# Sobre o Poder de Algumas Palavras e Imagens Quando se Busca Avançar Além das Noções Euclidianas mais Comuns

**Ana Maria M. R. Kaleff**
Departamento de Geometria
Universidade Federal Fluminense
ggmleg@vm.uff.br

**Resumo /** Apresenta-se uma reflexão sobre o poder de algumas palavras e imagens, de afetar o pensamento de professores de Matemática quando instados a evoluir além das noções euclidianas mais comuns. Esta reflexão extrapola o âmbito da Matemática, alcançando as políticas educacionais orientadoras da formação do professor. Apresentam-se duas diferentes concepções de práticas pedagógicas, a vigente na licenciatura e a proposta para a escola, e abordam-se suas conseqüências para o ensino das Geometrias. Apresentam-se observações sobre o papel das imagens, visuais e mentais, e da utilização de diferentes linguagens para representar conceitos matemáticos. Traçam-se linhas gerais de ação para o enfrentamento do desafio apresentado pela gama de dificuldades relacionadas às representações semióticas frente aos novos conhecimentos geométricos.

**Palavras-Chave /** Formação de Professores de Matemática; Práticas Pedagógicas; Geometria não-Euclidiana; Representações Semióticas.

# On the Power of Some Words and Imagens when Reaching the More Common Euclidean Notions

**Abstract /** A reflection is presented regarding the power of certain words and images over the thought processes of Mathematics teachers when directed to evolve beyond the more common euclidean notions. It leaves the strict realm of Mathematics and reaches towards the educational policies directed towards undergraduate Mathematics teachers. Two diverse conceptions of pedagogical practices are presented; one common to undergraduate education and another directed at School practice. Their implications with regard to teaching the Geometries are considered. The role of visual and mental images and the effect of using diverse languages to represent mathematical concepts are remarked an analyzed. Guidelines are suggested to comply with the challenge posed by the broad band of difficulties generated by the novel geometric contents and their semiotic representations.

**Key Words /** Mathematics Teachers Education; Pedagogical Practices; Non-Euclidean Geometry; Semiotic Representations.

## Introdução

O objetivo da presente contribuição é apresentar uma reflexão sobre o poder que algumas palavras e imagens possuem, de afetar o pensamento de licenciados e professores de Matemática, quando instados a evoluir além das noções euclidianas mais comuns.

Esta reflexão não se restringe ao âmbito do conhecimento matemático, mas envolve implicações da interação entre as políticas educacionais que orientam a ação docente e a orientação pedagógica subjacente às práticas vigentes na formação do professor de Matemática. Para tanto, serão, de início, apresentadas duas concepções de práticas pedagógicas, uma, a que habitualmente se apresenta nos cursos de licenciatura e outra, a proposta governamental para a orientação da ação do professor no Ensino Fundamental e Médio.

A seguir serão consideradas as implicações de cada uma destas práticas frente ao ensino das Geometrias: a Euclidiana e as não-Euclidianas. Por outro lado, será abordada a importância das imagens do ponto de vista dos avanços da Psicologia e da Matemática, analisando-se o poder das imagens visuais e mentais na construção dos conceitos matemáticos. Alguns modelos de Geometrias não-Euclidianas serão apresentados para efeito de ilustração.

Com o objetivo de contemplar o ponto de vista da Semiose e da Psicologia Cognitiva será apresentada uma súmula dos resultados de uma pesquisa realizada pela autora sobre a aquisição de conceitos geométricos no âmbito da formação de professores de Matemática, no momento da transição entre os conhecimentos euclidianos e os conhecimentos não-euclidianos.

Finalmente, serão traçadas linhas gerais de atuação para o enfrentamento do grande desafio àqueles que se preocupam com este momento da licenciatura, qual seja, o da existência de uma extensa gama de dificuldades, relacionadas a diferentes linguagens, que ocorrem na construção dos conhecimentos geométricos avançados.

## A Prática Pedagógica Presente na Formação do Professor de Matemática Frente Àquelas Orientadoras dos Ensinos Fundamental e Médio

Do ponto de vista da História das Ciências e da Matemática, pode-se dizer que a forma moderna de raciocínio científico surgiu com a criação das Geometrias não-Euclidianas no início do século XIX, quando os matemáticos deixaram de tentar mostrar que o *5º Axioma da Geometria Euclidiana* [1] era um teorema, demonstrando a sua veracidade, mas buscaram negá-lo. Este procedimento deu origem à criação de novas teorias matemáticas e ao grande desenvolvimento da Matemática do século XX (DAVIS e HERSH, 1985). Pode se dizer que a partir deste momento histórico surgiu uma nova forma de criar conhecimentos científicos, qual seja, a de negar conhecimentos instituídos.

