ARTIGOS

Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o Exemplo da Geometria do táxi

ANA MARIA KALEFF
Departamento de Geometria - UFF (anakaleff@urbi.com.br)

ROGÉRIO SANTOS DO NASCIMENTO
Licenciado em Matemática; Bolsista Monitor – UFF (ggmleg@vm.uff.br)

RESUMO / Neste artigo apresentam-se atividades apoiadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e no Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Desenvolveram-se atividades que buscam levar o aluno, desde os primeiros ciclos do Ensino Fundamental, a construir conceitos que o possibilitarão a se orientar no espaço e a transpor algumas dificuldades que têm surgido em situações de aprendizagem introdutórias ao ensino das Geometrias não-Euclidianas. Apresentam-se atividades de um tipo especial de Geometria: do Táxi ou Pombalina. Criam-se situações pedagógicas que permitem apresentar a negação de um axioma euclidiano, as quais envolvem jogos, tabelas, maquetes, mapas e esquemas gráficos.

PALAVRAS-CHAVE / Atividades introdutórias; Geometrias não-Euclidianas; Geometria do táxi; materiais concretos.

Introductory Activities in Non-Euclidian Geometries: The Example of Taxicab Geometry

ABSTRACT / This paper presents activities based on van Hiele Model and National Curriculum Parameter (PCNs) for the development of geometric thinking. Activities that provide students to build concepts since the first grades which possibility an orientation in space and to go through difficulties appeared in a learning process to introduce non-Euclidean Geometry. We have special activities: Taxi or Pombalina. Learning situations allow us to introduce how to prove that a Euclidean axiom is not true, using games, schemas, maps, and graphics.

KEY WORDS / Activities, non Euclidian geometry, taxi geometry, resources

[1] A parte gráfica deste artigo foi realizada por Luciano Lucas de Oliveira Junior, bolsista monitor – UFF.

Justificativa e Fundamentação Teórica

Este artigo visa a apresentar algumas atividades pedagógicas elaboradas na UFF, no âmbito de projetos de extensão desenvolvidos no Laboratório de Ensino de Geometria-(LEG) e no Espaço-UFF de Ciências. No entanto, para que se possam entender as relações entre o contexto escolar e os conhecimentos geométricos relatados a seguir, é necessário que, inicialmente, se considere o papel e a importância, neste início de século, das Geometrias não-Euclidianas na Geometria Escolar.

Tradicionalmente, os conhecimentos geométricos se restringiam aos saberes - relações lógicas e construções de traçados constitutivos de desenhos - advindos da geometria estabelecida na Grécia há cerca de 2700 anos e conhecida hoje como Geometria Euclidiana. Estes conhecimentos evoluíram, tanto em decorrência do surgimento de diversas concepções geométricas inovadoras, alternativas à Euclidiana: as Geometrias não-Euclidianas, quanto como conseqüência de reconsiderações conceituais surgidas ao longo do século XX, decorrentes dos novos conhecimentos advindos do desenvolvimento teórico da Matemática e da ciência da computação.

Nas duas últimas décadas, nos meios educacionais têm sido criadas oportunidades para a inclusão de conteúdos advindos das diversas Geometrias, Euclidiana e não-Euclidianas, aos conhecimentos geométricos escolares considerados como adequados à formação de alunos para o século XXI. Estes conteúdos têm sido objeto de discussão entre os membros de várias associações de profissionais da Matemática: matemáticos, professores, e educadores matemáticos, de vários países (Mammana e Villani, 1998). Os resultados e as conseqüências destas interações têm sido apresentados em documentos emitidos por grupos internacionais de pesquisa sobre currículos para a Geometria Escolar, bem como em documentos governamentais norteadores da prática educacional do professor de Matemática. É interessante que se observe como no Brasil, o documento referente ao Ensino Fundamental, os PCN-Matemática - 5ª a 8ª series (MEC, 1998), apresenta a Matemática a ser ensinada aos jovens adolescentes:

> *"[...] fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos*

de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Freqüentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico" (p. 24).

Frente a estas novas perspectivas educacionais, no âmbito de vários projetos realizados na UFF e destinados à melhoria do ensino e da aprendizagem da Geometria Escolar, buscaram-se desenvolver ações e materiais pedagógicos de forma a permitir a emergência de um acervo de instrumentos facilmente manipuláveis e de baixo custo, os quais objetivam dar ênfase ao desenvolvimento de habilidades introdutórias à aprendizagem de conceitos euclidianos e não-euclidianos.

Os procedimentos realizados nesta direção têm por fundamentação teórico-metodológica um tripé formado, por um lado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1998) e pelo Modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico (Kaleff et al, 1994). Segundo este modelo, a visualização, a análise e a organização informal das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico euclidiano são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito e estes precedem o nível formal que possibilita a introdução aos conhecimentos geométricos não-euclidianos.

Por outro lado, completando o tripé do embasamento teórico das atividades aqui consideradas, os procedimentos metodológicos adotados têm sido influenciados pelas pesquisas desenvolvidas por Kaleff (2004) sobre as representações matemáticas presentes em situações-problema introdutórias às Geometrias não-Euclidianas. Foi constatado que, até mesmo no âmbito da formação de professores de Matemática, apresenta-se uma ampla gama de procedimentos cognitivos, os quais podem vir a problematizar a implementação de novos conhecimentos geométricos na escola. Foi observada a existência de um extenso rol de prováveis obstáculos cognitivos, relacionados a representações semióticas, principalmente àquelas expressadas na forma de expressões euclidianas, tanto apresentadas na linguagem natural (por meio do emprego de expressões homônimas às euclidianas) como em desenhos, gráficos e diagramas (com características euclidianas), os quais se apresentam intervenientes em processos de resolução de problemas. Desta forma, a utilização de denominações e de representações gráficas, habitualmente empregadas para desenhar e nomear figuras euclidianas, aparentemente influencia negativamente a construção dos novos conhecimentos. Observou-se também que, apresentam-se tais influências e suas respectivas dificuldades, no caso do entendimento de um pequeno conjunto de regras, relacionadas a jogos e, até mesmo, em situações envolvendo problemas do cotidiano e alheios a qualquer menção à Geometria Euclidiana.

Cumpre enfatizar que, nos dois últimos anos letivos, no âmbito dos referidos projetos, se buscou estabelecer relações interdisciplinares relativamente a diversos tipos especiais de Geometrias não-Euclidianas, as quais têm se apresentado em livros didáticos destinados aos ensinos fundamental e médio. No que se segue, apresentam-se atividades relacionadas a uma adaptação de uma particular métrica, pertencente a uma família de espaços métricos criados pelo matemático Hermann Minkowski (1864-1909) e designada por *Taxicab Geometry* (Krause, 1975). Em língua portuguesa, tal métrica tem sido designada, por *Geometria do Motorista do Táxi,* ou *Pombalina,* ou ainda, *do Táxi* (Veloso, 1998; Jorge et al, 1999; Bigode, 2002). Cumpre ainda salientar que, os dois primeiros nomes são habitualmente empregados nas publicações destinadas às escolas portuguesas, as quais levam em conta razões históricas e voltadas para a ambientação regional dos materiais didáticos a um bairro de Lisboa. Este, cujo traçado remonta à administração do Marques de Pombal, daí a origem do nome desta particular Geometria, apresenta um conjunto de ruas dispostas na forma de uma malha quadriculada.

A Geometria do Táxi no âmbito da Escola

São vários os motivos que levam os educadores matemáticos a proporem o ensino da Geometria do Táxi nas escolas. Inicialmente, é importante mencionar que, conforme ressaltado nos PCN, o ensino da Matemática deve estar voltado à formação do cidadão, o qual, sabidamente, utiliza cada vez mais os conceitos matemáticos em sua rotina. Nesta direção, a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das "ruas". Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos.

A relação com o cotidiano que possibilita levar esta particular caracterização geométrica a integrar a Geometria Escolar, seria o fato de ser mais usada na geografia urbana do que a própria Geometria Euclidiana. Este fato decorre por se considerar a distância euclidiana entre dois pontos como sendo o comprimento do segmento de reta que os une, sendo, portanto, obtida com o auxilio do Teorema de Pitágoras. Enquanto que, na Geometria do Táxi, se calcula a distância entre dois pontos, por meio do cálculo da soma de dois valores numéricos absolutos, isto é, medindo-se o comprimento do menor caminho percorrido - em trechos horizontais e verticais, considerados segundo um determinado referencial - respeitados os limites físicos das construções, estabelecidos por meio de ruas, paralelas ou perpendiculares entre si.

