Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático[1]

José Carlos Cifuentes
Departamento de Matemática e
Programa de Pós-graduação em Educação
Universidade Federal do Paraná
jccifa@mat.ufpr.br

Resumo

A reflexão crítica na matemática pode se dar, por exemplo, dos pontos de vista histórico, filosófico ou cultural. Neste artigo tomaremos como exemplo de reflexão crítica, a partir de uma discussão sobre o conhecimento matemático e a racionalidade estética, o método axiomático da geometria, em seus contextos grego e moderno, ressaltando seus aspectos estéticos. Veremos como ambos os contextos históricos inspiram desenvolvimentos ou formas de apresentação diferentes da geometria. Veremos, também, como a cultura subjacente ao século XIX, em especial, produziu desenvolvimentos paralelos na arte e na matemática denominadas ambas de "modernas". Esse estudo também motiva a introdução da linguagem visual da matemática onde são analisados valores estéticos como o contexto, o contraste, o equilíbrio, a seqüencialidade, a simplicidade e a abstração.

Palavras-chave: Matemática; método axiomático; racionalidade estética; modernismo; linguagem visual.

An aesthetic accessway to mathematics knowledge

Abstract

The critical reflexion on Mathematics can happen, for example, from historical, philosophical or cultural point of view. In this paper we assume as example of critical reflexion, from a discussion of the mathematical knowledge and the aesthetics rationality, the axiomatic method of Geometry, in its greek and modern contexts, pointing some aesthetics aspects. We will see how both historical contexts inspire different developments or different presentations of Geometry. We will see likewise, how the subjacent culture of the XIXth century, particularly, produced parallel developments in Arts and Mathematics calling them "moderns". This study motivates the introduction of the visual language of Mathematics where aesthetic values such as context, contrast, equilibrium, seqüentiality, simplicity and abstraction are analised.

Key words: Mathematics; axiomatic method, aesthetics rationality; modernism; visual language.

[1] Uma versão preliminar deste artigo, sob o nome "A Racionalidade Estética da Matemática", foi apresentada como comunicação no I Encontro da Rede Paranaense de Pesquisa em História e Filosofia da Ciência, realizado em Londrina PR, em novembro de 2003.

1. Conhecimento Matemático e Racionalidade Estética

A emoção é uma das faculdades humanas fundamentais, junto com a razão. Enquanto faculdade, ela é uma capacidade intelectual, pois permite a percepção e o reconhecimento de um valor e, portanto, é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível.Tradicionalmente, assume-se que o conhecimento matemático é, por natureza, puramente racional, o qual significa que, das principais capacidades do ser humano, a razão e a emoção, consideradas muitas vezes como incompatíveis, a única que lidaria com o conhecimento matemático é a razão. Essa tradição baseia-se na tese, que podemos chamar de platônico-cartesiana, de que os objetos matemáticos são idéias desligadas de toda experiência sensível e que à verdade matemática acede-se pela razão.

No entanto, são dimensões da aquisição do conhecimento, em geral, além do racional, também o emocional, através da intuição e da experiência estética, entendendo por *estética* a ciência do conhecimento sensível e por *experiência estética* o prazer da apreensão do belo. Para Courant e Robbins: "A matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa e o desejo de perfeição estética. Seus elementos básicos são lógica e intuição, análise e construção, generalidade e particularidade" (COURANT & ROBBINS, 1955, p. 3). Na matemática, a experiência estética consiste no reconhecimento da transcendentalidade de seus objetos, por exemplo, a triangularidade do triângulo, e é o reconhecimento de padrões mais que de objetos.

Neste artigo pretendemos mostrar como, ao longo da história, o conhecimento matemático não foi somente objeto puro da razão, senão também da emoção, manifestando-se esta através da intuição matemática e da apreciação estética. Na matemática, do ponto de vista racional, dá-se pouca ênfase à intuição matemática e aos processos do pensamento ligados a ela como a visualização, os argumentos narrativos e indutivos, a imprecisão. Na matemática do século XX privilegia-se uma abordagem racionalista cartesiana em detrimento dos aspectos mais intuitivos e concretos do conhecimento matemático.

Essa abordagem racionalista cartesiana teve suas origens em Platão, para quem os objetos matemáticos pertencem ao mundo das formas ou das idéias, desligados completamente de qualquer conotação espaço-temporal.

Para Aristóteles, pelo contrário, os objetos matemáticos têm sua origem na experiência sensível e são obtidos por abstração de objetos concretos. Podemos afirmar, inclusive, que, apesar da abstração, para Aristóteles eles não perdem sua conotação espaço-temporal, isto é, o objeto matemático pode ser concebido como não desligado totalmente do seu contexto.

