações físicas diretas, oferecendo uma dificuldade adicional para crianças quanto ao uso do raciocínio proporcional. Segundo nossa análise (Spinillo & Bryant, 1991; Spinillo, 1997), quantidades intensivas não podem ser estabelecidas através de comparações parte-parte, uma vez que as partes não se complementam de maneira a formar um mesmo todo (distância e tempo; dinheiro e quantidade do produto a ser comprado). Diante desses resultados, as situações propostas na presente intervenção envolviam quantidades extensivas, sendo raras as situações com quantidades intensivas.

(vi) Distinção entre quantidades absolutas e quantidades relativas

Pensar em termos relativos (ao invés de pensar em termos absolutos) é essencial ao pensamento proporcional, e a emergência desta habilidade pode ser entendida como um sinal de que a criança está começando a fazer a ponte entre as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas (Lamon, 1993). No entanto, é sabido que muitas crianças tendem a raciocinar em termos absolutos ao invés de em termos relativos (Piaget & Inhelder, 1975). Por exemplo, é comum encontrar crianças que julgam que uma jarra com 4 copos de suco e 2 copos de água tem um gosto mais forte de laranja do que uma jarra com 2 copos de suco e 1 copo de água, porque na primeira jarra há mais copos com suco de laranja do que na segunda jarra. Esse é um exemplo de raciocinar em termos absolutos. Contudo, é essencial compreender que o gosto é o mesmo em ambas as jarras porque elas são equivalentes, embora uma tenha mais copos com suco de laranja do que a outra. Essa diferenciação não é fácil de ser compreendida pela criança, mas é crucial para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Assim, a professora sistematicamente salientava a diferença entre quantidades relativas e absolutas, confrontando e explicitando a distinção entre elas e a inadequação do pensamento absoluto para a resolução de problemas de proporção.

(vii) Ênfase nas relações parte-parte (razão)

De modo geral, as relações parte-parte são mais fáceis de serem estabelecidas pelas crianças do que relações parte-todo (Piaget & Inhelder, 1969). Especificamente em relação ao conceito de proporção, as crianças tendem a representar as relações de primeira-ordem em termos de razão ao invés de fração, como observado por Singer e Resnick (1992) e por Spinilo e Bryant (1991). Lamon (1993) menciona que muitas das crianças por ela investigadas usavam expressões verbais associadas à razão, quando resolvendo problemas de proporção de diferentes tipos. Estudos mais recentes confirmam este dado, como discutido por Nunes, Campos, Magina e Bryant (2001) quando apresentam resultados de pesquisas sobre o raciocínio multiplicativo em crianças entre 8-10 anos de idade. Os autores trazem evidências de que a linguagem de frações (um terço, um quinto) é mais complexa do que a linguagem de razões (uma para dois, um para quatro), visto que os alunos tinham um melhor desempenho em problemas apresentados na linguagem de razões do que na linguagem de frações. A explicação para isso é que a linguagem de razões é facilmente assimilada aos seus esquemas de raciocínio, o mesmo não ocorrendo com a linguagem de frações. Segundo nossa análise, o esquema de raciocínio que a criança apresenta é o esquema parte-parte, sendo por isso mais fácil usar a linguagem de razões e adotar representações em termos de razões. Considerando estes dados, a professora apresentava problemas de comparação em que as relações de primeira-ordem podiam ser estabelecidas em termos parte-parte. As passagens a seguir, extraídas da sala de aula, ilustram tanto este ponto como os demais acima mencionados.

6. Passagens extraídas da sala de aula

Algumas das atividades desenvolvidas em sala de aula foram planejadas juntamente com a professora; outras basearam-se em situações utilizadas em pesquisas que tinham por objetivo avaliar o raciocínio proporcional em crianças. Adaptações foram feitas para tornar tais atividades apropriadas para o contexto de ensino em sala de aula. As passagens a seguir[5] ilustram a como a intervenção ocorreu.

Passagem 1: No quadro é colocada a Figura 1. O círculo corresponde à foto de um bolo feito de chocolate (parte escura) e de baunilha (parte clara) antes de ter sido cortado em seis fatias. Qual dos dois conjuntos de fatias pertence à foto do bolo antes dele ter sido fatiado: o conjunto da esquerda ou o da direita?

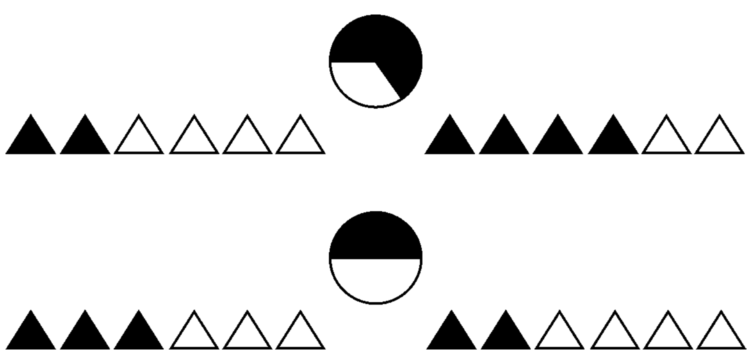


Figura 1: O problema do bolo de chocolate e baunilha, baseado em Spinillo e Bryant (1999).

[5] Prefere-se à fala da professora, cujas intervenções são numeradas para auxiliar sua referência nos comentários posteriores. Os nomes dos alunos são fictícios.

(1) P - Como a gente pode descobrir qual o conjunto de fatias de bolo que pertence à foto do bolo antes dele ser cortado em fatias?

Lúcia - Vendo na metade do bolo (círculo) e na metade dos pedaços (fatias), não é?

João - Ah! Eu também sei disso. Nesse é aqui (indica com o dedo sobre o círculo na parte superior da figura acima). E nesse (círculo na parte inferior da figura acima) já está lá. É mais fácil quando o bolo já está na metade.

(2) P – E nas fatias, como é que a gente sabe onde é a metade?

Lúcia – A metade é 3 fatias porque todas juntas têm 6.

João- Fica 3 de cada lado. Aí não pode ser este (2:4) porque fica pouca fatia de chocolate para o bolo. O bolo tem mais de 3, porque tem mais de chocolate que de creme.

Lúcia- Creme não, BA -U -NI-LHA (fala auto e pausado). Ele não sabe nada.

João - Eu sei sim.

(3) P- Espera aí, deixa ele falar, explicar.

João- Aí... Deixa eu ver ... Ah! Sim, aí, a metade tem que ser 3. A foto (círculo na parte superior da Figura 1) passa da metade. Então tem que ser esse (4:2) porque tem 4 de chocolate que é mais que 3 que é metade.

(4) P - Por que não pode ser o outro (2:4)?

João - Porque ele tem 2 de chocolate, e 2 é menos que metade.

(5) P - E daí?