Por outro lado, embora esta particular Geometria difira conceitualmente da Geometria Euclidiana, apenas pela definição de *distância*, este pequeno detalhe do ponto de vista da Matemática, no entanto, apresenta uma grande diferença, quando observado da perspectiva da Educação Matemática. No âmbito do ensino e da aprendizagem, as diversidades passíveis de observação, relativamente às formas de se registrar em desenhos os pontos que se apresentam nas figuras geométricas no novo contexto geométrico, podem ser ressaltadas e levadas a ser discutidas, até mesmo por jovens adolescentes.

Objetivos das Atividades

A experiência vivenciada nas aplicações realizadas na UFF tem mostrado que, tanto jovens, quanto adultos, se surpreendem com os desenhos de pontos relacionados aos conceitos da Geometria do Táxi, ao perceberem que, noções bem familiares, ligadas à de pontos de uma *circunferência* ou à de *mediatriz de um segmento*, podem apresentar mudanças em suas formas de representação gráfica.

As atividades aqui apresentadas potencializam levar o aluno a atingir os seguintes objetivos gerais:

- relacionar observações do mundo real com diversos tipos de se registrar graficamente representações, tais como: esquemas, tabelas, figuras e mapas. Relacionar tais representações com princípios e conceitos matemáticos;

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta;

- resolver situações-problema adotando estratégias, desenvolvendo formas de raciocínio e procedimentos matemáticos ligados à intuição, indução, analogia e estimativa de dados;

- interagir com os colegas de modo cooperativo, aprendendo a trabalhar em conjunto na busca de soluções.

As noções e conceitos matemáticos específicos a serem construídos ou inter-relacionados nas atividades são: a *representação de pontos em uma malha quadriculada*; os conceitos de *distância entre dois pontos,* de *distância de um ponto a uma reta* e de dois particulares lugares geométricos: *circunferência* e *mediatriz de um segmento* na *Geometria do Táxi*. Busca-se ainda levar o aluno a comparar alguns dos novos conceitos àqueles da Geometria Euclidiana, visando a criar condições que o levem a perceber características não-euclidianas desta nova e interessante Geometria.

Cumpre ainda salientar que, optou-se por uma apresentação detalhada dos procedimentos envolvidos nas atividades, por ter sido observado que muitos licenciandos, participantes dos projetos aqui considerados, não apresentam desenvoltura em relação à linguagem adequada ao diálogo com o aluno, principalmente em relação à sua escrita.

As Atividades

As atividades iniciais, Atividades l, 2, 3 e 4, com base no modelo de van Hiele, visam a desenvolver a habilidade da visualização geométrica, a qual permite ao aluno ter controle sobre um conjunto das operações mentais básicas, exigidas no trato das Geometrias. As atividades 5 e 6 objetivam levar o aluno a estabelecer, por meio de uma análise informal, propriedades, na nova Geometria, que serão utilizadas na caracterização do novo conceito de *distância*. Com a Atividade 7, encerra-se a primeira parte do conjunto de tarefas propostas, esta atividade, objetiva consolidar o conceito caracterizado e os procedimentos para o estabelecimento da *medida da distância* na Geometria do Táxi.

Por outro lado, a Atividade 7 é também introdutória à segunda parte do rol de tarefas, com a qual se busca introduzir a observação de situações que enfatizam as diferenças entre as duas geometrias, isto é, de situações que mostram, na nova Geometria, não ser válido um dos axiomas euclidianos: o de caso de congruência, o qual envolve, correspondentemente, em dois triângulos, um lado, um ângulo adjacente e o outro lado deste mesmo ângulo (a propriedade de congruência de triângulos habitualmente conhecida como LAL). Para tanto, a Atividade 11, é particularmente especial, pois com ela busca-se levar o aluno a perceber que a Geometria do Táxi é uma Geometria não-Euclidiana.

Cumpre enfatizar ainda que, a Atividade 7 é proposta na forma de um tipo de jogo de regras, o qual, devido à sua importância metodológica, deve receber uma atenção especial por parte do professor, para que os objetivos do mesmo sejam alcançados. A longa extensão desta atividade se deve ao intento de se contornar as grandes dificuldades constatadas, mesmo entre adultos, para o entendimento de regras de um jogo e dos procedimentos à realização de tarefas relacionadas às tais regras.

O nível de van Hiele da dedução informal é o que se pretende desenvolver com as Atividades 8, 9, 10 e 11, as quais possibilitam ao aluno a formar definições e estabelecer inter-relações das propriedades entre os conceitos construídos. A Atividade 12, objetiva colocar o aluno frente a dois desafios, os quais podem servir de veículo para a avaliação dos conteúdos apresentados.

Devido à exigüidade de espaço permitido no presente artigo, aqui não serão apresentadas atividades envolvendo o nível de van Hiele da *dedução formal*, no qual os alunos desenvolvem seqüências de afirmações, deduzindo uma afirmação a partir de outras.

No início de cada uma das atividades apresentam-se a descrição do tipo de atividade (se individual, ou em duplas de alunos), a faixa etária a qual se destina, os objetivos específicos a serem atingidos bem como os procedimentos envolvidos e, ainda, os pré-requisitos e o material concreto de apoio à realização das tarefas.

Sugere-se que, na sala de aula, o professor disponha os alunos distribuídos em grupos de quatro, para a realização de todo o rol de atividades.

As atividades iniciais requerem o uso de uma "maquete", a qual pode ser confeccionada em papel cartão, isopor ou madeira. Na Figura 1, encontra-se uma foto de um exemplo de tal tipo de artefato concreto. Alguns objetos aí apresentados, apesar de não serem diretamente intervenientes nas atividades, como aqueles indicados por "heliporto" e "linha do trem", facilitam ao professor a remissão de dúvidas que possam vir a surgir no decorrer da realização das tarefas propostas ao aluno.

Cumpre lembrar que a maquete deve ser confeccionada segundo o "mapa da maquete para o professor", o qual se encontra desenhado na Figura 2. As demais figuras, tais como o "mapa da maquete para o aluno" e a sua respectiva "malha", encontram-se apresentadas no decorrer das atividades, além de diversas "observações para o professor", específicas a uma dada tarefa. As atividades destinadas ao aluno são indicadas em letra do tipo *itálico.*