Nos cursos de formação de professores, este momento histórico nem sempre é tratado pedagogicamente com a atenção que merece, isto é, dando-se oportunidade aos licenciandos para que observem e pratiquem esta forma de se instituir uma nova teoria matemática e, analisem as implicações teóricas envolvidas. Frente a este panorama, cabe questionar se os meios formadores de professores estão cientes das dificuldades enfrentadas pelo sujeito frente aos procedimentos necessários à criação destes novos conhecimentos.

Para se buscar uma resposta a esta questão segue-se uma reflexão sobre o ensino da Matemática e de como duas concepções didáticas têm sido freqüentemente adotadas, as quais se embasam em aspectos aparentemente divergentes e relacionados às linguagens envolvidas no desenvolvimento de uma atividade matemática.

Uma primeira concepção de ensino da Matemática, que poderia ser chamada de *formalista* se apresenta nos cursos de formação de professores, naquelas disciplinas que pressupõem um licenciando preparado para um grau mais alto de abstração, para o exercício de procedimentos e técnicas relacionadas ao raciocínio lógico e para a utilização de linguagens simbólicas específicas. Ou seja, por ocasião da introdução ao Cálculo, às Álgebras e, principalmente, no caso das disciplinas ligadas aos Fundamentos de Matemática, como a Análise Matemática e as Geometrias (TALL, 1995).

[1] Tal axioma afirma que "em um plano, por um cada ponto, não pertencente a uma determinada reta, passa uma e somente uma reta paralela à reta considerada". Esta versão do axioma é a mais comum entre as encontradas nos livros-texto escolares e foi enunciada por Proclo no século V, tornando-se conhecida no século XIX, devido aos estudos do matemático e físico John Playfair. Este mostrou a equivalência desta versão com a expressada por Euclides nos "Elementos", ainda no século IV AC, cuja elaboração não é tão simples e de fácil compreensão quanto esta, a qual, por esta razão, passou a ser considerada no ensino.

Esta visão tem encontrado resistência nos meios filosóficos e educacionais, sendo considerada do ponto de vista da filosofia da Educação Matemática, como *absolutista*. Por meio desta perspectiva, a Matemática se caracteriza pela formalização dos conceitos, pelo predomínio da razão absoluta e como uma coleção de verdades a serem absorvidas pelos alunos.

Portanto, como uma disciplina cumulativa, predeterminada e incontestável (ERNEST, 1998). Por outro lado, no âmbito dos ensinos Fundamental e Médio, ainda que entre os docentes em exercício esta concepção também esteja disseminada (PAIVA, 1999), uma outra concepção para o fazer pedagógico, a qual se poderia chamar de *imagística*, se apresenta e pode, abreviada e simplificadamente, ser representada por meio da seguinte frase: *Uma imagem vale mais do que mil palavras.*

Esta concepção pode ser interpretada como decorrente dos princípios norteadores sobre os quais se fundamentam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) pois, no que se refere ao ensino, à aprendizagem da Matemática e a seus temas correlatos, sobressai-se a ênfase dada à importância de se relacionar fatos observados do mundo real com suas representações gráficas e estas a princípios e conceitos matemáticos:

> *"No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a 'falar' e a 'escrever' sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados"* (MEC, 1998, p. 19).

Por outro lado, quanto à aprendizagem da Matemática, estes Parâmetros ainda ressaltam a importância do significado dos conceitos matemáticos relativamente à formalização dos mesmos, ao acrescentarem que:

> *"A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado;*

*apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.[...] Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base para a formalização matemática"* (MEC, 1998, p. 20).

## O Ensino das Geometrias Frente às Práticas Pedagógicas Vigentes

No que se segue, apresenta-se uma reflexão sobre as duas concepções didáticas anteriormente consideradas, no que concerne ao ensino das Geometrias.