Essa tese pode ser verificada de várias formas. Por exemplo, quando

Aristóteles diz que "o espaço é o lugar ocupado pelos corpos", implicitamente afirma que não é concebível um espaço sem corpos que o ocupem, isto é, um espaço vazio, nem objetos que possam ser pensados separados de um certo espaço, isto é, o espaço é criado pelos corpos ou manifesta-se pela presença deles. Assim, também, o fato de Aristóteles ter desenvolvido "apenas" (como é freqüente supor) uma lógica de predicados monádicos significa, na realidade, que os predicados diádicos e outros de aridade superior podiam ser considerados monádicos, isto é, o entorno de um objeto podia ser pensado como parte do próprio objeto (ou o objeto parte de seu entorno). Isso pode ser ilustrado da seguinte maneira: se R é um predicado diádico, isto é, uma relação binária, e a e b são dois indivíduos, então, a afirmação aRb, hoje em dia pensada como estando os indivíduos a e b no entorno criado pelo predicado R, podia ser pensada como o predicado monádico aR aplicado ao indivíduo b, ou seja, considerando o indivíduo a como parte do entorno de b. Bachelard dá um exemplo nessa direção quando diz: "chegamos a nos perguntar se a reta *com* paralela não corresponde a uma reta especial, a uma reta demasiado rica, numa palavra, a uma noção já composta" (BACHELARD, 2000, p. 28), sugerindo que a existência de uma paralela a uma reta euclidiana dada não seria uma qualidade externa da reta senão parte de sua própria essência. Essa forma de pensamento aristotélico influenciou também a física grega onde o meio em que um corpo se move era pensado como sendo parte essencial do seu movimento influenciando, por exemplo, sua velocidade.

Essa visão aristotélica foi deixada de lado a partir de Descartes, no século XVII, onde são separados como idéias claras e distintas, dentre outros, o espaço dos objetos que o ocupam, criando-se o espaço vazio. E, principalmente, a razão é separada da emoção, talvez uma das possíveis causas do racionalismo cartesiano.

Uma volta à visão de Aristóteles onde os objetos não possam ser separados de seus contextos permitiria uma abordagem estética da matemática, isto é, uma abordagem onde o conhecimento sensível da matemática tenha um lugar de destaque, onde a apreciação estética da matemática possa ser fator essencial na nossa capacidade de compreensão, sendo, portanto, fonte de conhecimento.

A matemática, do ponto de vista racional, tem como objeto o necessário e o universal. Ela é vista como absoluta. Demonstrar, do ponto de vista dedutivo, é tornar necessário, sendo o necessário, então, de caráter lógico. Já para Aristóteles, uma das principais características da ciência é ter por objeto o necessário e, desse ponto de vista, a matemática seria a ciência mais perfeita.

Modernamente, pelo contrário, os teoremas de incompletude de Gödel, demonstrados por ele em 1931, mostram que a "verdade matemática" não requer, para sua apreensão, essa necessidade lógica, pois existem verdades, relativas a um sistema dado, não demonstráveis nesse sistema. Esses teoremas de Gödel mostrariam também que a razão não pode ser considerada puramente lógico-formal. Desse ponto de vista existiria uma racionalidade ligada aos fenômenos da emoção, uma racionalidade estética.

O estético não é apenas um olhar sobre a matemática, de fato acreditamos, e essa é a nossa proposta, que existe um conteúdo estético na matemática, e esse conteúdo está ligado ao que pode ser "apercebido" pelo intelecto. Incluímos como parte do conteúdo matemático também os métodos matemáticos. São valores estéticos da matemática, por exemplo, a perfeição, a simetria, a forma, o contexto, o contraste, a ordem, o equilíbrio, a simplicidade e a abstração, também a liberdade. Para Georg Cantor, um dos criadores da teoria dos conjuntos, mais especificamente, da teoria conjuntista do infinito matemático, a essência da matemática reside na sua liberdade. Esta é também um valor ético.

Em particular, o contexto, talvez um dos mais importantes valores estéticos, dá existência espaço-temporal ao objeto, aliás, o contexto envolve uma outra concepção de espaço. Todo espaço é um contexto e também todo contexto pode ser considerado uma certa forma de espaço. Por exemplo, definir um conjunto, classe ou coleção, é criar um certo contexto para seus elementos, o contexto que lhes dá unidade como conjunto, isto é, como totalidade agregada.

Enfim, o estético é expressivo e toda forma de expressividade supõe uma linguagem. A linguagem é captadora de conhecimentos. A linguagem formal não pode captar o conhecimento emotivo e, por isso, no caso da apreciação estética da matemática, necessitamos de uma linguagem visual. O visual na matemática não deve ser entendido só em relação à percepção física, senão também a um certo tipo de percepção intelectual, ligada fortemente à intuição matemática. Na concepção Kantiana, o visual em matemática estaria mais ligado ao *nôumeno* que ao *fenômeno*, entendendo por "fenômeno" o objeto percebido pelos sentidos, e por "nôumeno" o objeto percebido pelo intelecto.