Figura 1 - Exemplo de Maquete

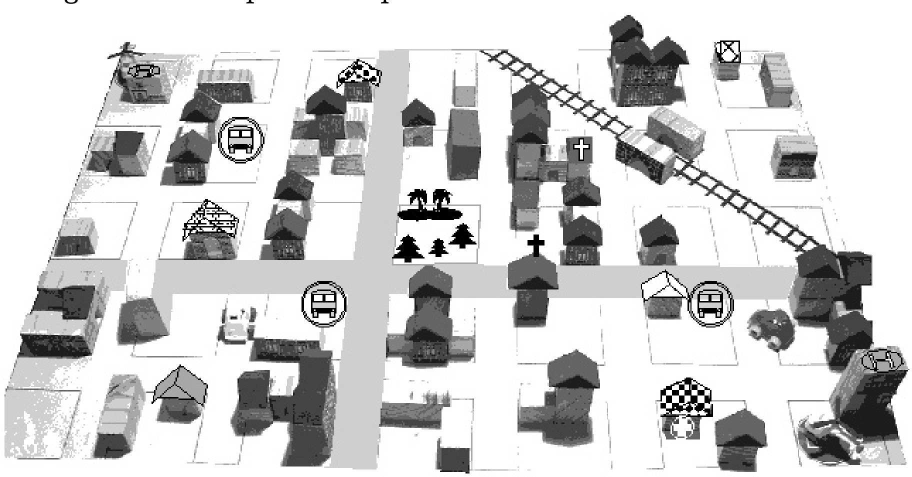


Figura 2 - Mapa da Maquete para o Professor

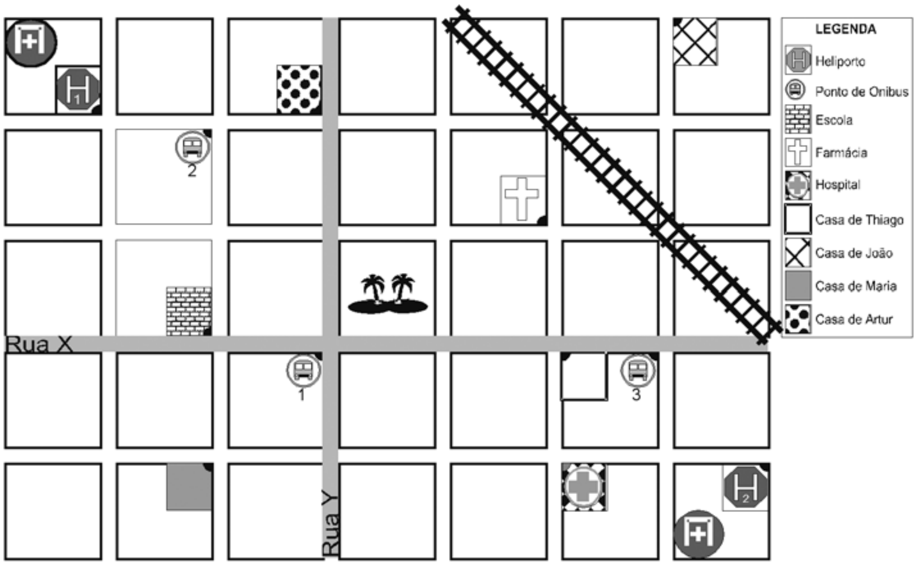
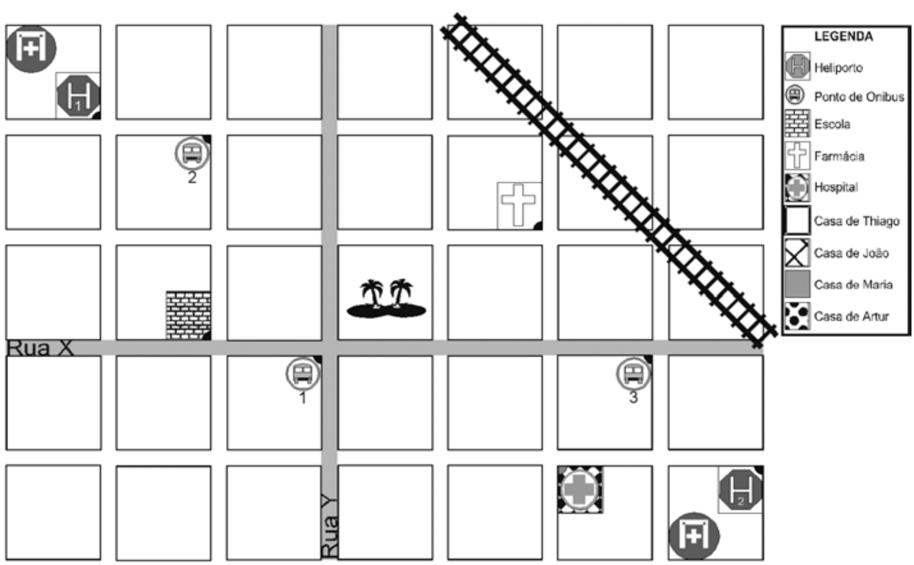


Figura 3 - Mapa da Maquete para o Aluno



Atividade 1

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de sete anos.

Objetivo: levar o aluno a perceber os diferentes caminhos que utiliza em seu cotidiano, a se orientar no espaço e a diferenciar as noções de "sentido" e de "direção relativamente a uma reta".

Material: folhas de papel sulfite, lápis preto e lápis de cor.

Procedimentos:

João gosta muito de ir à escola. Certo dia percebeu que havia uma nova uma loja de doces em uma rua próxima à sua casa, o que provocou uma mudança no caminho que fazia para a escola.

E você, já reparou no que encontra no caminho que você realiza de casa até a escola?

a) Pense em um caminho que você percorre de casa até a escola.

b) Desenhe em uma folha de papel as ruas, casas, as lojas do comércio etc, que se encontram no caminho que você faz.

c) Pense agora no caminho que você faz de volta, da escola até a sua casa.

d) Estes caminhos são iguais ou diferentes? Você passa pelas mesmas ruas?

e) E os seus colegas fazem caminhos iguais ou diferentes do seu?

Muitas vezes para se chegar a um certo lugar, podem-se utilizar caminhos diferentes. Podem-se percorrer caminhos mais curtos ou mais longos, dependendo da necessidade, ou da vontade, de quem os percorre. Veículos como ônibus e carros mostram claramente tais situações, já que existem ruas de mão única, onde estes só podem se movimentar em um, ou em outro sentido, isto é, só podem ir ou voltar, em uma determinada direção.

Atividade 2

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de nove anos.

Objetivo: levar o aluno a comparar distâncias e diferentes caminhos percorridos por ele e pelos veículos, em um determinado percurso.

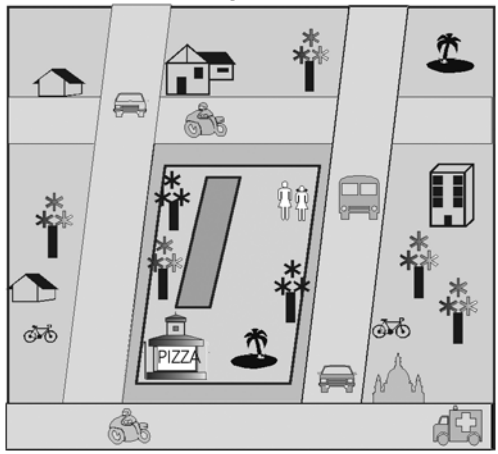
Material: lápis de cor e o esquema desenhado na Figura 4.

Observação para o professor: ainda que não se exija como pré-requisito para esta atividade as noções relativas à "medida de comprimento", espera-se que o aluno, por meio da percepção visual e com base na sua experiência cotidiana, estabeleça as relações pretendidas.

Procedimentos:

Maria e sua mãe acabaram de descer do ônibus da escola e estão realmente famintas. Logo que saltaram para a calçada, viram a pizzaria do outro lado da praça.

Figura 4



a) Observando a Figura 4, indique qual seria o caminho que elas percorreram para chegar mais rapidamente à pizzaria.

b) O ônibus poderia fazer o mesmo caminho que elas fizeram para chegar na pizzaria? Por que? Discuta com seus colegas.

c) Na Figura 4, pinte de vermelho o trajeto feito pôr Maria e de azul o trajeto feito pelo ônibus.

d) Os traços que você pintou se parecem? Você acha que os traçados dos dois trajetos têm as mesmas formas desenhadas?

e) Qual é o menor trajeto, o de Maria ou o do ônibus? Por que? Compare e discuta suas respostas com as dos seus colegas.

Saiba que em Matemática, chama-se **distância** à medida do comprimento do caminho que se percorre, indo de um lugar para outro.

Quando se percorre uma distância caminhando em linha reta, dá-se o nome de **distância euclidiana** à medida do comprimento do caminho percorrido. A distância euclidiana é muito trabalhada nas aulas e estudada na parte da Matemática chamada de **Geometria Euclidiana.** Também se pode representar o percurso percorrido em linha reta por meio de um traço reto, traçado com a ponta de um lápis, isto é, de **um segmento de reta.**

Você deve ter percebido que o ônibus não poderia fazer o mesmo caminho que Maria, pois os veículos só podem se movimentar pelas ruas. Esta forma do ônibus se mover é estudada em uma outra Geometria, que alguns professores de Matemática chamam de **Geometria do Táxi**, pois um táxi, também como outros veículos, só pode rodar pelas ruas e avenidas.

Atividade 3

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de nove anos.

Objetivo: relacionar uma maquete com um mapa que a represente.

Material de apoio: mapa de uma cidade ou de um bairro real; maquete; mapa da maquete para o aluno, como apresentado na Figura 3.

Observação para o professor: a presente atividade possibilita levar o aluno a perceber ligações interdisciplinares entre a Matemática e a Geografia. Para tanto, com o auxílio de um mapa de uma cidade, ou bairro, pode-se introduzir a noção do que seja um "mapa" e se destacar possíveis relações existentes entre aquilo que é representado e esta forma de se representar graficamente. Além dos aspectos interdisciplinares, é importante que o aluno perceba a existência de relações entre aquilo que se encontra grafado em um mapa e os objetos, ou localizações da realidade, nele referidos. Por outro lado, é necessário que o aprendiz se sinta motivado a compreender como estas relações se apresentam integradas ao seu cotidiano, e, portanto, sinta necessidade de compreendê-las.

Nas quatro atividades que se seguem, o aluno é confrontado com tais relações de representação, envolvidas entre uma maquete e um mapa que a representa. As relações necessárias ao entendimento da transformação da representação do espaço (3D) para aquela no plano (2D), isto é, da transformação da maquete para o mapa, assim como as relacionadas à transformação inversa, do mapa para a maquete (do 2D para o 3D) devem ter significado para o aluno.

O entendimento do significado dos conceitos matemáticos representados pelos diferentes objetos concretos arrolados nas atividades e sua conseqüente aprendizagem significativa, é o que se pretende. Para tanto, recorre-se a diversas estratégias de tratamento da informação, as quais possibilitam a organização dos dados obtidos e advindos do material concreto, buscando-se evitar que o aluno recorra ao recurso da simples memorização dos conceitos envolvidos nas atividades. Tais estratégias envolvem a utilização de diferentes recursos gráficos, como por exemplo, o de se substituir mapas pelo desenho de malhas quadriculadas; bem como de vários tipos de tabelas.