Lúcia - Ele não sabe explicar direito, professora. Eu explico. A metade é 3 nas fatias. Essa (4:2) tem mais de metade e a outra (2:4) tem menos de metade. Na foto (círculo na parte superior da figura) tem mais que metade. Aí tem que ser esse (4:2).

(6) P - É, vocês dois tão pensando certo. Só que cada um diz de um jeito e todo jeito é bom. Quer dizer, o jeito da pessoa falar. Mas tem que deixar sempre o colega falar, dizer como está pensando. Tem que ouvir e deixar o colega falar.

Lúcia- Eu deixei, só que ele demora.

(7) P – João, você disse coisas importantes. Você disse que quando a foto do bolo estava na metade, como nessa (círculo na parte inferior da figura), era mais fácil. Mais fácil como?

João- Porque assim nem precisa imaginar a metade na cabeça, ela já está lá. Só precisa saber onde fica a metade das fatias. Aí tem que contar as fatias e ver quanto que é a metade.

Comentários sobre a passagem 1

Na intervenção (2), a professora procurou levar o aluno a compreender a equivalência entre quantidades contínuas (círculo representando foto do bolo) e discretas (fatias), ressaltando que o referencial de 'metade' poderia servir de âncora para estimar as quantidades discretas e contínuas. Note-se o esforço constante da professora em estimular que os alunos apresentassem e discutissem suas formas de raciocinar, como demonstrado nas intervenções (3), (6) e (7). A retomada do raciocínio da criança, feita pela professora na intervenção (7), também merece destaque. Com esta intervenção ela procura retornar a uma observação relevante feita por João no início desta passagem, observação esta que quase se perdia nos diálogos subseqüentes. Esta retomada garantiu que o aluno compartilhasse com os colegas a estratégia que havia adotado para comparar a composição das quantidades tanto no discreto (fatias) como no contínuo (foto). A intervenção (4) é um exemplo de como é importante lidar tanto com as alternativas corretas como com as incorretas. Ao perguntar acerca da razão por que o outro conjunto de fatias não era a escolha correta, a professora propiciou uma reflexão mais acurada acerca dos critérios adotados e das relações estabelecidas pelos alunos.

Passagem 2: No quadro é colocada a Figura 2. Duas jarras são apresentadas: Jarra 1 preparada com 3 copos de suco de laranja e 5 copos de água; e a Jarra 2 preparada com 3 copos de suco de laranja e 3 de água. Qual das jarras tem o gosto mais forte de laranja, ou ambas têm o mesmo gosto?

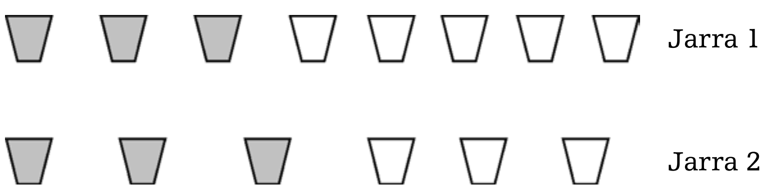


Figura 2: O problema do suco de laranja, baseado em Noelting (1980).

Ana - Acho que é igual.

(1) P - Por quê?

Ana- Tem 3 copos de suco nas duas (compara suco nas duas jarras).

(2) P - Todo mundo pensou assim? Quem pensou de outro jeito?

Silvia - Eu acho que não é igual não. É 3 nas duas (refere-se aos copos de suco), mas nessa (Jarra 1) deve ficar mais fraco por causa da água.

(3) P - O que é que tem a água?

João - Ela deixa fraco. Tem mais água nesse (Jarra 1) do que nesse (Jarra 2).

(4) P – O que acham? Quem pensa assim também?

João- Eu acho que nessa (Jarra 1) é mais fraco mesmo.

(5) P - Como fez para descobrir?

João- A gente só sabe se fizer o suco de verdade e tomar (risos).

(6) P - Deixa de gracinha João. Vamos pensar. Eu vou fazer aqui no quadro as setas para marcar as comparações que Ana fez, o jeito dela pensar para descobrir.

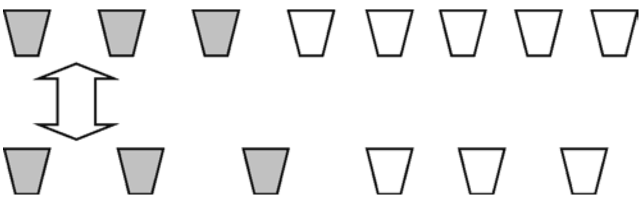


Figura 3: Representação no quadro, feita pela professora, para ilustrar e socializar para toda a sala as comparações estabelecidas por Ana (suco com suco).

(7) P – Ana disse que o gosto era igual porque nas duas jarras têm 3 copos de suco.

(8) P - Certo! Ana fez 3 suco com 3 suco, achou que era igual de gosto nas duas jarras. Agora vou fazer o jeito de Silvia, também com setas, para vocês verem que pode comparar de jeitos diferentes. Silvia comparou água com água. Vou fazer no quadro.

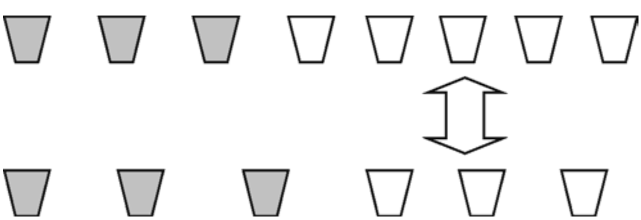


Figura 4: Representação no quadro, feita pela professora, para ilustrar e socializar para os alunos as comparações estabelecidas por Silvia (água vs. água).

(9) P - Silvia pensou na água, comparou água com água. Aí disse que na Jarra 2 era mais fraco porque tinha mais água, tinha 5 copos de água e na Jarra 1 só tem 3 copos. Certo?

Silvia - É... foi assim. Tá errado, é?

(10) P - O importante, antes de descobrir a resposta certa, é pensar para descobrir e entender como cada pessoa pensou.

Silvia - Mas está certo ou não está?

(11) P - Se eu fosse resolver este problema do suco eu fazia de outro jeito.

Ana - Faz.

(12) P - Eu vou desenhar no quadro as setas do meu pensamento, da forma como eu comparei. Aí vocês vão ver que tem mais um outro jeito de se comparar as quantidades neste problema.

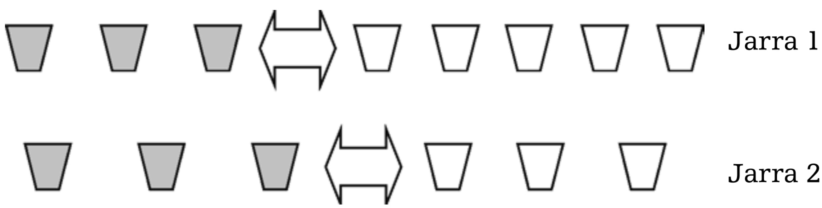


Figura 5: Representação no quadro, feita pela professora, relativa à sua maneira de raciocinar (comparações entre suco vs. água em cada jarra).