Na primeira concepção, a formalista ou absolutista, adotam-se, na introdução aos modelos mais elementares de Geometrias não-Euclidianas, procedimentos-padrão relativamente à apresentação de sistemas axiomáticos, como preconizada pelas teorias que se baseiam nos Fundamentos de Matemática. Nestes casos, geralmente se introduz um sistema de regras e axiomas, aparentemente descrito em termos da língua natural nos quais, no entanto, os termos geométricos não possuem o significado euclidiano conhecido desde os gregos. As regras e axiomas apresentam palavras que a *priori* não pressupõem qualquer significado e os procedimentos arrolados nas atividades matemáticas são fundamentalmente os de prova e demonstração de teoremas.

Em alguns destes casos, a palavra "reta" se refere a conjuntos quaisquer de pontos, podendo até ser finitos. A palavra "ponto" se refere a elementos quaisquer. Desta forma, conforme cada interpretação localmente considerada de um sistema axiomático, os termos "reta" e "ponto" não assumem mais os significados euclidianos habituais. Por outro lado, também é pressuposto que o licenciando domine as técnicas de inferência relacionadas ao raciocínio lógico e aos procedimentos de demonstração. Nestes procedimentos não se deve levar em conta as imagens visuais advindas da observação de representações gráficas, sendo somente admissível a utilização de técnicas relativas a procedimentos inferenciais próprios de uma linguagem discursiva (na língua natural, no nosso caso, o português ou em uma linguagem simbólica, como aquelas criadas pelos matemáticos).

A maneira absolutista de se proceder nos cursos de Matemática, tem origem no *Movimento Matemática Moderna*, o qual, no final da década de 1950 veio alijar a percepção visual do processo educacional preconizando que deveriam ser privilegiadas características do raciocínio lógico-dedutivo, ligadas a linguagens discursivas. Cabe lembrar que antes daquela época, a Geometria Euclidiana era ensinada de maneira dedutiva, a partir dos 13 anos, dando-se prioridade às deduções e provas, mas também se trabalhava intensamente o desenho geométrico, que compunha boa parte da grade curricular.

Por outro lado, nos últimos 15 anos, observa-se, na escola elementar, uma retomada do uso das figuras nas salas de aula. Isto é, registra-se um retorno àquela concepção escolar que adota a observação de figuras e o seu papel no desenvolvimento do raciocínio.

O reconhecimento da importância das figuras e, portanto, da concepção imagística na sala de aula, como mencionado anteriormente e enfatizada pelos PCN, valoriza a diversidade das maneiras de se tratar uma informação, dando ênfase à importância dos diferentes meios de se veicular informações para o aluno. Particularmente, nos procedimentos matemáticos arrolados na escola elementar deve-se dar ênfase às representações que estimulam as sensações visuais, isto é, às imagens visuais do aluno[2].

---

[2]Para se entender as outras possíveis formas de se considerar a formação de imagens no cérebro, vide STERNBERG, 2000.

## O ensino da Geometria Frente ao Desenvolvimento da Matemática e da Psicologia: O Poder das Imagens Visuais e Mentais

Cabe, no entanto, uma outra reflexão sobre a criação de conceitos matemáticos, a qual leva em consideração tanto os conhecimentos mais recentes advindos da Psicologia, quanto o desenvolvimento histórico da Matemática. Ou seja, é sabido que muitas idéias matemáticas são criadas por meio da nossa imaginação a partir de representações mentais, na forma de imagens (mentais), as quais nada têm a ver com o mundo físico a nossa volta. Isto é, podem ser criadas imagens por meios próprios da nossa imaginação e a partir destas criam-se conceitos matemáticos abstratos, os quais aparentemente nada têm a ver com o mundo físico (DUVAL, 2003). Estes conceitos abstratos, para que sejam comunicados da nossa mente para a de outros indivíduos, necessitam ser representados por signos, símbolos, desenhos, ícones, etc. Todos estes entes, perceptíveis por meio da nossa visão, isto é, esses representantes visuais das idéias matemáticas abstratas podem não ter nenhuma característica de analogia, visualmente perceptível, com aquilo que representam. Este é o caso das letras que representam alguma idéia matemática. Desta forma, podem ser criadas representações matemáticas não-analógicas expressadas em uma língua natural ou em uma linguagem simbólica (BRESSON, 1987).

A história da Matemática apresenta o desenvolvimento de um tipo especial de linguagem simbólica não-analógica, a linguagem numérica, a qual apresentou grandes problemas, no momento da passagem das representações simbólicas dos números naturais para a dos racionais e destes para a dos irracionais e, portanto, dos reais (DUVAL, 2003).