Procedimentos:

No seu mapa as casas de algumas pessoas são indicadas por várias legendas. Observando a maquete você perceberá que nela existem algumas casas com os telhados desenhados com tipos de traçado indicados na legenda do mapa da maquete. Isto é, observando a maquete você pode notar que, existem algumas casas que possuem o desenho dos telhados diferenciados: um apresenta listras; outros, diferentes tonalidades de cinza; um se parece com um "tabuleiro de damas" e em outro aparecem "tijolinhos". Observando a legenda do seu mapa, você perceberá que, ao lado do desenho correspondente a cada tipo de telhado, está escrito o nome da pessoa que mora em uma determinada casa ou o que a construção representa (escola, heliporto etc).

a) Você seria capaz de localizar, no seu mapa, onde mora cada uma destas pessoas?

b) No mapa, pinte o local da casa de cada pessoa de acordo com o desenho do telhado de sua casa. Por exemplo, note que a casa de João tem o telhado como uma malha quadriculada.

Você deve ter notado que todas as ruas que estão na maquete também estão desenhadas no mapa, assim como, algumas das casas da maquete possuem um desenho para elas no mapa. Isso ocorre por que o mapa é uma representação plana, isto é, em duas dimensões da maquete; os lugares, as ruas e os prédios estão desenhados neste mapa para que se possa orientar sem precisar da maquete.

Atividade 4

Tipo de Atividade: atividade para ser realizada em grupos de quatro alunos.

Faixa etária: cerca de nove anos.

Objetivo: comparar caminhos diferentes.

Material de apoio: lápis de cor; barbante; maquete e mapa da maquete para o aluno, apresentado na Figura 3.

Procedimentos:

Maria vai a uma festa na casa de João. Mas antes ela precisa passar na escola para pegar um CD que ela esqueceu na sala de música, pois cada convidado deve levar algum tipo de música para animar a festa.

a) Observe o mapa. Localize nele a casa de Maria, a de João e a escola.

b) Agora, olhe a maquete. Veja se você consegue, com o auxílio do barbante, marcar um caminho por onde Maria poderia passar. Trace-o no mapa com lápis de cor.

c) Você acha que existem outros caminhos? Discuta com seus colegas.

d) Tiago também vai à festa de João, mas antes ele precisa passar na farmácia de seu pai para pegar dinheiro. Depois deve passar na casa de Artur para irem juntos á casa de João.

e) Você seria capaz de marca na maquete, com o barbante, dois caminhos diferentes que Tiago poderia percorrer? Com cores diferentes, trace no mapa, os caminhos que você marcou na maquete.

f) Será que seus colegas traçaram os mesmos caminhos? Discuta com eles.

g) Agora, você seria capaz de traçar no mapa, com cores distintas, vários caminhos por onde Tiago poderia passar?

h) E Maria? Você seria capaz de fazer o mesmo, isto é, traçar, no mapa, vários caminhos para ela percorrer?

i) Você deve ter notado que existem vários caminhos para Tiago e Maria percorrerem. E você? Quando vem para escola pode passar por caminhos diferentes?

j) Muitas vezes quando você precisa ir a algum lugar, você percebe que existem vários caminhos que o levam ao lugar que você deseja ir. O que o faz escolher a um deles?

Atividade 5

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de onze anos.

Objetivo: representar um mapa por meio de uma malha quadriculada e favorecer a construção do conceito de distância.

Pré-requisito: noções básicas de medida de comprimento euclidiana e números inteiros relativos.

Material de apoio: malha do mapa da maquete, apresentada na Figura 5.

Procedimentos:

Uma folha a qual se apresenta cheia de quadradinhos desenhados é chamada de "malha quadriculada". Lembrando a você que um quadrado tem 4 lados iguais, considere que cada lado de um quadradinho valha **1 (uma) unidade de medida de comprimento.**

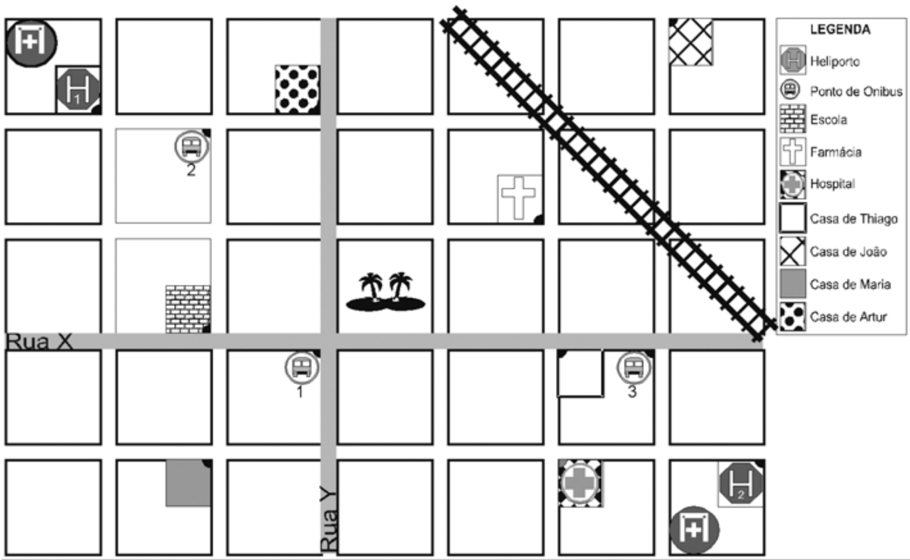
Na Figura 5 está desenhada malha quadriculada na qual está representada o mapa da maquete do bairro onde moram Maria, João, Tiago e Arthur. As linhas simbolizam ruas, os quadradinhos formados pelas linhas representam os quarteirões da cidade e os pontos negros a entrada de cada local (casa, escola etc).

Chama-se quadra cada lado de um quarteirão. Esta será considerada como **1(uma) unidade de medida de comprimento na Geometria do Táxi.**

Você já sabe que, para ir de um local a outro existem caminhos diferentes, porém alguns caminhos demoram mais do que outros, mesmo que você os percorra com a mesma velocidade, pois estes são mais longos.

Observe a malha quadriculada, apresentada e tente responder as questões que se apresentam mais a seguir.

Figura 5 - Malha do Mapa da Maquete para o Aluno



a) Se Maria quer ir à casa de Arthur, quantas quadras ela irá andar se pegar o caminho mais curto? Marque na malha com lápis azul o caminho de Maria. Compare seu desenho com o dos seus colegas.

b) Existem outros caminhos que Maria pode percorrer até a casa de Arthur do mesmo tamanho que o caminho azul?

c) Agora, João quer ir até à casa de Tiago, mais deve primeiro passar pela casa de Arthur. Quantas quadras João percorre até a casa de Tiago, tomando o caminho mais curto? Existem outros caminhos do mesmo tamanho?

d) Quantas quadras João percorre até o ponto de ônibus mais próximo? Discuta com seus colegas se há outros caminhos de mesmo comprimento.

e) Quantas quadras Arthur percorre do cruzamento mais perto da sua casa ao mais próximo da farmácia? Discuta com seus colegas se há outros caminhos de mesmo tamanho.

Tabela 1

Menor caminho entre os cruzamentos mais próximos da	Número de quadras
Casa de Maria e da de Arthur	
Casa de Maria e da de João	
Casa de João e da de Arthur	4
Casa de Tiago e da de Arthur	
Casa de Arthur e do Heliporto 1	
Casa de Maria e do Heliporto 2	
Casa de Arthur e da Escola	

f) Complete a Tabela 1 e observe que nela você estará indicando o menor caminho entre os cruzamentos mais próximos dos locais considerados.

g) Se escolher sempre o menor caminho entre dois lugares, quantos caminhos diferentes você pode fazer se esses lugares estiverem na mesma rua? Discuta com os seus colegas esta questão.

Você dever ter notado que, tanto Maria, quanto seus colegas, podem fazer caminhos diferentes, quando vão de um cruzamento perto de suas casas, para um outro cruzamento mais próximo ao local desejado. Alguns desses caminhos são mais curtos que outros, ou seja, Maria anda menos quadras. Note, porém, que pode existir mais de um caminho mais curto. No entanto, se a casa e o local estiverem localizados em uma mesma rua, o caminho mais curto é único.

Você já deve ter percebido que, o caminho que determina a distância percorrida por um táxi, é o que possui o menor número de quadras entre dois cruzamentos, esse tipo de distância isto é, a distância do táxi, a que se estuda na **Geometria do Táxi**.

Atividade 6

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de doze anos.

Objetivo: representar pontos da Geometria do Táxi, por meio de pares ordenados.

Pré-requisito: eixos orientados e números inteiros relativos.

Material de apoio: Tabela 2 e malha do mapa da maquete para o aluno, apresentada na Figura 5.

Procedimentos:

No bairro onde Maria e seus colegas moram todos conhecem as ruas X e Y. Elas são muito importantes, pois servem como referência para as pessoas localizarem outros lugares e além do que, na rua X se encontram a igreja, a escola e um lado da praça principal.