(13) P - Eu comparo suco com água na Jarra 1 e depois suco com água na Jarra 2. O meu jeito de pensar é diferente do jeito de pensar de Ana, que é suco com suco. E é diferente de Silvia, que é água com água. Aí, comparando suco com água... Aí eu vejo que na Jarra 1 tem mais água que suco. Aí é ......

Silvia - Fraco. Nessa (Jarra 1) é fraco o gosto de laranja.

(14) P - Depois eu comparo (aponta para a seta) suco com água na Jarra 2, e aí...

Ana - É igual de suco e de água. Fica normal, nem forte nem fraco. É feito suco lá em casa.

(15) P - Eu vejo que na Jarra 2 tem o mesmo tanto de copo de suco e de copo com água. Então, onde tá mais forte o gosto de laranja?

Ana - Você estava certa Silvia, nessa (Jarra 1) está mais fraco.

(16) P - Mas isso é complicado, não é? Porque quando a gente só pensa na quantidade de suco e vê que nas duas jarras tem 3 e 3, a gente pode pensar que o gosto vai ser o mesmo porque as duas jarras têm o mesmo número de copos de suco. Mas tem que pensar em mais coisas. O que é que precisa pensar ainda?

Ana - Na água, nos copos de água que enfraquecem, deixa o gosto ficar fraco.

Silvia - Mas e se a água estivesse igual nas duas jarras, ia ficar com o mesmo gosto?

(17) P - Vamos ver? Vou mudar os copos, vou tirar alguns.

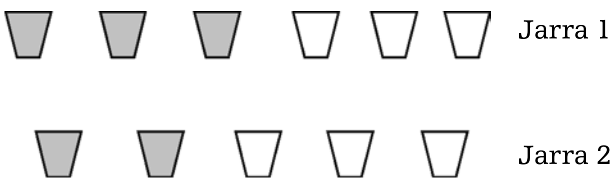


Figura 6: Alteração feita pela professora no quadro: retira dois copos de água da Jarra 1, e um copo de suco da Jarra 2.

(18) P - As duas estão fracas do mesmo jeito?

Silvia - Parece que está. Tem 3 de água em cada.

(19) P - E nos copos de suco a gente não pensa?

Silvia - Eita!... Não, não... Essa (Jarra 2) fica menos forte porque...

(20) P – Será que não fica igual? Está 3 e 3 de copos de água nas duas.

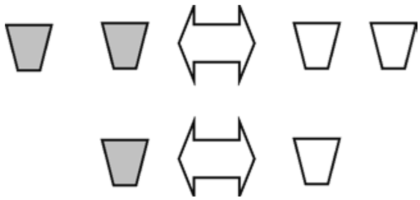
Silvia - Mas fica mais forte a Jarra 1, tem mais suco que a outra. Mas aí, ... Deixa eu ver uma coisa... Vou fazer pela seta que compara suco e a água. Nessa (Jarra 1) tá igual de suco e de água. Essa outra (Jarra 2) tá menos suco que de água. Tá fraco demais.

(21) P - Certo. Mesmo com a mesma quantidade de água nas duas jarras (Figura 6), o gosto vai ser diferente. Por que será?

Silvia – Porque na Jarra 1 tem igual de suco e de água; e na Jarra 2 tem mais água que suco. Fica fraco, mesmo tendo a mesma água nas duas. É, tem que fazer seta de lado (referindo-se a comparações entre suco e água em cada jarra).

(22) P - É, tem que comparar suco e água em cada jarra.

(23) P - Quer ver uma coisa? Vou fazer outras jarras para ver se vocês entenderam.



Jarra 1

Jarra 2

Figura 7: Outras composições das jarras apresentadas pela professora no quadro.

(24) P - E agora?

João - Se for pensar com a seta aí fica... fica... Fica igual de mesmo gosto nas duas.

(25) P - Será? Me explica.

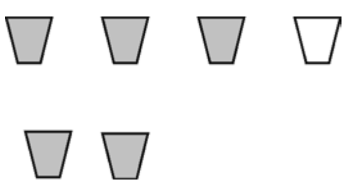
João - É pela seta que compara suco com água dentro de cada jarra. Tem que olhar para as setas, elas dizem o lado que a gente pode pensar. Olhando as setas é igual de suco e de água nas duas jarras.

(26) P - Mas essa (Jarra 1) tem mais suco de laranja, que faz o gosto ficar mais forte.

João - Mas pela seta, tá igual de suco e de água nas duas. Dois (suco) e dois (água) (Jarra 1), e um (suco) e um (água) (na Jarra 2). O gosto é igual, só fica menos líquido para beber.

(27) P - Certo, muito bem! O que acontece é que se pensar só no suco ou só na água não resolve. O melhor é pensar nos dois, ir comparando água e suco dentro de cada jarra.

(28) P – Não pode ficar pensando só no número de copos de suco. Tem que pensar no número de copos de suco dentro da jarra e nos copos de água. Não adianta ser igual em número, tem que ser igual na combinação suco para água. Vou mostrar (no quadro).



Jarra 1

Jarra 2

Figura 8: Outras composições das jarras apresentadas pela professora no quadro.

(29) P – E agora, qual das duas jarras tem o gosto mais forte de laranja? Diz você Alice (convidando outra aluna para participar das discussões)

Alice – É a Jarra 2.

(30) P – Por quê? Na Jarra 2 só tem 2 copos de suco e na Jarra 1 tem 3 copos. Vai ficar mais forte.

Alice – Vai nada. Na Jarra 2 só tem suco, fica completamente forte. Na Jarra 1 tem água, tem pouca água mas tem água que enfraquece. Você (refere-se à professora) tá querendo me confundir (risos).

(31) P – Tem razão, você está certa. Esse problema era para mostrar que a gente não pode se confiar apenas no número de copos com suco ou no número de copos com água. Tem que ver a combinação deles em cada jarra. De repente tem muitos copos com suco, mas tem muitos copos com água que faz o suco ficar fraco. Pode também ter poucos copos com suco, mas não ter nenhum de água e aí fica forte. Tudo depende da relação entre suco e água e não do número de copos de suco.

Comentários sobre a passagem 2

Nas intervenções (2) e (4), a professora procura fazer um levantamento das possíveis formas de respostas ao problema proposto, comparando-as. Ao representar no quadro as possíveis formas de pensar de seus alunos, como mostram as intervenções (6) e (8), e a sua própria (12), demonstra claramente esta intenção. O uso de setas nas representações feitas no quadro auxiliou os alunos a compreender a direção das comparações estabelecidas: se entre suco e suco (Figura 3), se entre água e água (Figura 4), e se entre água e suco em uma mesma jarra (Figura 5). Desta maneira, as formas de pensar sobre o problema parecem se materializar através das setas e dos diagramas, tornando-se objetos de reflexão. Importante mencionar que a representação gráfica das comparações através das setas tornava possível representar diversas situações ao mesmo tempo, aspectos esses impossíveis de serem simultaneamente tratados no material concreto apenas. Os alunos demonstraram compreender esta forma de representar as comparações e passaram a utilizar-se dela, como evidencia o comentário de Silvia após a intervenção (20) e de João após a intervenção (25).