Também na história da Matemática foram registradas grandes dificuldades quando se passou das concepções euclidianas, as quais representaram o mundo conhecido e deram conta das necessidades da Ciência até o século XIX, para as abstrações não-Euclidianas. No entanto, é por meio destas novas concepções que se busca explicar o mundo da Ciência dos nossos dias, ou seja, a geometria do universo, o genoma, os entes e unidades microscópicos, os macroscópicos etc (PENROSE, 1996).

Cabe enfatizar que a interferência das imagens visuais perdurou durante mais de 2000 anos até o surgimento dos modelos das

Geometrias não-Euclidianas. Estes modelos foram os primeiros conjuntos de regras matemáticas passíveis de uma representação gráfica na forma de desenhos que não correspondiam ao esperado pela percepção visual e pelo senso comum. Desta forma, a importância de se trabalhar as Geometrias não-Euclidianas até mesmo na escola e, principalmente, no âmbito da licenciatura, reside no fato de se poder trazer o visualmente inesperado para a sala de aula. De se poder trazer desenhos relacionados a palavras habitualmente consideradas com outros significados, ou seja, de se unir aspectos geométricos aparentemente antagônicos quando apresentados em diferentes linguagens.

Assim, tanto pelo que se observa no decorrer da história quanto na sala de aula, passar-se da linguagem natural, aplicada ao cotidiano e ligada às representações matemáticas mais elementares, para uma linguagem que permita o surgimento de representações matemáticas relacionadas a concepções abstratas é um procedimento mental muito delicado o qual se mostra como um problema didático muito sério e que tem profundas conseqüências para o entendimento e desenvolvimento das Ciências (DUVAL, 2000; 2003).

Desta forma, nas salas de aulas da licenciatura, o professor necessita estar alerta para o fato de que nem sempre as imagens visuais, daquilo que se vê, e as palavras expressadas na língua natural, relacionadas a situações do cotidiano, ajudam quando se tem em vista levar o sujeito à abstração de situações ligadas à concretude material.

No que se segue, apresentam-se alguns exemplos de Geometrias não-Euclidianas que podem ser introduzidos também no Ensino Fundamental e Médio, os quais poderão preparar o aluno para os estudos futuros mais avançados em Matemática. No entanto, como também poderá ser observada, a inclusão dos novos conhecimentos geométricos na escola pode não se realizar, pois no âmbito da formação do professor, se apresenta uma variedade de dificuldades, ligadas ao uso da linguagem e à resolução de problemas introdutórios às Geometrias.

## Exemplos de Modelos de Geometrias Não-Euclidianas

Existe uma variedade de exemplos de modelos de Geometrias não-Euclidianas que permitem a observação da complementaridade entre aspectos ligados a ambas concepções: a formalista e a imagística. Resumidamente, nos modelos não-euclidianos podem-se apresentar até mesmo desenhos de "circunferências" que são denominadas "retas", ou traços, na forma de segmentos retilíneos, que aparentemente se encontram, os quais, mesmo assim, são denominados de "retas paralelas". Muitos exemplos interessantes e de aparência visual inesperada podem ser encontrados na literatura (FRANCO DE OLIVEIRA, 1995). Um exemplo sugestivo deste tipo de situação foi criado pelo matemático alemão Félix Klein (1849-1929), o qual é apresentado no Quadro 1, ao final deste artigo.

Por outro lado, pode ainda ser lembrada a importância do estudo dos modelos finitos não-Euclidianos, isto é, dos sistemas axiomáticos com um número finito e discreto de pontos, cujo estudo é fundamental para a Matemática Discreta, a Análise Combinatória, a Estatística e a Teoria dos Grafos. Todos estes modelos são importantes para os dias atuais. Um exemplo característico é o estabelecimento de logísticas na engenharia de transportes, tanto na modelagem de situações relacionadas ao transporte aéreo, como ao terrestre, ou seja, tanto no controle do curso de aviões como no estabelecimento de linhas de metrôs, de ruas e avenidas, nos grandes centros urbanos

Em FOSSA (2003) e, KALEFF e NASCIMENTO (2004), encontram-se o exemplo de uma Geometria não-Euclidiana (não finita) que pode ser aplicada ao tráfego urbano, a Geometria do Táxi, a qual pode ser motivadora de novos procedimentos geométricos no âmbito do Ensino Fundamental e Médio.