Na esquina da praça, no cruzamento destas ruas, há uma enorme placa na qual está desenhada uma malha de quadradinhos representando o mapa do bairro, como na Figura 5. Se você perguntar a alguém onde fica a farmácia, a pessoa apontará para a malha e responderá que "a farmácia fica a duas ruas à direita da rua Y a uma rua à frente da rua X". Ou seja, deixando o cruzamento às suas costas, para chegar ao cruzamento mais próximo à farmácia, você tem que andar uma quadra na rua Y e mais duas para a direita na rua transversal.

Se você perguntar onde fica o hospital, a pessoa lhe responderá que "ele fica a duas ruas à direita da rua Y a uma rua atrás da rua X". Ou seja, deixando o cruzamento às suas costas, terá que andar uma quadra na rua Y e mais duas para a esquerda na rua transversal a esta.

Observe bem a malha do mapa da maquete, pois as instruções que as pessoas fornecem nem sempre são muito claras. No entanto, você deve ter percebido que se pode encontrar qualquer lugar no bairro, tendo apenas o cruzamento das ruas X e Y como referência e os cruzamentos das outras ruas, sempre se levando em conta àqueles mais próximos aos locais desejados.

a) Agora, observando a malha da maquete, você é capaz de transformar as ruas X e Y em eixos orientados, com números negativos e positivos? Talvez você tenha alguma dificuldade para fazer esta ação, portanto, coragem! Tente continuar.

b) Na Tabela 2, estão indicados os locais, as orientações que as pessoas fornecem e as suas localizações na malha do mapa. Observando a tabela, você pode perceber que o cruzamento das ruas X e Y é representado por (0,0), o mais próximo à casa do Tiago pelo ponto (2,0), enquanto que o Heliporto 1 por (-2,2) e ao Hospital por (2,-1), isso devido às suas posições em relação às ruas X e Y. Discuta isso com seus colegas e tente explicar por quê.

c) Agora, utilizando a malha da maquete, tente preencher a Tabela 2, colocando as informações que estão faltando.

Tabela 2

Cruzamento mais próximo a(ao)	**Posição em relação à rua X**	**Posição em relação à rua Y**	**Valor X do ponto referente ao Cruzamento (abcissa)**	**Valor Y do ponto referente ao Cruzamento (ordenada)**	**Representação do Cruzamento com Pares Ordenados**
Cruzamento das ruas X e Y	Na rua X	Na rua Y	X = 0	Y = 0	(O) O = (0,0)
Ponto do Ônibus nº 1	Na rua X	Na rua Y	X = 0	Y = 0	(O) O = (0,0)
Casa do Arthur	2 ruas à frente	Na rua *Y*	X = 0	Y = 2	(A) A = (0,2)
Casa do Tiago	Na rua *X*	2 ruas à direita	X = 2	Y = 0	(B) B = (2,0)
Farmácia	1 rua à frente	2 ruas à direita	X = 2	Y =1	(J) J = (2,1)
Heliporto 1	2 ruas à frente	2 ruas à esquerda	X = -2	Y =2	(G) G = (-2,.2.)
Casa do João	3 ruas à frente	3 ruas à direita	X = ...	Y = ...	(E) E = (...,...)
Hospital	1 rua atrás	2 ruas à direita	X = 2	Y = -1	(D) D = (2,-1)
Casa da Maria	1 rua atrás	1 rua à esquerda	X = ...	Y = -1	(F) F = (-1, -1)
Heliporto 2	...	4 ruas à direita	X =4	Y = -1	(H) H = (...,...)
Ponto do Ônibus nº 3	Na rua *X*	...	X = ...	Y = ...	(I) I = (3, 0)
Escola	...	1 rua à esquerda	X =...	Y = 0	(K) K = (...,...)

Você deve ter notado que a representação do cruzamento mais próximo a um local qualquer pode ser feita por meio de um par de números chamado de **par ordenado**, o qual é formado por uma **abscissa** e por uma **ordenada**, os quais se apresentam entre parênteses, em uma determinada ordem.

Você também já deve ter observado que, para trabalhar com a Geometria do Táxi, terá de fazer um pequeno exercício de imaginação sobre a cidade considerada. Ou seja, é necessário você imaginar que as ruas da cidade são ruas retas e colocadas, paralelas, ou perpendicularmente umas às outras, como em uma malha de quadradinhos.

Observe que no mapa, o par ordenado de pontos tem este nome porque, por exemplo, o ponto B = (2,0), que representa o cruzamento mais perto da casa de Tiago, é diferente do ponto A = (0,2), que representa o cruzamento mais próximo à casa do Artur. Para tanto, são necessárias somente uma rua horizontal e uma vertical, as quais sirvam de referência para se localizar os cruzamentos.

Discuta com os seus colegas, a possibilidade de se tomar outras ruas como as principais. Neste caso, vocês acham que a representação dos cruzamentos iria mudar?

Observe que as ruas X e Y parecem funcionar como eixos numéricos orientando a localização dos cruzamentos.

Atividade 7

Tipo de Atividade: atividade para ser realizada por duplas de alunos.

Faixa etária: cerca de doze anos.

Objetivo: fazer com que os alunos se surpreendam com a forma apresentada pela circunferência na Geometria do Táxi e que isso os motive a discutir o que acontece com outras figuras e lugares geométricos.

Pré-requisito: noções de circunferência euclidiana e de distância na Geometria do Táxi.

Material de apoio: Malha e Tabela do Jogo, conjuntamente apresentadas na Figura 6.

Procedimentos:

Nesta atividade você e seu colega deverão ser parceiros em um jogo. Siga atentamente as indicações apresentadas a seguir sobre a preparação, as regras e as instruções de como jogar.

Jogo: Caça ao Tesouro**.**

Neste jogo você e seu parceiro são caçadores de um tesouro, que ora você, ora seu parceiro, deve esconder, enquanto o outro, tenta encontrar.

O tesouro sempre deverá ser escondido a uma distância dada de um ponto de partida escolhido conforme será indicado a seguir.

Para tanto, façam uso da malha quadriculada e de uma tabela para cada jogador. Além disso, considerem que a distância entre dois cruzamentos consecutivos na malha é de **um passo**. Por exemplo, de A3 para A4, tem-se um passo; da mesma forma, de C1 para D2, tem-se dois passos.

Figura 6 - Malha do jogo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																

Tabela do jogo

Avaliação	Cruzamento

Preparação do Jogo:

De comum acordo com o seu parceiro, escolha um dos cruzamentos da malha como ponto de partida para esconder o tesouro (preferencialmente um ponto no centro da malha). Marquem este ponto com uma pequena letra "O". Além disso, escolham quem começa o jogo escondendo o tesouro.

Regras do Jogo:

R$_{1:}$ Quem esconde o tesouro, deve escolher para esconderijo um dos cruzamentos da malha, respeitando a distância estabelecida, isto é, por um número de passos a partir do ponto de partida (conforme indicado nas instruções abaixo, para dois, três, e quatro passos). A seguir, o ponto do cruzamento deve ser anotado na coluna **Cruzamento** de sua tabela, sem que o parceiro veja tal anotação. A coluna **Avaliação** deverá ser preenchida com a letra X.

R$_2$**:** Quem procura o tesouro deve tentar adivinhar o cruzamento escolhido por quem esconde e anotar esta tentativa em sua própria tabela na coluna **Cruzamento**. Em seguida, quem escondeu deverá informar onde o tesouro estava escondido. Caso tenha acertado, quem procura deverá anotar na coluna **Avaliação**, a letra "C" (ou a letra "E", caso tenha "errado"). Esta ação deverá ser fiscalizada por quem escondeu.

R_3: Esconderijos ou tentativas de encontrar o tesouro (mesmo as erradas) utilizadas anteriormente não poderão ser re-utilizados;

R_4: O jogo termina quando se esgotarem as possibilidades de escolha de um esconderijo;

R_5: A jogada na qual a escolha de esconderijo ou a tentativa de encontrá-lo não respeitarem a distância estabelecida deve ser repetida. Se o erro for de quem procura, quem esconde não precisa revelar o esconderijo, bastando avisar que a tentativa não obedeceu à distância do jogo.