A professora sistematicamente procurava levar as crianças a refletirem sobre a quantidade de copos com água e de copos com suco de laranja, como ilustrado nas intervenções (19) e (21). Note-se a preocupação em esclarecer a diferença entre quantidade absoluta e quantidade relativa, como se percebe nas intervenções (28) e (31).

Na intervenção (23), a professora cria outras possibilidades que são, na realidade, desafios cognitivos em que se enfatiza os aspectos relevantes para a solução do problema: a equivalência entre as jarras. Na intervenção (26), procura contra-argumentar, tentando mostrar a diferença entre quantidade absoluta e quantidade relativa, como ilustra a intervenção (27).

Passagem 3: Esta é uma variação da atividade anterior, em que ao invés de apresentar a composição das duas jarras, a professora apresenta apenas uma jarra e são os alunos que têm que compor a segunda jarra em função das instruções dadas por ela. Além do apoio de representações gráficas no quadro, o material concreto era apresentado: copos plásticos com água e com líquido alaranjado.

(1) P - Agora vou fazer diferente. Vou fazer feito jogo, em grupos. Vou preparar uma das jarras e vocês é que vão preparar a outra do jeito que eu disser. Vou fazer primeiro com os copos na mesa e a gente vai usando o quadro também. Um aluno de cada grupo vem fazer. Mas tem que ser com as regras do jogo que eu disser. Cada grupo ganha ponto quando acertar, mas tem que sempre explicar como fez. Vou fazer uma jarra[6].

Figura 9: Composição de uma jarra pela professora com os copos sobre a mesa.

(2) P - Como vai ser a jarra de vocês, para que ela tenha mesma quantidade de suco, mas tenha um gosto de laranja mais forte que na jarra que eu fiz? Vem Beto, faz você.

Figura 10: Composição feita por Beto com o material concreto sobre a mesa.

[6] Importante ressaltar que a composição feita pela professora com material concreto sobre a mesa (Figura 9) servia de base para as composições posteriores feitas pelos alunos (Figura 10 e Figura 11).

Beto - Fica mais forte por causa que na jarra que eu fiz (Figura 10) tem mais suco que água.

(3) P - Certo, ponto para o grupo de vocês. Como vai ser a jarra de vocês, se ela tivesse que ter mais copos de água que a jarra que eu fiz (Figura 9), mas tendo o mesmo gosto de suco que tem na minha jarra ? O gosto tem que ser igual nas duas. Vem Marcos, agora (aluno de outro grupo).

Marcos - Vai ficar assim:

Figura 11: Composição feita por Marcos com o material concreto sobre a mesa.

(4) P - Por que fez assim?

Marcos - Ora, tinha que ter mais de água, era 3 botei 4. Aí tive que botar mais um de suco: era 3 botei 4. Botei 4 (de suco) e 4 (de água) porque tinha que ter o mesmo gosto da outra (jarra feita pela professora ilustrada na Figura 9). Se era 3 (de suco) e 3 (de água) nessa jarra (Figura 9), então tem que ser igual de suco e água também na minha jarra (Figura 11).

(5) P - Certo, muito bem. Ponto para esse grupo.

Comentários sobre a passagem 3

Esta atividade, desenvolvida em um contexto de jogo, foi bastante aceita pelos alunos, gerando um alto nível de motivação na sala. A composição de uma das jarras pelos próprios alunos permitiu que eles não apenas julgassem a equivalência entre as jarras, mas que construíssem a composição das quantidades de forma a seguir as regras determinadas pela professora. Essas regras tinham por objetivo levar os alunos a refletirem acerca das diferenças entre quantidade relativa e quantidade absoluta, como mostram as intervenções (2) e (3) da professora. Explicações eram solicitadas sistematicamente, como ilustra a intervenção (4), bem como era dado a cada aluno um espaço para discutir e expor seu modo de raciocinar, como mostra a intervenção (9), sendo ressaltada a importância de se ouvir as diferentes posições e idéias.

Interessante notar que o material concreto não era o único apoio para as discussões. O uso de representações gráficas era estimulado, fosse através de diagramas, desenhos e simbolismos variados, os quais eram associados às manipulações realizadas sobre o material concreto. Combinar diferentes suportes de representação (manipulativos e gráficos) é algo que parece facilitar a compreensão das crianças e o acompanhamento das diversas etapas de resolução da atividade.

Passagem 4: Um problema escrito em uma folha de papel é entregue a cada grupo**:** Seu Manoel está pintando uma parede de cinza, usando 4 potes de tinta preta e 4 potes de tinta branca. Ele teve que ir trabalhar e pediu a seus filhos, João e Carlos, que continuassem a pintura da parede, mas tinham que pintar a parede da mesma tonalidade que ele. Não podia ser nem mais claro e nem mais escuro. João usou 2 potes de tinta preta e 2 potes de tinta branca, e Carlos usou 3 potes de tinta preta e 2 de tinta branca.

(1) P - Qual dos dois filhos está pintando a parede no mesmo tom que Seu Manoel?

Alice - Vou fazer no papel, pode?

(2) P - Pode sim. Pode fazer no papel, com desenho ou do jeito que você quiser. E você Beto, vai fazer como?

Beto - Estou pensando. Acho que vou fazer com letrinhas.

(3) P - Com letrinhas como?

Beto - Assim: pote preto com a letra P e pote branco com a letra B. P de preto e B de branco.

(4) P - E você Alice, vai fazer como? Mostra para Beto e Zilda como você vai fazer.

Alice - Vou fazer desenhando potes preto e pote branco com o lápis de cor.

Zilda - Não dá não.

Alice - Por quê? Eu vou fazer colorido.

Zilda - Não dá não, o papel é branco não vai aparecer. Vai ficar um pote fantasma.

(Risos).

(5) P - Já que o trabalho é em grupo, vocês têm que combinar um jeito só de marcar no papel. Vamos, combinem.

A professora se distancia, gerenciando o andamento das atividades em outros grupos. Retorna a este grupo, posteriormente, perguntando:

(6) P - Já estão fazendo? Como combinaram? Ficou como?

Zilda - A gente ia desenhar, mas ia demorar muito, e ficar feio. Ninguém sabia desenhar as latas de tinta (potes). A gente foi desenhar e parecia um copo, um balde (risos). Não podia pintar de branco porque o papel é branco, aí ia ficar desaparecido. Aí, a gente fez de letra.