Tais conhecimentos também já ensaiam uma aproximação da Geometria Escolar, pois em alguns livros didáticos encontram-se exemplos para serem ministrados na 8ª Série e no Ensino Médio (BIGODE, 2002; JORGE et al, 1999).

## A Perspectiva da Semiose e da Psicologia Cognitiva: Um Breve Comentário Sobre os Resultados de uma Pesquisa

Apesar de toda esta diversidade de modelos geométricos elementares, bem como da reconhecida importância das Geometrias não-Euclidianas para os dias atuais, o que pode ser observado em uma pesquisa realizada pela autora, na qual foi considerado o ponto de vista da Semiose e da Psicologia Cognitiva, é que professores do Ensino Fundamental e Médio apresentam uma grande variedade de dificuldades relativamente ao uso de diferentes representações em registros semióticos, quando confrontados com problemas introdutórios ao estudo das novas Geometrias (KALEFF, 2004). Nestes problemas foram consideradas situações envolvendo regras e suas representações, quando registradas em diferentes linguagens, tanto do cotidiano, quanto gráficas. Foi observado um rol de dificuldades relacionadas ao entendimento dos enunciados de problemas, bem como aos seus procedimentos de resolução.

A principal constatação relacionada com o entendimento de enunciados é a de que a presença de termos homônimos aos do conhecimento euclidiano afeta o entendimento de novos significados geométricos, em situações introdutórias às novas Geometrias. Nestes casos, termos tais como "elemento" e expressões como "conjunto de três elementos", quando convencionalmente denominados, respectivamente, de "ponto" e "reta", foram geralmente considerados como "ponto euclidiano" e "reta euclidiana" e, esta, até mesmo como "reta horizontal" ou ainda, como componente de feixe de "paralelas euclidianas horizontais".

Por outro lado, foi observado que a conversão do enunciado para uma linguagem simbólica ou para desenhos nem sempre é realizada a contento, principalmente frente à ocorrência de conectivos e de quantificadores lógicos. Tal ocorrência, própria às atividades matemáticas, se apresenta como fator interveniente negativo ao entendimento do enunciado. Este é o caso, por exemplo, dos quantificadores lógicos existenciais e universais ("existe" e "para todo", bem como "existe um único", ou ainda "existe no máximo").

Por sua vez, também se constatou dificuldades no reconhecimento de padrões gráficos, mesmo quando estabelecidos por meio de convenções expressadas na língua natural. Nestes casos, embora, no enunciado da atividade, os padrões de traçado das "retas" fossem estabelecidos convencionalmente relativamente ao tipo do traço desenhado (grosso, fino, pontilhado etc), se os desenhos das novas "retas" apresentassem linhas com formas de "poligonais euclidianas", estes não eram considerados como representantes de "retas" da atividade.

Quanto ao procedimento de resolução do problema foi constada a ocorrência de desenhos euclidianos mesmo em situações em que o enunciado se referia a uma situação contextualizada no cotidiano e não relacionada à Matemática. Além do mais, ocorreram registros gráficos inadequados ao enunciado da atividade, como conseqüência da adoção de noções exógenas ao mesmo. Nestes casos, até mesmo a "reta", isto é, o “conjunto de três elementos”, foi desenhada como um traço retilíneo contínuo, no qual relações métricas foram também representadas, por meio de recursos do desenho geométrico.

Cabe ainda assinalar que também foi verificada a presença de dificuldades devidas ao desconhecimento de procedimentos apropriados à resolução de problemas, principalmente no caso de procedimentos abdutivos, nos quais se deve elaborar uma hipótese plausível e se realizar a sua verificação.

## Um Desafio no Âmbito da Formação de Professores de Matemática

Como conseqüência das constatações apresentadas anteriormente, podem-se levantar as seguintes questões:

- Ao se dar continuidade à forma absolutista com que se tem procedido na formação do professor, explorando-se somente os procedimentos dedutivos, estaria se percorrendo um caminho apropriado a uma mudança neste quadro de dificuldades?

- Se a presença de imagens, visuais ou mentais, e de palavras ligadas a determinados conceitos (como, por exemplo, dos termos e expressões euclidianos), cujos significados estejam enraizados na mente do sujeito, causa dificuldades na introdução de novos conceitos matemáticos (no caso, conceitos geométricos), como proceder na formação dos professores?

- Como se introduzir técnicas, complementares e não excludentes, relativas a ambas às linguagens, gráfica e discursiva, nos procedimentos de resolução de problemas?