Instruções:

a) Inicialmente utilizem os cruzamentos da malha distantes 2 passos do ponto de partida como possíveis locais para esconderijo do tesouro.

b) Terminado o jogo, marquem sobre a malha quadriculada, com um pequeno número 2 os cruzamentos que serviram de esconderijos e tentativas a partir das duas tabelas (sua e de seu parceiro).

c) Repitam o jogo utilizando cruzamentos da malha distantes 3 passos do ponto de partida e marquem, sobre a mesma malha quadriculada, com um pequeno número 3, os cruzamentos que serviram de esconderijos e tentativas.

d) Vocês devem ter encontrado oito cruzamentos marcados com o número 2 e doze cruzamentos marcados com o número 3. Agora, unam os cruzamentos consecutivos, marcados com o numero 3 que pareçam estar sobre uma mesma linha reta. Repitam para os cruzamentos marcados com o número 2. Observem com atenção os desenhos que se formaram. Vocês já viram estas figuras antes? Vocês sabem o nome delas? (Não se esqueçam que estão trabalhando com a Geometria do Táxi).

e) Agora, sem jogar o jogo, vocês seriam capazes, só olhando para as figuras obtidas nos jogos anteriores, com 2 e 3 passos, marcar os cruzamentos que seriam obtidos se vocês jogassem o jogo com 4 passos? Se a resposta for SIM (coragem!) marquem estes cruzamentos com um pequeno número 4. Vocês deverão encontrar dezesseis cruzamentos.

f) Voltem a observar os pontos de cada uma das três figuras marcados na malha. Eles têm alguma característica em comum? Se isso acontecer, tentem descrever a característica que os pontos de cada figura possuem.

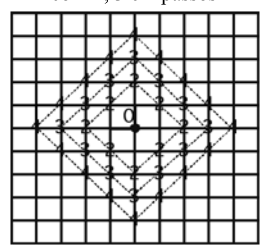
g) Vocês conhecem alguma figura geométrica (da Geometria que aprenderam na escola) cujos pontos possuem esta mesma característica? Ou seja, vocês conhecem alguma figura em que todos os pontos estão a uma mesma distância de um outro ponto dado?

h) Na Geometria que se estuda com mais freqüência na escola, isto é, na Geometria Euclidiana, existe uma figura denominada "circunferência euclidiana", ou brevemente "circunferência". Tentem explicar o que é uma "circunferência euclidiana".

i) Comparem os desenhos das figuras encontradas no item (d) com o de uma "circunferência euclidiana". Eles possuem a mesma forma de traçado? Vocês acham que estas figuras possuem algo em comum?

j) De acordo com as suas respostas, a que conclusões vocês pode chegar? Veja se seus colegas encontraram as mesmas respostas e as mesmas conclusões.

Figura 7
Respostas do Jogo
com 2, 3 e 4 passos



Vocês devem ter encontrado desenhos como os representados na Figura 7.

Vocês devem ter percebido que ao jogar e marcar os possíveis lugares para o tesouro, os pontos marcados estão sobre um quadrado e a uma mesma distância do ponto escolhido. Você deve ter notado também que os pontos, apesar de estarem sobre um quadrado, possuem a mesma propriedade que caracteriza a circunferência euclidiana: estão a uma mesma distância de um ponto determinado. Por esta razão, diz-se em Matemática que as figuras obtidas, ao se unir os pontos encontrados no jogo, também são **circunferências**, porém, não são circunferências euclidianas, mas sim, **circunferências do táxi.**

A Geometria do Táxi é um pouco diferente daquela que se costuma aprender na escola, mas você deve ter notado que ela é muito usada na nossa vida.

Você seria capaz de descobrir outras diferenças entre a Geometria que é estudada na escola, a qual, como você já sabe, tem o nome de Geometria Euclidiana, e a Geometria do Táxi? Para tanto, realize as próximas atividades.

Atividade 8

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de quinze anos

Objetivo: construção da fórmula que permite o cálculo da distância entre dois pontos na Geometria do Táxi.

Pré-requisito: noções preliminares relativas à Distância do Táxi, desenvolvidas anteriormente.

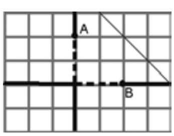
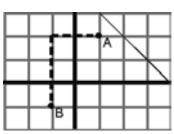
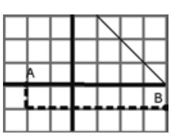
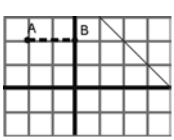
Material de apoio: Tabela 3.

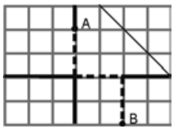
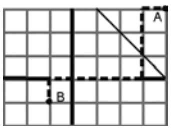
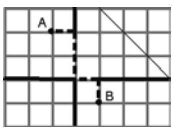
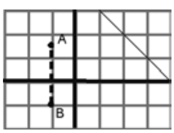
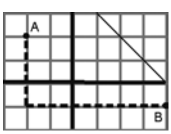
Procedimentos:

A Tabela 3 apresenta, na primeira coluna, mais à esquerda, uma malha quadriculada referente ao mapa que representa a maquete. Nela estão desenhadas as duas ruas principais (indicadas por duas linhas grossas), dois pontos (A e B), a linha férrea (indicada por uma linha fina inclinada) e o caminho percorrido por uma pessoa que vai de um dos cruzamentos e chega a outro (indicado por uma linha tracejada). Nas atividades anteriores, você deve ter aprendido a representar os cruzamentos por meio de um par de números,relacionados a dois eixos numéricos orientados e a como medir a distância do táxi entre tais cruzamentos.

Com estes conhecimentos e com a ajuda de alguns valores que já estão marcados na Tabela 3, tente completá-la, acrescentando os dados que estão faltando.

Tabela 3

Representação Gráfica na Geometria do Táxi	X_A	Y_A	X_B	Y_B	**Distância entre Abcissas** $/X_A - X_B/$	**Distância entre Ordenadas** $/Y_A - Y_B/$	**Distância do Táxi entre A e B** ***(d_T (A,B))***
	0	2	2	0	$/X_A - X_B/$ = = /0-2/ = /-2/ = 2	$/Y_A - Y_B/$ = = /0-2/ = /-2/ = 2	d_T (A,B) = = $/X_A - X_B/+/Y_A - Y_B/$ = = 2+2 = 4
	1	2	-1	-1	$/X_A - X_B/$ = = /1- (-1)/ = /2/=2	$/Y_A - Y_B/$ = = /2- (-1)/ = /3/ =3	d_T (A,B) = = $/X_A - X_B/+/Y_A - Y_B/$ = = 2+3 = 5
	...	-1	4	-1	$/X_A - X_B/$ = = / ... -4/ = /-6/ =...	$/Y_A - Y_B/$ = = /0 - (-1)/ = /1/ =...	d_T (A,B) = = $/X_A - X_B/+/Y_A - Y_B/$ = = 6+1 = 7
	-2	...	0	2	$/X_A - X_B/$ = = /... - ... / = /-2/ = = 2	$/Y_A - Y_B/$ = = /2- ... / = / ... / = = 0	d_T (A,B) = = $/X_A - X_B/+/Y_A - Y_B/$ = = 2+0 = 2

Representação Gráfica na Geometria do Táxi	X_A	Y_A	X_B	Y_B	**Distância entre Abcissas** $/X_A - X_B/$	**Distância entre Ordenadas** $/Y_A - Y_B/$	**Distância do Táxi entre A e B** $(d_T\ (A,B))$
	0	2	2	...	$/X_A - X_B/ =$ $= /0-2/ = /.../ = 2$	$/Y_A - Y_B/ =$ $= / ... - ... / = /4/ = 4$	$d_T (A,B) =$ $= /X_A - X_B/ + /Y_A - Y_B/ =$ $= ... + 4 = ...$
	4	3	...	...	$/X_A - X_B/ =$ $= /4-(-1)/ =$ $= / ... / = 5$	$/Y_A - Y_B/ =$ $= /3-(-1)/ = /4/ = 4$	$d_T (A,B) =$ $= /X_A - X_B/ + /Y_A - Y_B/ =$ $= ... + ... = ...$
	...	2	...	-1	$/X_A - X_B/ =$ $= / ... - ... / =$ $= / ... / = 2$	$/Y_A - Y_B/ =$ $= /2-(-1)/ =$ $= / ... / = ...$	$d_T (A,B) =$ $= /X_A - X_B/ + /Y_A - Y_B/ =$ $= ... + ... = 5$
	-1	...	-1	...	$/X_A - X_B/ =$ $/-1-(-1)\ = /0/ = 0$	$/Y_A - Y_B/ =$ $= /... - ... / =$ $= / ... / = ...$	$d_T (A,B) =$ $= /X_A - X_B/ + /Y_A - Y_B/ =$ $= 0 + ... = ...$
	...	...	...	...	$/X_A - X_B/ =$ $= / ... - ... / =$ $= / ... / = ...$	$/Y_A - Y_B/ =$ $= / ... - ... / =$ $= / ... / = ...$	$d_T (A,B) =$ $= /X_A - X_B/ + /Y_A - Y_B/ =$ $= ... + ... = ...$

Você deve ter observado que a medida da distancia do táxi entre dois pontos A e B, pode ser obtida pela fórmula

$d_T (A,B) = /X_A - X_B/ + /Y_A - Y_B/$

ATIVIDADE 9

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de quinze anos.