Beto - É uma letra para cada pote. Olha aqui, professora (mostra o arranjo no papel). A gente pode ir no quadro fazer para todo mundo ver?

P P P P B B B B (Seu Manoel)

P P B B (João)

P P P B B (Carlos)

Figura 12: Diagrama feito pelas crianças no quadro.

Beto - A gente pensou que é João.

(7) P - Por quê?

Beto - Porque Seu Manoel mandou pintar a parede igualzinha do jeito dele antes de sair.

(8) P - Então nenhum filho obedeceu. João e Carlos usaram quantidades diferentes.

Alice - Eu não falei?! Tá vendo. Eu disse que os dois fizeram errado.

Beto - Mas a gente pensou... É que... Olha professora, eu achei que para pintar igual, na mesma cor igualzinha sem ficar mais claro nem mais escuro tinha que fazer com igual de pote preto e igual de pote branco.

(9) P - Como assim? Me explica.

Beto - O pai pintava com 4 de um e 4 de outro. Ficava meio a meio. Então o filho que fez meio a meio foi João. Ele obedeceu, pintou igual. Olha aqui (aponta para o diagrama no quadro, Figura 12)

(10) P - Me explica tudo desde o começo. Alice pensou como?

Alice - Que os dois, os dois filhos estavam errado porque João botou pouco preto, menos que Seu Manoel. Aí ia ficar muito claro.

(11) P - Por que você pensou que Carlos (filho de Seu Manoel) estava errado também?

Alice - Porque ele também fez claro. Só botou 3 preto. Seu Manoel, o pai dele, tinha botado 4.

(12) P - Você estava comparando que cor com que cor?

Alice e Beto - Preto com preto.

(13) P - Aí vocês discutiram e pensaram que era de outro jeito?

Alice - Foi, só que era .. como era que era Zilda?

Zilda - Não pode comparar preto com preto. Tem que ser feito a professora disse antes.

(14) P - Eu disse o que?

Zilda - Que compara preto com branco.

(15) P - Preto com branco?

Beto - Você disse!! Você disse que compara por dentro.

(16) P - Por dentro de onde? Explica, não estou entendendo nadinha, nadinha.

Zilda- Ah Meu Deus! Olha professora, você disse que tem que comparar dentro do retângulo, dentro do copo. Não podia comparar por fora.

Beto - Deixa eu explicar. Você sabe, né? (Falando com P) Ela sabe, ela tá rindo (para os colegas). Ela tá fazendo a gente explicar, mas ela sabe.

(17) P - Eu sei sim (risos). Mas veja, se você me explica eu entendo o jeito que vocês pensaram. E vocês também entendem o jeito de vocês pensarem, o raciocínio, entendeu?

Zilda- Ah Meu Deus! (impaciente) Olhe foi assim: a gente pegou e comparou preto e branco (de Seu Manoel), preto e branco (de João) e preto e branco (de Carlos). A pintura de Seu Manoel era preto igual branco.

Alice – A de Carlos também. Agora sei que era por isso. Lembrei.

(18) P - Está vendo como é bom falar e explicar o jeito de pensar ?!

Zilda - É, a de João também. A de Carlos não foi igual porque ele tinha mais preto que branco.

(19) P - Se a pintura de Carlos era diferente da pintura de Seu Manoel, a pintura dele ia ser mais escura ou mais clara?

Zilda - Mais escura.

(20) P - Por quê?

Zilda - Porque tinha 3 preto e só 2 branco. Ia ficar cinza escuro e o pai queria cinza normal.

Beto - É, nem escuro nem claro.

(21) P - Vou explicar. Vocês estão certos, explicaram bem. Vou explicar para a sala toda.

(22) P - Muita gente acertou e teve grupo que ficou confuso. Quando eu passei nos grupos, eu vi que tinha dois jeitos de resolver o problema. Também tinha muitos jeitos de fazer no papel. Quando eu passei nos grupos, eu vi que muitas formas de pensar apareceram.

(23) P - Um jeito de fazer era comparando preto com preto de Seu Manoel, de Carlos e de João. Aí, o que é que a gente ia pensar? Que nenhum filho obedeceu e que nenhum fez a pintura da parede do mesmo jeito que Seu Manoel já tinha começado a pintar. A gente ia pensar assim, porque cada filho usou uma quantidade diferente de preto e de branco. Mas a gente sabe, como eu expliquei de outras vezes, que as quantidades, mesmo diferentes, podem estar na mesma proporção. Quer dizer, aqui nesse problema, que mesmo com quantidade de preto e de branco diferente de Seu Manoel, podia ser que um dos filhos estava pintando no mesmo tom. Para gente saber disso, se estão combinando a cor, é preciso comparar preto com branco em cada pessoa. O grupo de Lúcia disse que tinha que comparar por dentro. O que é isso? Comparar por dentro?

Lúcia - É comparar dentro das tintas de cada pessoa: de Seu Manoel, de João e de Carlos.

(24) P - .... Certo Lúcia. ...Vamos lá, continua. Depois de comparar por dentro faz o que?

Lúcia - Aí vê qual é o filho que pintou igual preto e igual branco feito o pai.

(25) P - E foi quem?

Lúcia - João.

(26) P - Vocês estão certos. João é quem pintou a parede da mesma cor que o pai. Ele e Seu Manoel misturaram preto e branco na mesma proporção. Veja aqui: 4 preto e 4 branco (referindo-se a Seu Manoel) e 2 preto e 2 branco (referindo-se a João).

Comentários sobre a passagem 4

Como pode ser notado, as intervenções de (1) até a (5) tinham por objetivo levar os alunos a decidirem qual sistema de notação utilizar para resolver o problema apresentado. Após a intervenção (6), é tomada uma decisão que é explicada pelos alunos à professora.

Na intervenção (8), a professora lança um desafio: as quantidades absolutas da pintura dos filhos de Seu Manoel não correspondem às quantidades absolutas da pintura da parede iniciada por ele; assim, ninguém obedeceu o pai. Este desafio foi lançado no sentido de levantar um contra-argumento, chamando a atenção dos alunos para a quantidade absoluta. Alice, de forma inadequada, assume que a quantidade absoluta é o que leva ao acerto na resolução do problema. Beto, por sua vez, ao explicitar seu raciocínio, mostra que, apropriadamente, pensou em termos relativos e não em termos absolutos. A professora solicita maiores explicações na intervenção (9) e retoma o raciocínio inadequado de Alice na intervenção (10). Note-se, mais uma vez, que mesmo os erros dos alunos eram pontos de discussão: eram tratados como hipóteses que precisavam ser revistas. Explicações passo-a-passo são solicitadas através das intervenções (12) e (13); esclarecimentos são pedidos na intervenção (16). A importância de se mostrar como se pensa é salientada nas intervenções (17) e (18). As intervenções (21), (22), (23) e (26) são exemplos de como a professora procurava finalizar a resolução do problema: fornecendo um fechamento geral da resolução do problema.