A linguagem visual da matemática, que introduziremos na seção 4, deve ser uma linguagem que admita a possibilidade do erro e da imprecisão, como as linguagens da poética, que longe de lhe tirar riqueza e expressividade podem contribuir para reforçar o significado. O paradigma da exatidão na matemática é só necessário para as aplicações, não para a apreciação estética, e o erro é parte importante da apreensão dos entes matemáticos (CIFUENTES, 2000).

Uma abordagem da matemática levando em conta seus aspectos estéticos permitiria desenvolver a *matemática do erro* ou *da imprecisão*, a qual poderia ser considerada como a matemática do suficiente, complementar da matemática do necessário. O seguinte exemplo clarifica esse conceito: é suficiente um certo número finito de termos de uma seqüência para "visualizar" intuitivamente, ou seja, através daquela percepção intelectual, a sua regra de formação ou seu limite.

Essa capacidade de "ver" através do intelecto, além de ser natural, pode ser desenvolvida. E esse desenvolvimento, necessário para uma nova abordagem da matemática, requer uma alfabetização visual: é a necessidade de uma linguagem visual rumo à elaboração de uma conceituação visual. Esse é o grande desafio que poderá mudar, acreditamos, o desenvolvimento e o ensino da matemática no século XXI.

2. O Método Axiomático na Geometria

A matemática, como já vimos, apresenta a seguinte dicotomia essencial: *o racional* vs. *o intuitivo*, estando o segundo ligado ao emocional. Para enfatizar essa dupla face, a matemática não deveria ser estudada priorizando apenas seus conteúdos, senão interpretada também em seus contextos históricos e culturais, e pondo em evidência não somente sua utilidade senão também a sua beleza.

Assim, uma outra dicotomia essencial para o enfoque da matemática é: *a utilidade* vs. *a beleza*, *a matemática como técnica* vs. *a matemática como arte*.

A matemática, desde os tempos de Platão, teve uma finalidade educativa e cultivadora do espírito humano. "Matemática" origina-se da palavra grega *mathema* que, entre outras coisas, quer dizer "ciência", "aprendizagem".

No desenvolvimento histórico da matemática uma terceira dicotomia se apresenta como essencial para um enfoque estético dessa ciência, como veremos: *o* *finito* vs. *o infinito.* Aliás, para Herman Weyl (matemático de começos do século XX), a matemática é a ciência do infinito.

Há dois tipos de infinito que já os gregos diferenciaram: *o infinito potencial* e *o infinito atual.* O infinito potencial é o infinito dos números naturais em sua génese indutiva, um depois de outro sem fim. O infinito atual é um infinito acabado, captado ou apreendido como totalidade.

Kant nos diz que essa apreensão do infinito atual é uma experiência do sublime, da beleza máxima. Desse ponto de vista podemos afirmar, junto com Kant, que o infinito é o nexo entre a matemática e a arte(!), é o nexo entre a matemática e a estética, entre a racionalidade e a beleza, é a ponte entre *o conhecimento científico* e *o conhecimento estético* da matemática, entendendo por conhecimento estético o conhecimento sensível através da intuição matemática e do belo.

Os gregos, incluindo Euclides, dominaram matematicamente o infinito potencial, porém, aceitaram com reservas o infinito atual. Por exemplo, a famosa demonstração, incluída nos *Elementos* de Euclides, da infinidade dos números primos é, na realidade, uma prova da infinidade potencial deles, pois para qualquer coleção finita de primos constroi-se um primo maior que todos eles. Para Platão, o limitado é perfeito, enquanto que o ilimitado, entendido no sentido potencial, é imperfeito por ser incompleto. O infinito atual só foi aceito como um recurso de simplicidade.

A simplicidade é uma noção puramente estética, e a matemática grega estava impregnada desse tipo de noções. Ponhamos como exemplos dessas noções: a simetria de uma figura, a evidência de um axioma, etc. A própria abstração, tão cara à matemática, é também um processo ligado à simplicidade. O caráter estético da simplicidade é explicitado por Diderot no século XVIII quem afirma: "Tudo o que é comum é simples, porém nem tudo o que é simples é comum. A simplicidade é uma das características da beleza, ela é essencial ao sublime" (DIDEROT, 1973, p. 178).

Nelson Goodman sugere que as leis científicas, quando expressas matematicamente, são o resultado da aplicação de um argumento de simplicidade: de fato, a curva de ajuste de um fenômeno, construída a partir de uma série discreta de dados, é a curva mais simples que se ajusta a esses dados (GOODMAN, 1975). Assim, a simplicidade está na base da possibilidade de predição!