Objetivo da atividade: descobrir a distância de um ponto a uma reta na Geometria do Táxi.

Pré-requisitos: distância euclidiana de um ponto a uma reta e circunferência do táxi.

Material utilizado: uma malha quadriculada, com o desenho de um ponto e três retas, como apresentada na Figura 8.

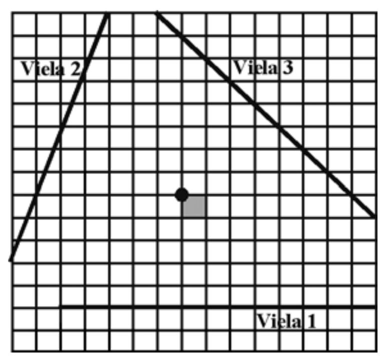
Procedimentos:

José é um vendedor de cocos que vende o seu produto pelo preço de um real.

No início José tinha pouco dinheiro para investir nos seus negócios e vendia os cocos em sua residência. Agora, porém, as vendas estão indo muito bem e José tem a oportunidade de ampliar o seu negócio montando três barracas para vender seus cocos, colocando uma barraca em cada uma das vielas destinadas ao comércio de vendedores ambulantes do seu bairro. Estas pequenas ruas foram construídas como locais para as pessoas venderem seus produtos, e não é permitida a passagem de carros.

Na Figura 8, está representada a situação destas vielas no bairro onde José vive. Neste desenho, o quadrado cinza representa a localização da casa de José, o ponto preto indica a sua porta e as linhas pretas, as vielas dos vendedores.

Figura 8



a) Será que você pode ajudar José a encontrar o lugar, isto é, o ponto da Viela 1, mais perto de sua casa? Descreva o que você fez para resolver a questão anterior.

b) Compare o seu resultado com o dos seus colegas. O que você pode concluir?

c) Se fosse na Geometria Euclidiana, o que você faria para encontrar o ponto de venda para José? E na Geometria do Táxi, o que deve ocorrer?

d) Agora, você pode ajudar José a encontrar o ponto da Viela 2, mais próximo de sua casa. Descreva o que você fez para resolver esta questão.

e) Compare seu resultado com o dos seus colegas. O que você pode concluir?

f) Se fosse na Geometria Euclidiana, o que você faria para encontrar este segundo ponto de venda para José?

g) E se fosse na Geometria do Táxi, o que deveria ocorrer? Se você tiver dificuldade, sugere-se que imagine a porta da casa de José como o centro de uma circunferência da Geometria do Táxi e tente ir aumentando-a, até tocar algum ponto na Viela 2.

h) Agora, será que você pode ajudar José a encontrar o lugar mais cômodo para ele instalar a sua barraca na Viela 3?

i) Compare seu resultado com o dos seus colegas. O que você pode concluir?

j) Ocorreu alguma coisa diferente neste caso? Verifique as respostas de seus colegas e compare com a sua.

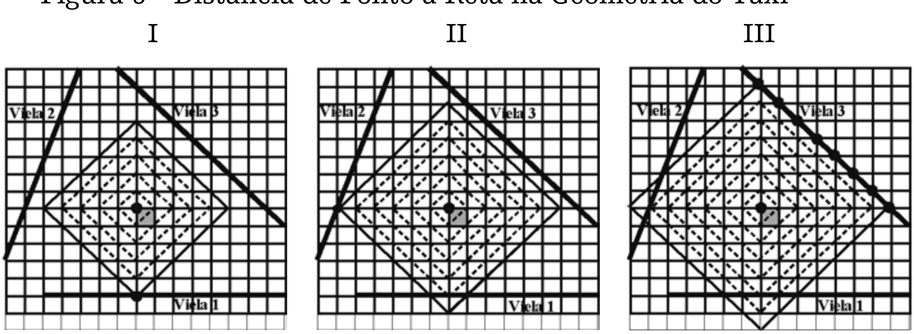
k) O que você percebeu? Discuta com seus colegas.

Você deve ter percebido que a distância de um ponto a uma reta na Geometria do Táxi é encontrada, com mais facilidade, com o auxílio do conceito de circunferência desta Geometria. Também pode ter observado que esta distância difere da euclidiana quando a reta estiver inclinada e, ainda que, se a reta fizer um ângulo de 45º com as ruas, a menor distância entre o ponto e esta reta não é única.

Observação para o professor: Nesta atividade, foi utilizado o conceito de **reta (segmento) de 45°**, isto é, **uma reta (segmento) é dita de 45° na Geometria do Táxi**, quando a mesma faz um ângulo de 45° com as retas horizontais e verticais da malha quadriculada.

Os esquemas exibidos na Figura 9 mostram representações da sugestão dada ao aluno no item (g), de se desenhar circunferências de centro no ponto referente à porta da casa de José, partindo-se da com raio unitário e aumentando-o até que a mesma apenas toque a viela na qual se quer chegar, isto é, seja tangente à reta representante da viela. O esquema 9-I apresenta como se deve proceder para encontrar a menor distância entre a casa de José e a Viela 1. Os esquemas 9-II e 9-III são desenhados de maneira análoga, sendo que neste último, a circunferência não apenas toca a Viela 3, porém possui um lado inteiro sobre a Viela 3. Sendo assim, o ponto da Viela 3, mais próximo da casa de José, não é único.

Figura 9 - Distância de Ponto à Reta na Geometria do Táxi



ATIVIDADE 10

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de quinze anos.

Objetivo: levar o aluno a perceber que a mediatriz de um segmento na Geometria do Táxi possui diferentes formas, conforme a posição do segmento na malha quadriculada.

Pré-requisito: conhecimento de mediatriz euclidiana de um segmento e de distância na Geometria do Táxi.

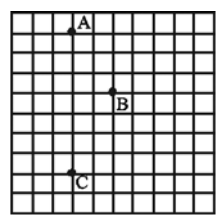
Material de apoio: rede quadriculada com três pontos marcados, como apresentado na Figura 10.

Procedimentos:

Você deve estar lembrado de que a mediatriz de um segmento Euclidiano é um conjunto de pontos eqüidistantes a dois pontos fixos dados. Além disso, na Geometria Euclidiana os pontos da mediatriz estão dispostos de maneira a formar uma linha reta. Agora, observe a Figura 10.

a) Encontre e trace a mediatriz euclidiana entre os pares de pontos A e B, A e C, e B e C.

Figura 10



b) Como você imagina que seja a mediatriz de cada um destes mesmos pares de pontos na Geometria do Táxi? Será que cada uma destas novas mediatrizes coincide com a euclidiana? Você é capaz de encontrar essas mediatrizes na Geometria do Táxi?

c) Você poderia dizer se a localização dos pontos na malha influi na forma em que se apresenta o desenho da nova mediatriz? O que você pode concluir? Discuta com seus colegas.

Você deve ter notado que a forma de uma nova mediatriz se apresentar em um desenho, na Geometria do Táxi, depende da posição dos pontos em relação à malha quadriculada, pois, algumas vezes ela coincide com a mediatriz euclidiana, e em outras, ela é bem diferente.

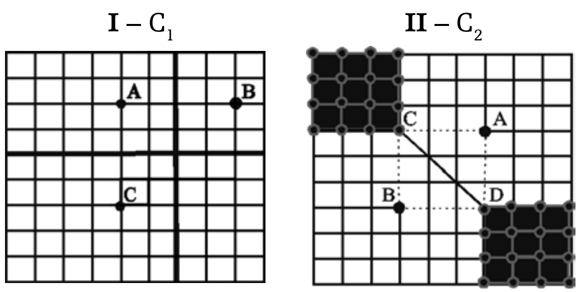
Observação para o professor: Observe que, o traçado da mediatriz de um segmento na Geometria do Táxi deve ser dividido em três casos relativos à orientação dos segmentos na malha.

C_1: Segmentos verticais ou horizontais: A mediatriz de segmentos verticais ou horizontais na Geometria do Táxi coincide com a mediatriz euclidiana. Para traçá-la, basta encontrar o ponto médio do segmento e traçar, por ele, uma perpendicular ao segmento. Observe o esquema I na Figura 11.

C_2**:** <u>Segmentos de 45°</u>: Para traçar a mediatriz de um segmento de 45°, deve-se primeiramente traçar um quadrado ABCD, com o segmento AB como uma das diagonais. A seguir, traça-se a outra diagonal CD. A qual é parte da mediatriz procurada. Os demais pontos desta são encontrados da seguinte forma: partindo-se de C ou de D, marcam-se os pontos que eqüidistam de A e B, isto é, que estejam a uma mesma distância destes. Observe, que estes não estão somente sobre um segmento, mas estão também em duas regiões da malha. Observe o esquema 11-II.