5. Comentários finais

A prática de ensino apresentada e discutida neste artigo indica que a instrução sobre proporção poderia iniciar-se mais cedo do que usualmente ocorre. Tal instrução, entretanto, diferentemente da tradicionalmente adotada, tomou por base as noções e estratégias intuitivas das crianças (e formas de representação não convencionais), a metacognição como processo cognitivo relevante para situações de aprendizagem e as propriedades essenciais ao conceito de proporção. Esses aspectos são tratados a seguir.

As noções e estratégias intuitivas das crianças e as representações não convencionais

Inúmeros autores afirmam que as noções e as estratégias intuitivas dos alunos deveriam fazer parte das situações de ensino, uma vez que são aspectos importantes para a compreensão de conceitos matemáticos diversos (e.g.; Fischbein, 1987; Hatano & Susuki, 1992; Lembke & Reys, 1994; Spinillo, 1994; 1996; Streefland, 1982; 1984; 1985). Na proposta de ensino apresentada, atenção especial foi dada à habilidade dos alunos em estimar e em usar âncoras (como o referencial de 'metade') que auxiliassem a resolução de problemas de proporção sem que fossem enfatizadas o uso de cálculos e de algoritmos como estratégia única de resolução.

O conhecimento informal, as estratégias adotadas, as ações e falas das crianças, constituem-se em situações bem mais ricas e estimulantes do que a aplicação de soluções puramente algorítmicas. É preciso ressaltar que as competências conceituais que uma criança apresenta podem ser mais elaboradas do que sua competência simbólica. Inclusive, no caso da proporção, é pouco provável que após compreender a regra de três, os alunos sejam capazes de compreender as relações complexas envolvidas no esquema da proporcionalidade. No entanto, ao compreender tais relações, é provável que compreendam a regra de três.

A partir de situações-problema, a professora encorajava o uso de múltiplas estratégias e o aparecimento de vários níveis de sofisticação de raciocínio, tomando por base a perspectiva cognitiva da criança. Por exemplo, as representações não convencionais utilizadas pelos alunos (grafismos icônicos, desenhos) serviam para a construção de novas representações e auxiliavam a produzir soluções apropriadas para os problemas propostos.

Esta forma de instrução se diferencia da maneira tradicional de ensino que tem como ponto de partida a formalização do conceito. De maneira geral, a instrução fornecida se caracterizava por garantir um processo de aprendizagem que se iniciava com as idéias intuitivas dos alunos.

A metacognição e os erros dos alunos

Como já mencionado, o termo metacognição, de modo geral, refere-se à habilidade de pensar sobre os próprios pensamentos e processos mentais. É processo intelectual amplo que pode ser aplicado a qualquer conhecimento, pois trata da consciência sobre o que se está fazendo ou pensando em um dado momento ou situação. Perguntar aos alunos como resolvem problemas, os critérios e procedimentos que adotam é útil tanto para o professor, que poderá acompanhar e compreender o raciocínio dos alunos, como para o próprio aluno que passa a esclarecer para si mesmo suas formas de pensar. Mais ainda, a atividade de tomar consciência de seus processos de resolução e explicitá-los verbalmente torna possível aos outros (colegas) refletir e comentar sobre tais processos.

Uma das características da prática apresentada foi o fato de se colocar em destaque a maneira de pensar dos alunos, tomando-a como objeto de reflexão e análise. Sem dúvida, isso não é algo fácil de se implementar em sala de aula, sendo esta dificuldade sentida tanto pelos alunos como pela professora. A dificuldade inicial sentida em relação aos alunos foi quanto à capacidade de verbalmente explicitarem seus processos de resolução. Isso, de certa forma, era esperado, pois as práticas de sala de aula raramente se caracterizam como sendo um espaço para o pensamento onde o aluno tem a oportunidade de explicitar a forma como concebe e resolve uma dada situação. No decorrer das aulas, entretanto, as crianças foram aprendendo a expressar suas formas de raciocinar e aprendendo a prestar atenção ao que diziam e faziam os colegas quando resolviam os problemas propostos. A professora, por sua vez, sentiu dificuldades em criar situações em que o raciocínio pudesse ser explicitado e, assim, tornar-se objeto de reflexão por parte dos alunos. Ao final da intervenção, entretanto, a professora passou a considerar tal reflexão como algo possível de ser conduzido na sala de aula e, ainda, como algo crucial para as situações de ensino-aprendizagem. Importante mencionar que ao refletir acerca da forma de raciocinar dos alunos, a professora desenvolveu uma atitude bastante positiva em relação ao erro: ao invés de ignorar as formas ineficientes ou inadequadas de raciocinar, a professora transformava o erro em um problema, em um desafio a ser superado, uma possibilidade de diálogo com vistas à aprendizagem (Macedo, 1990; Pinto, 2000; Spinillo, 1999; Weisz & Sanchez, 2001)

As propriedades essenciais ao conceito de proporção

Pensar em termos relativos e considerar a razão como uma entidade distinta das duas quantidades que a compõem são habilidades estreitamente relacionadas e próprias do pensamento proporcional (Lamon, 1993; 1995). A razão é entendida como uma unidade derivada de comparações entre quantidades, uma derivação do processo de composição de unidades extensivas. A equivalência entre razões torna-se, assim, de grande relevância para a compreensão da proporção; seja esta equivalência decidida a partir de relações escalares (entre uma mesma dimensão: suco vs. suco no problema das jarras) ou de relações funcionais (entre dimensões diferentes: água vs. suco). Esta equivalência pode ser decidida tanto a um nível quantitativo como qualitativo.

Neste sentido, segundo Lamon (1993; 1995), é necessário ao pensamento proporcional, uma compreensão sobre a covariância e a invariância. Em outras palavras, ao estabelecer a equivalência, é necessário entender que as quantidade que compõem uma razão covariam (isto é, alteram-se de forma conjunta) de tal forma que as relações entre elas permanecem invariantes (isto é, as relações entre as quantidades permanecem constantes). É necessário compreender que na equivalência entre razões, algo muda (quantidade absoluta), porém, ao mesmo tempo, algo permanece constante (a proporção). O uso de material concreto e de gravuras auxiliam no exame desta covariância e invariância, possibilitando integrar e coordenar esses dois aspectos em uma mesma situação.

O que se verifica é que o ensino tradicional da proporção está longe de contemplar tais aspectos, por privilegiar e resumir a compreensão dessas relações ao uso do algoritmo e de cálculos numérico precisos. A proposta aqui apresentada privilegia situações que permitem que as crianças explorem as relações entre quantidades (covariância e invariância) a partir de noções que já possuem, de estimativas e do uso de pontos de referência ('metade'). Essa proposta, entretanto, pode ser entendida com um exemplo, dentre outros, de como desenvolver uma compreensão mais efetiva e apropriada do conceito de proporção. Evidentemente, é desejável que outros estudos dessa natureza sejam implementados, inclusive, explorando situações mais complexas, como a precisão numérica, proporções inversas, quantidades intensivas, relações parte-todo (fração); até o emprego do algoritmo, da linguagem e do simbolismo apropriado.