Um caminho a ser percorrido na busca de respostas a estas questões, também considerado pelos PCN, é o da exploração de técnicas apropriadas a procedimentos de resolução de problemas. Pelo que se tem observado, no entanto, esta exploração é quase ausente nos cursos de licenciatura (GARNICA, 2001). A literatura que trata do procedimento abdutivo de resolução de um problema, aponta para a importância de se saber discriminar entre dois passos diversos, porém complementares: por um lado, o sujeito deve saber como formular uma hipótese plausível (isto é, estabelecer um passo de abdução), por outro, deve estar preparado para verificá-la, frente a uma determinada situação-problema, ciente de que as técnicas relativas à verificação de uma hipótese plausível podem incluir uma demonstração. Saber quando usar tais técnicas, e como usá-las, é uma questão importante para ser tratada tanto nos cursos de licenciatura como na formação continuada.

Uma outra vertente de práticas pedagógicas a serem trazidas para a formação do professor seria a de se introduzir procedimentos que permitissem ao sujeito não se fixar apenas em uma linguagem discursiva ou simbólica, mas que o levassem a explorar o papel das conversões entre os diversos registros semióticos, principalmente relacionando linguagens discursivas a registros gráficos. Ou seja, a introdução de práticas que permitissem a exploração da conversão entre duas diferentes linguagens envolvidas em um procedimento de resolução de problema. Levar o sujeito a não se ater a uma só forma de se expressar, mas a esboçar os seus pensamentos e procedimentos em outros registros semióticos de representação, tem mostrado ser muito importante tanto para o entendimento dos conceitos quanto para a resolução de problemas (DUVAL, 2003).

Pode-se ainda lembrar que, do ponto de vista de Duval, a compreensão de um conceito ou objeto matemático, denominada de *compreensão integrativa*, está relacionada com suas representações semióticas, pois tal *"compreensão integrativa é a articulação dos registros*, *a qual constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática [...] e não o inverso, qual seja o 'enclausuramento' em cada registro". Desta forma, "a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Esta é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto".* Além do que, para Duval, a conversão entre tais registros é fundamental porque, *"passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento* [em um mesmo registro, porém], *é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto"* [...]. Porque *"duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm, de forma alguma, o mesmo conteúdo"* (2003, p. 22).

A importância da ênfase nas conversões de registros pode ser observada no Quadro 1. Neste, no *modelo de Félix Klein*, a expressão "corda de K" foi convertida para o registro apresentado como Figura 1, enquanto que a expressão "reta de K" foi convertida para a Figura 2. Por sua vez, "retas paralelas euclidianas" o foi para o gráfico da Figura 1, enquanto que a expressão "retas paralelas de K" se converteu em segmentos finitos e não eqüidistantes, na Figura 2. Note-se que estas figuras são aqui consideradas como registros semióticos de representação dos objetos matemáticos em questão e não são simples exemplos de ilustração gráfica de uma situação matemática. Considera-se ainda que é a partir da observação dos diferentes conteúdos visuais, representados nas figuras, e da articulação das conversões do enunciado na língua natural para os registros das Figuras 1 e 2, que se disponibiliza ao sujeito as condições para que chegue às conclusões desejadas a respeito dos conteúdos matemáticos envolvidos nos novos objetos geométricos considerados em K.

Por outro lado, no *modelo de Cayley-Klein*, percebe-se, imediatamente, que neste novo registro para K, as suas retas, agora convertidas em equações escritas na linguagem algébrica, para serem compreendidas, exigem procedimentos específicos apropriados às expressões simbólicas e que fogem à percepção visual do desenho. Segundo Duval, tais procedimentos nem sempre são de compreensão imediata, pois podem ser influenciados por fatores relativos ao funcionamento da linguagem aplicada em cada um dos três registros (do enunciado de K, do desenho e da linguagem algébrica), porque *"a conversão das representações* [entre dois registros], *quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível ao tratamento* [realizado no âmbito de um mesmo registro]" (2003, p. 17. Esclarecimento da autora). Desta forma, a compreensão do conjunto K como uma geometria não-euclidiana, interliga-se aos dois modelos e, portanto, à compreensão integrativa das conversões do enunciado de K para cada um dos registros de representação arrolados nos modelos.

Resumidamente, pelas observações aqui aventadas, nos meios educacionais, tem-se um grande desafio: o de se levar para a sala de aula da licenciatura e de se fazer realizar ações pedagógicas de características complementares e não excludentes, relativas a diferentes linguagens, bem como a relacioná-las à conversão de registros e à resolução de problemas.