C_3**:** <u>Segmentos posicionados em outras direções</u>: Para traçar a mediatriz de um segmento posicionado em uma outra direção, deve-se primeiramente traçar um retângulo ABCD, que tenha o segmento AB por diagonal. Sobre dois lados deste retângulo, marcam-se dois pontos E e F, os quais eqüidistam de A e de B. O segmento EF é parte da mediatriz procurada. Daí, analogamente ao caso anterior, partindo-se de E ou de F, marcam-se os pontos que eqüidistam destes, isto é, estejam a uma mesma distância de A e de B. Observe, que os pontos da mediatriz não estão somente sobre um segmento, mas estão sobre uma poligonal, como apresentado no esquema 11-III.

Figura 11 - Mediatrizes de um Segmento na Geometria do Táxi



ATIVIDADE 11

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de quinze anos.

Objetivo: levar o aluno a perceber que a Geometria do Táxi é uma Geometria não-Euclidiana.

Pré-requisitos: conhecimento dos casos de congruência de triângulos na Geometria Euclidiana.

Material utilizado: rede quadriculada fornecida pelo professor na qual estão desenhados dois triângulos retângulos isósceles, como apresentados na Figura 12.

Procedimentos:

A Geometria Euclidiana, assim como toda outra Geometria, é formada e, portanto, determinada por um grupo de afirmações consideradas como verdadeiras e denominadas de **axiomas.**

Em Matemática, para que uma Geometria seja chamada de **não-Euclidiana** é preciso que em seu conjunto de axiomas, pelo menos um dos axiomas da Geometria Euclidiana não seja verdadeiro. A seguir, se apresenta um exemplo de um tipo de tal situação.

Observe os triângulos ABC e DEF desenhados na malha representada na Figura 12.

a) Você saberia explicar ao seu colega o que são triângulos congruentes na Geometria Euclidiana?

b) Preencha a Tabela 4 na qual d_E indica a "distância euclidiana" e d_T, a "distância do táxi" entre os pontos indicados. Verifique também, qual é a medida dos ângulos A e D.

Figura 12

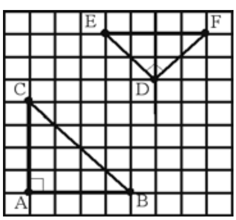


Tabela 4

Segmentos	Distância Euclidiana	Distância do Táxi
AB	d_E(A,B)=	d_T (A,B)=
BC	d_E (B,C)=	d_T (B,C)=
AC	d_E (A,C)=	d_T (A,C)=
DE	d_E(D,E)=	d_T (D,E)=
EF	d_E (E,F)=	d_T (E,F)=
DF	d_E (D,F)=	d_T (D,F)=

c) Você deve estar lembrado de que um axioma da Geometria Euclidiana relativamente à congruência de triângulos afirma que "Se dois triângulos ABC e DEF têm lado, ângulo e lado consecutivos respectivamente congruentes, então estes dois triângulos são congruentes". Observando a Tabela, você saberia dizer se na Geometria do Táxi esse axioma continua válido? Por quê?

d) Agora que você já pensou a respeito, veja o que seus colegas concluíram e discutam seus resultados.

Repare que de acordo com a Geometria Euclidiana os triângulos ABC e DEF são triângulos congruentes, pois satisfazem às condições do axioma de congruência considerado, contudo você pode ver que, na Geometria do Táxi, estes triângulos não são exatamente iguais, não são congruentes, pois ABC é uma figura maior do que a do DEF.

Você deve ter notado, portanto que nesta nova Geometria um dos axiomas da Geometria Euclidiana não é verdadeiro, pois mesmo que dois triângulos tenham um lado, um ângulo e um lado, consecutivos respectivamente de mesma medida, isso não é suficiente para que as figuras tenham a mesma forma e o mesmo tamanho, ou seja, sejam congruentes. Saiba que, esta falha em um dos axiomas é suficiente para que a Geometria do Táxi seja considerada como uma Geometria não-Euclidiana.

Atividade 12

Tipo de Atividade: atividade individual

Faixa etária: cerca de quinze anos.

Objetivo: avaliar alguns dos conhecimentos adquiridos.

Material utilizado: malha quadriculada na qual estão desenhados dois eixos orientados.

Procedimentos:

Nas atividades anteriores, você observou como a Geometria do Táxi está presente no cotidiano de um bairro cujo traçado das ruas é bem peculiar, pois segue uma malha quadriculada. A seguir se encontram duas questões desafiadoras que relacionam essa nova Geometria com mais duas situações da vida em tal localidade.

Desafio 1

O Departamento de Polícia do bairro recebe duas chamadas: a primeira relata um acidente, no ponto A = (-4, 2) e a segunda, acusa um assalto em um Banco em B = (2,2). Há dois carros da polícia nas redondezas, o carro 1 está em C_1 = (-1,-1) e o carro 2, em C_2 = (1,0). Diga qual carro seria mais conveniente mandar para solucionar cada situação, sabendo da extrema urgência de cada uma.

D**esafio 2**

Uma firma do ramo de construção está à procura do melhor local para construir um prédio de apartamentos. A condição imposta para a localização desse edifício é de que ele esteja a uma distância de três quadras da escola localizada em E = (1,3) e a uma distância de quatro quadras do centro comercial, em C = (0, -1). Aonde a construtora deverá construir este prédio?

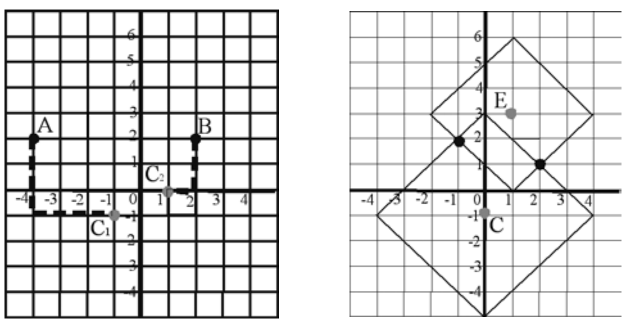
Observação para o professor: na Figura 13 encontram-se duas soluções gráficas para os desafios.

Como pode ser percebido, pelo esquema 13-I, o local do acidente referido no Desafio 1, deverá ser atingido pelos policiais do carro C_1 , pois este se encontra a 5 quadras de distância, enquanto que C_2 está a 7 quadras. O banco, por sua vez, está a 3 quadras de C_2 e a 6 quadras de C_1.

Para solucionar o Desafio 2 é necessário se buscar os pontos comuns a duas circunferências do táxi, com 3 e 4 quadras de raio e centradas, respectivamente, em E e em C. Observe o esquema 13-II.

Figura 13 - Respostas aos desafios

I - desafio1 desafio 2



Observações Finais

Cumpre assinalar que, embora se tenha utilizado uma malha quadriculada como base para as atividades apresentadas, isto não significa que na Geometria do Táxi os pontos devem ter necessariamente coordenadas inteiras. Este recurso foi utilizado com vistas a se simplificar a medição da nova distância, tornando-a acessível a alunos sem conhecimento das noções de plano cartesiano envolvendo os números reais.

Para um aprofundamento dos conceitos relacionados à Geometria do Táxi no âmbito dos números reais, sugere-se a leitura de Martin (1975).

Acredita-se que a apresentação destas atividades possa servir de incentivo ao professor à redação de tarefas pedagógicas que estimulem a criatividade do aluno, bem como à criação de situações e de materiais concretos que permitam uma incursão aos conceitos introdutórios de outras Geometrias.

Referências Bibliográficas

BIGODE, Antonio J. Lopes *Matemática hoje é feita assim - 8ª Série.* Rio de Janeiro: FTD. 2002.

JORGE, Ana M. B., ALVES, Celso. B., FONSECA, Guilherme *Infinito 12: Volume 1*. Porto: Areal Editores, 1999.

KALEFF, Ana Maria M. R. *Da rigidez do olhar euclidiano às (im)possilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de Matemática.* 2004. 450 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense. Niterói. 2004.

KALEFF, Ana Maria M. R, HENRIQUES, Almir; REI, Dulce M.; FIGUEIREDO, Luiz G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. *Bolema.* Rio Claro, v.10, 1994, p.21-30.

KRAUSE, Eugene *Taxicab Geometry: an adventure in non-Euclidean Geometry*. Nova York: Dover, 1975.

MAMMANA, Camelo; VILLANI, Vinicius *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century.* Dordrecht: Kluwer, 1998.

MARTIN, George E. *The Foundations of Geometry and the non-Euclidean Plane*. Berlin: Springer Verlag, 1975.

MEC - *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática - 5ª- 8ª Series*. Brasília. 1998.

VELOSO, Eduardo *Geometria: Temas Atuais - Materiais para Professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Cultural, 1998.