A importância do conceito de proporção justifica esforços nesta direção, pois, o pensamento proporcional consolida o conhecimento matemático do ensino elementar; e, ao mesmo tempo, forma o alicerce para aquisições complexas futuras como probabilidade, porcentagem e álgebra, por exemplo. Na realidade, funções, variáveis, gráficos de equações lineares e vetores são a formalização de representações de relações proporcionais.

Para finalizar, a passagem de Lamon (1995, p. 182) parece ser de grande pertinência para o ensino de proporção:

> *"Todos os dias nas aulas de matemática, deveríamos solicitar que os alunos explorassem relações: O que muda? O que permanece constante? Qual aspecto está se modificando mais rápido? Como comparar A com B? O que estas situações têm em comum? Todos os dias precisamos desafiar o limite de suas perspectivas: Existe alguma outra forma de você considerar isso? Existe uma forma mais eficiente de fazer isso? Quando e por que pode esta forma seria mais eficiente? Todos os dias precisamos encorajar os alunos a ir além do imediatamente óbvio, para explorar, para ampliar: O que aconteceria se usássemos 12 pacotes ao invés de 6 pacotes? Suponha que este*

número aumentasse, o que aconteceria? O raciocínio proporcional não ocorrerá meramente porque cobrimos a matéria do livro em que este tema é explicado. Precisamos aproveitar todas as oportunidades para promover este raciocínio desde a pré-escola e nas séries do ensino fundamental."[7]

Referências

Brainerd, C. J. (1978). Learning research and Piagetian theory. Em L. S. Siegel & C. J. Brainerd (Orgs.), Alternatives to Piaget: Critical essays on the theory (pp. 69-109). New York: Academic Press.

Brainerd, C. J. (1987). Modifiability of cognitive development. Em S. Meadows (Org.), Developing thinking: Approaches to children's cognitive development (pp. 26-66). London: Methuen.

Brink, F.J. van den, & Streefland, L. (1979). Young children (6-8): Ratio and proportion. Educational Studies in Mathematics, 10, 403-420.

Bruner, J.S. & Kenney, H.J. (1966). On relational concepts. Em J.S. Bruner; R.R. Olver & P.H. Greenfield (Orgs.), Studies in cognitive growth (pp.168-182). New York, NY: John Willey.

Carraher, T.N., Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Ruiz, E.L. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática (I): Quantidades medidas por razões. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67 (155), 93-107.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1988). Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez Editora.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. Em L. B. Resnick (Org..), The nature of intelligence (pp. 231-235). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J.H. (1979). Metacofnition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. American Psychologist, 34 (10), 906-911.

Garton, A.F. (1992). Social interaction and the development of language and cognition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hart, K.M. (1981). Ratio and proportions. Em K.M. Hart (Org.), Children´s

[7] Tradução da autora.

understanding of mathematics: 11-16 (pp. 88-101). London: Murray.

Hart, K.M. (1984). Ratios: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Hatano, G. & Susuki, H. (1992, Agosto). Transferring children's informal knowledge to classroom problem solving situation by creating pragmatic context. Trabalho apresentado na 25th International Conference of Psychology, Brussels, Belgium.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1976). Da lógica da criança à lógica do adolescente. São Paulo: Pioneira.

Karplus, R., & Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school (II): Ratio, a survey. School Science and Mathematics, 70 (9), 813-820.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning in early adolescents. Em R. Lesh & M. Landau (Orgs.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.

Lamon, S.J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. Journal for Research in Matematics Education, 24, 41-61.

Lamon, S.J. (1995). Ration and proportion: Elementary didactical phenomenology. Em J.T. Sowder & B.P. Schappelle (Orgs.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades. Albany: State University of New York Press.

Lembke, L.O. & Reys, B.J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (3), 237-259.

Lesh, R.; Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. Em J. Hiebert & M. Behr (Orgs.), Research agenda for mathematics education. Number, concepts and operations in the middle grades. Vol. 2, National Council of Teachers of Mathematics (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lovett, S.B. & Singer, J.A. (1991). The development of children's understanding of probability: Perceptual and quantitative conceptions. Trabalho apresentado no Biennial Meetings of the Society for Research in Child Development, Seattle, WA.

Macedo, L. De (1990). Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar. Em C. de T. Aguiar (Org.) Coletânea de textos de psicologia, (pp. 75-84), Vol. 1. São Paulo: Secretaria da Educação/Coordenadoria

de Estudos e Normas Pedagógicas,
Müller, D.J. (1978). Children's concepts of proportion: An investigation into the claims of Bryant and Piaget. British Journal of Educational Psychology, 48, 29-35
Müller, D.J. (1979). Perceptual reasoning and proportion. Mathematics Teaching, 87, 20-22.
Noelting. R. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I – Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11, 217-253.
Noelting. R. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II – Problem structure at successive stages: problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. Educational Studies in Mathematics, 11, 331-363.
Nunes, T. & Bryant, P. (1997). Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artmed.
Nunes, T.; Campos, T.M.M.; Magina, S. & Bryant, P. (2001). Introdução à educação matemática. Os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM Editora Ltda.
Nunes, T.; Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1993). Street mathematics and school mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
Piaget, J. & Inhelder, B. (1969) The psychology of the child. London: Routledge and Kegan Paul.
Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. New York, NY: Norton.
Piaget, J., & Szeminska, A. (1975). A gênese do número na criança. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
Pinto, N.B. (2000). O erro como estratégia didática. Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus Editora.
Resnick, L.B. & Singer, J.A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. Em T.P Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (Orgs.), Rational numbers: An integration of research (pp. 107-130). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates
Resnick, L.B. (1995). Inventing arithmetic: Making children's intuition work in school. Em C.A. Nelson (Org.) Basic and applied perspectives on learning, cognition, and development. The Minnesota Symposia on Child Psychology (pp. 75-102), Vol. 28. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A.D. & Nunes, T. (1990). A situated schema of proportionality. British Journal of Developmental Psychology, 8, 259-268.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's the fuss about metacognition? Em A.H. Schoenfeld (Org.), Cognitive Science and Mathematics Education. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Seminério, F.P.; Anselmé, C.R. & Chahon, M. (1999). Metacognição: Um novo paradigma. Arquivos Brasileiros de Psicologia, 51 (1), 110-126.

Shayer, M. (1997). Piaget and Vygotsky: A necessary marriage for effective educational intervention. Em L. Smith; J. Dockrell e P. Tomlinson (Orgs.). Piaget, Vygotsky and beyond (pp. 36-59). London: Routledge.