As reflexões aqui apresentadas também apontam que tanto aqueles envolvidos com a Educação, como os que se dedicam à Matemática e ainda os que trabalham as políticas educacionais, ao refletirem sobre a realidade da formação de professor, poderão se beneficiar das múltiplas vozes que advêm da diversidade dos demais campos de pesquisa, não se limitando ao institucionalizado nos currículos escolares, ou ao instituído nas praticas matemáticas acadêmicas.

No caso das Geometrias, necessitam ser repensadas e reconsideradas as dificuldades relacionadas às representações euclidianas, bem como as maneiras pelas quais os novos conteúdos geométricos são representados nas diversas formas de escrita, em suas manifestações nas variadas linguagens arroladas nos textos de apresentação. Tal exercício não se constitui em mais um revisitar de noções e partes constitutivas da Matemática, independentemente da linguagem, mas, requer também a consideração daquelas dimensões advindas das relações entre o ensino e a aprendizagem sugeridas pelas inúmeras pesquisas que vêm tratando das maneiras de se apresentar conteúdos geométricos a adultos.

Pelo apresentado, a concepção absolutista e a concepção imagística, consideradas por alguns meios acadêmicos como antagônicas, podem ser, portanto, tomadas como complementares quando se tratam as práticas pedagógicas que visam a levar o licenciando para além das concepções geométricas elementares. Por outro lado, na formação do professor, também é preciso observar-se as peculiaridades do indivíduo frente às linguagens consideradas, pois nem a língua natural do cotidiano nem as linguagens simbólicas são suficientes para assegurar a ausência de dificuldades no âmbito desta formação. Assim, é necessária a cooperação de todos para que se possam entender tais dificuldades e, principalmente, para que se venha a respeitá-las, quando se busca avançar além das noções euclidianas mais comuns.

## Considerações Sobre Dois Modelos Elementares de Geometrias Não-Euclidianas

**Quadro I:**

Considere-se o plano E da Geometria Euclidiana plana e dele seja retirado um disco aberto K, do qual se elimina a circunferência. Seja, em K, o conjunto de suas cordas, as quais serão denominadas de "*retas*" de K. Considere-se ainda que, em K, duas retas são "*paralelas*" quando não se interceptarem.

Com o auxílio das Figuras 1 e 2, isto é, por meio das conversões do registro discursivo, na língua natural, para os registros não

**Quadro I:**

discursivos apresentados nas Figuras 1 e 2, pode-se mostrar algumas propriedades relativamente a K, entre elas de que este conjunto é um exemplo de Geometria não-Euclidiana.

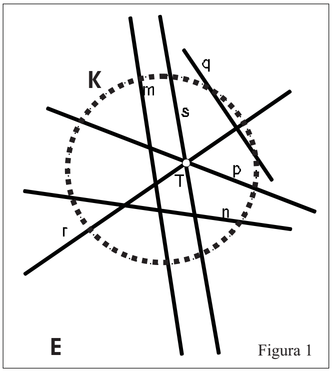

Figura 1

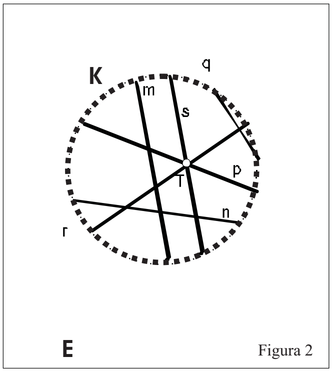

Figura 2

Observa-se que o disco K considerado na Figura 1, nada mais representa do que uma parte delimitada do plano E, representada em um registro semiótico. Se este disco for considerado como um conjunto de pontos, delimitado pela circunferência, obtém-se uma nova realidade, a qual advém da negação do plano como uma totalidade, na qual as retas são infinitas. Esta nova realidade do disco K pode ser convertida para um outro registro semiótico, como o representado na Figura 2. Nesta, pode-se perceber que as "retas de K" (cordas de K) são finitas, pois a maior delas é o diâmetro da circunferência.

Por outro lado, se for relembrado o significado euclidiano do termo *retas paralelas no plano E*, isto é, duas retas são paralelas se forem consideradas como dois conjuntos de pontos cuja interseção é vazia, têm-se, conseqüentemente, duas retas infinitas e eqüidistantes. No entanto, ao se limitar à nova realidade ao disco K, sem a circunferência, observa-se que existirão *retas*, agora finitas, cuja interseção é vazia (em K), mas que, todavia, não serão eqüidistantes. Este fato permite considerar que a finitude das retas de K, revela uma nova compreenssão da expressão "*retas paralelas*", a qual nega a infinitude das retas do plano E e a eqüidistância entre paralelas (como apresentada na Figura 1).

Desta forma, pelo observado e auxiliados por uma representação desta nova realidade de K, como convertida para o desenho da Figura 2, tem-se que as retas p, s, r, m, n são "*retas paralelas à reta*" q. Todavia, apesar de p ser "*paralela*" a n e m ser "*paralela*" a s, tem-se que p e n

**Quadro I:**

"*não são paralelas*" a m e nem a s, pois estas se interceptam. Além, disso, pode-se observar também que, pelo ponto T, o qual não pertence à reta q, passam s e p, retas "paralelas" a q. Portanto, em K, tem-se que por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas mais de uma "*reta paralela*" à mesma.

Logo, tem-se um registro de representação para K, no qual o 5 º Axioma de Euclides não é válido e, portanto, tem-se representado um exemplo de uma Geometria não-Euclidiana. Esta representação para K é chamada de *modelo de Félix Klein*.

Uma outra representação para K pode ser apresentada em um registro discursivo. Para tanto, basta se converter o enunciado de K para um registro no qual se recorre à linguagem simbólica (algébrica) do plano cartesiano. Neste novo registro, K pode ser considerado como o disco unitário de centro na origem, isto é, $K = \{(x,y) \ / \ x,y \in R, x^2 + y^2 < 1\}$

Note-se que r é uma reta de K, se $r \neq \varnothing$ e

$r = \{(x,y) / ax+by+c = 0, a,b,c \in R, a \neq 0, b \neq 0\}$

ou

$r = \{(x,y) / by+c = 0, b \neq 0, ax + c = 0, a \neq 0, a,b,c \in R\}$

Neste registro discursivo, mostrar que o 5ª Axioma não é válido para K, não é um procedimento tão imediato em relação às retas, como no caso da representação anterior relativa ao desenho. Esta nova representação para K deve-se ao matemático Arthur Cayley (1821-1895) e, por isso, é chamada de *modelo de Cayley-Klein*.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL: **Parâmetros Curriculares Nacionais-Matemática 5ª a 8ª Séries.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRESSON, François. Les Fonctions de Représentation et de Communication. In:Piaget, J.; Mounod, M.; Bronckart, J. (Eds), **Psychologie.** Paris: Encyclopédie de la Pleiade, p.933-982, 1987.

DAVIS, Philip; HERSH, Robin. **A Experiência Matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Alcântara Machado, Silvia D. (Ed.) **Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica.** São Paulo: Papirus, p.11-34, 2003.

DUVAL, Raymond. Basic Issues for Research in Mathematics Education. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education -* PME, p.55-70, 2000.

ERNEST, Paul. **The Philosophy of Mathematics Education.** Londres: Palmer Press, 1998.

FRANCO DE OLIVEIRA, Antonio. **Geometria Euclidiana.** Lisboa: Universidade Aberta, 1995.

FOSSA, John A. **Geometria Urbana.** João Pessoa: Editora Universitária João Pessoa, 2003.

14

GARNICA, Antonio V. M. É Necessário ser Preciso? É Necessário Ser Exato? In: Cury, Helena N. (Org.) **Formação de Professores de Matemática: uma Visão Multifacetada.** Porto Alegre: EDIPUCRS, p.49-88, 2001.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possibilidades de (Trans)Formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2004, 450 p.

KALEFF, Ana Maria M. R. ; NASCIMENTO; Rogério S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o Exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n.44, p.11-42, 2004.

PAIVA, Maria Auxiliadora V. **Concepções do Ensino de Geometria: um Estudo a Partir da Prática Docente.** Tese de Doutorado. Departamento de Matemática - Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1999, 264 p.

PENROSE, Roger. **O Grande, o Pequeno e a Mente Humana.** São Paulo: EDUNESP, 1996.

STERNBERG, Robert J. **Psicologia Cognitiva.** Porto Alegre: ArtMed Editora, 2000.

TALL, David. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. **Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - PME.** Recife, v.1, p.61-75, 1995.