Siegler, R.S., & Vago, S. (1978). The development of proportionality concept: Judging relative fullness. Journal of Experimental Child Psychology, 25, 371-395.

Singer, J. & Resnick, L.B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part- part or part-whole reasoners? Educational Studies in Mathematics, 23, 231-246.

Singer, J.A. & Resnick, L.B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? Educational Studies in Mathematics, 23, 231-246.

Singer, J.A.; Kohn, A.S. & Resnick, L.D. (1997). Knowing about proportions in different contexts. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.); Learning and teaching mathematics. An international perspective (pp.115-132). Hove: Psychology Press.

Sowder, J. (1995). A compreensão de número na escola de primeiro grau. Livro de Resumos da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Mestrado em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco(pp.19-27).

Spinillo, A.G. (1992). A importância do referencial de 'metade' e o desenvolvimento do conceito de proporção. Psicologia: Teoria e Pesquisa, 8 (3), 305-317.

Spinillo, A.G. (1993). As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: Uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. Psicologia: Teoria e Pesquisa, 2 (9), 349-364.

Spinillo, A.G. (1994). O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola. A Educação Matemática em Revista, 2 (3), 41-50.

Spinillo, A.G. (1995). Avaliação da aprendizagem numa perspectiva cognitiva. Psychologica (Universidade de Coimbra, Portugal), 14, 83-99.

Spinillo, A.G. (1996). Developmental perspectives on children's understanding of ratio and proportion and the teaching of mathematics in primary school. Em J. Giménez, R.C. Lins & B. Gómez (Orgs.), Arithmetics and algebra education: Searching for the future (pp. 132-137). Barcelona: Copisteria Asturias.

Spinillo, A.G. (1997). Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. Em A.D. Schliemann; D.W. Carraher; A.G. Spinillo; L.L. Meira; J.T. R. Falcão & N. Acioly-Regnier. Estudos em psicologia da educação matemática (pp: 40-61). Recife: Editora da UFPE. (2ª edição)

Spinillo, A.G. (1999). As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção. Arquivos Brasileiros de Psicologia, 51 (1), 55-74.

Spinillo, A.G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. Psicologia: Refexão e Crítica, 15 (3), 475-487.

Spinillo, A.G. & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgements: The importance of 'half'. Child Development, 62, 427-440.

Spinillo, A.G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantities. Mathematical Cognition, 5 (2), 181-197.

Streefland, L. (1982). The role of rough estimation in learning ratio and proportion. An exploratory research. Proceedings of the 6th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.193-199). Antwerp, Holland.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards...a theory). Part I: Reflections on a teaching experiment. Educational Studies in Mathematics, 15, 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards...a theory). Part II: The outline of the long term learning process. Educational Studies in Mathematics, 16, 75-94.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. Educational Studies in Mathematics, 17, 401-412.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. Educational Studies in Mathematics, 16, 181-204.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structure. Em R. Lesh & M. Landau

(Orgs.); Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 128-75). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.); Learning and teaching mathematics. An international perspective (pp. 5-28). Sussex: Psychology Press.

Weisz, T. & Sanchez, A. (2001). O diálogo entre o ensino e a aprendizagem. São Paulo: Editora Ática.

Apêndice 1: Exemplos sumariados de outras atividades conduzidas na sala de aula

Recipientes de vidro com líquido (atividade baseada em Bruner & Kenney, 1966)

Eram utilizados recipientes de vidro ou plástico transparentes com alturas e larguras diferentes, explorando 1/4 cheio, 1/2 cheio, 3/4 cheio e completamente cheio com água. Eram exploradas expressões como '*menos da metade*', '*metade*' e '*mais da metade*'. É importante que os alunos compreendam que dois recipientes podem estar igualmente cheios até a metade, mesmo que a quantidade de água seja maior em um do que em outro recipiente; e compreendam que o copo mais cheio pode ter menos água que o outro, isto é, o copo mais cheio não é necessariamente aquele que tem mais água. Tal compreensão auxilia a fazer a distinção entre quantidade absoluta e quantidade relativa.

Distorções de tamanho (atividade baseada em Brink & Streefland, 1979)

Os alunos eram solicitados a descobrir o que havia de errado com os objetos (pessoas ou animais) em diversas gravuras entregues aos grupos. Nestas gravuras, um dos objetos era apresentado em tamanho bem maior que o observado no mundo real e em comparação ao outro objeto. Exemplos:

Menina: Edifício - sendo a menina mais alta ou do mesmo tamanho que o edifício.
Sapato: Carro - sendo o sapato maior ou do mesmo tamanho que o carro.
Flor: Menina - sendo a flor maior ou do mesmo tamanho que a menina.
Homem: Peixe - sendo o peixe maior ou do mesmo tamanho que o homem.
Menino: Coqueiro - sendo o menino maior ou do mesmo tamanho que o coqueiro.

As discussões versavam sobre as razões internas entre os tamanhos dos objetos presentes nas gravuras (relação de primeira ordem: a menina mais alta que o edifício) e a relação interna entre os objetos reais (relação de primeira ordem: edifício mais alto que a menina), comparando essas duas relações entre si (relação de segunda ordem). Os alunos eram solicitados a corrigir as distorções identificadas; mostrando, através de desenhos, como deveria ser para que a gravura representasse as proporções apropriadas entre os objetos (menina bem menor que o edifício).

Projeção de sombras com velas (atividade baseada em Brink & Streefland, 1979)

Na parede da sala era marcada a lápis, a altura de um dos alunos e ao lado, com o recurso de uma vela, era marcada a altura de sua sombra projetada na parede. Comparava-se as duas alturas: qual a maior, qual a menor etc. Em seguida a professora marcava na parede sua própria altura, comparando-a com a altura real do aluno, salientando a diferença entre a altura real da professora e a altura real do aluno. A partir dessas comparações solicita-se que um aluno estimasse a altura da sombra da professora na parede. Através de discussões, levava-se os alunos a compreender que relações entre as alturas reais e as alturas projetadas deveriam ser mantidas constantes para se fazer uma boa estimativa a respeito da altura da sombra a professora. Esta mesma atividade era realizada com alunos entre si.

Resolução de problemas

João tem que pintar as janelas de sua casa na cor rosa. Na loja de tintas está faltando tinta rosa, e só tem para vender tinta vermelha e tinta branca. João sabe que misturando a tinta vermelha com a tinta branca ele poderá obter a cor rosa. Então, ele fez duas misturas.

Mistura A: 2 potes de tinta vermelha e 4 potes de tinta branca

Mistura B: 1 pote de tinta vermelha e 1 pote de tinta branca

Qual a mistura que vai ficar com o rosa mais escuro? Por quê? Como descobriu?

Se ele quiser fazer a cor rosa na mesma tonalidade que a Mistura A, usando 4 potes de tinta vermelha, quantos potes de tinta branca ele vai precisar?