2.1 A Axiomática Material Grega: Raízes Estéticas

A *axiomática* é uma metodologia inventada pelos gregos para sistematizar um corpo de conhecimentos e faz uso explícito do recurso estético de simplicidade: como o simples, os axiomas, pode ser fundamento do complexo, os teoremas(!).

A geometria grega, sistematizada por Euclides, é dita material enquanto diretamente ligada ao concreto, ao visível, o qual traduziremos em termos matemáticos como construtível. De fato, a visualização dos objetos geométricos era realizada mediante construções com regua e compasso, parte essencial do método axiomático grego.

Já na concepção pitagórica, os números não tinham um caráter abstrato, pois eram representações de alguma extensão geométrica, um comprimento ou uma área, por exemplo. Tal foi a necessidade matemática de "visualizar" que a teoria grega dos números era de caráter geométrico. Assim, os números eram considerados como "figuras", os chamados de *números figurados*: por exemplo, os números triangulares (1, 3, 6, etc.), os quadrados (1, 4, 9, etc., os nossos quadrados de hoje), os pentagonais (1, 5, 12, etc.).

Na geometria euclidiana, do ponto de vista da visualização dos objetos geométricos mediante sua construção, a palavra chave é *traçar*. Vejamos:

Primeiro, repare-se que a noção grega de *reta* é, na realidade, "segmento de reta" ou "reta finita", como sugerem as seguintes definições (de Euclídes):

Uma reta é um comprimento sem largura

e

Os extremos de uma reta são pontos.

Os axiomas euclidianos que confirmam essa afirmação, além da menção dos "extremos" de uma reta, como acima, são os seguintes:

Pode-se traçar uma reta de um ponto qualquer a outro qualquer

e

Uma reta pode ser prolongada em ambos os sentidos quanto se quiser.

Veja-se que a reta grega é infinita no sentido potencial, porém, não o é no sentido do infinito atual, pois se uma reta for completa, como poderia ser prolongada?

De fato, os instrumentos gregos de construção são a régua e o compasso, os quais permitem concretizações físicas da reta finita e da circunferência. As construções geométricas eram realizadas com segmentos de reta e circunferências com as restrições dadas pelos axiomas.

Dentro desse espírito de finitude surge um conflito: o axioma das paralelas requer a reta infinita em sua totalidade.

Para Euclides é evidente que a reta é finita embora arbitrariamente grande, porém não é evidente que ela seja infinita no sentido do infinito atual. A aceitação da reta infinita no sentido atual, isto é, como totalidade, é um recurso de simplicidade e, portanto, de caráter estético.

Uma outra característica da geometria no estilo de Euclides é a "superposição" de figuras.

A noção intuitiva de coincidência de figuras planas que aparece, por exemplo, nos critérios de congruência de triângulos, não é formalizável como um procedimento "legítimo" de geometria plana. Assim, no teorema L-A-L (lado-ângulo-lado), que estabelece a congruência de dois triângulos que têm dois lados iguais e o ângulo entre ele também igual, podemos ver que, se esses triângulos não coincidem por translação e/ou rotação, porém podem se fazer coincidir por reflexão, então, tal processo exige tirar a figura do plano e volvê-la a colocar, o qual implica supor a existência da *terceira dimensão* e, mais ainda, a dependência do plano a respeito do espaço (PEDOE, 1979, pp. 156-157). Essa suposição, embora natural, é não trivial do ponto de vista teórico.

2.2 A Geometria Formal Moderna: Raízes Culturais

Os processos euclidianos, baseados na visualização construtiva de objetos "concretos", foram parte essencial do conceito grego de *demonstração*.

Essa mentalidade persistiu até começos do século XVII onde iniciou-se um processo de "desvisualização". Vejamos:

a) Ao século XVII, com o advento da geometria analítica, a reta infinita é capturada de uma vez só numa equação.

b) O século XVIII, o chamado de *século da ilustração* ou *das luzes*, caracteriza-se pela excessiva confiança na razão e subsequente desconfiança na intuição.

c) Século XIX, como conseqüência da *ilustração*, é o século das rupturas.

- Com o advento das geometrias não-euclidianas, a matemática rompe com a "realidade", considerada o modelo absoluto da geometria.

- Com a algebrização da lógica, devida a Boole, esta rompe com as leis do pensamento.

- Com Maxwell, dentre outros, ao ser substituído o conceito intuitivo de "éter" pelo conceito matemático de "campo", a física transforma-se de uma teoria descritiva numa teoria formal da natureza.

- No caso da arte, a ruptura dá-se com os impressionistas quem, privilegiando a forma, rompem com a finalidade de refletir, através do tema ou conteúdo, a objetividade da natureza. É o nascimento da *arte moderna*.

Com o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, no século XIX, houve um rompimento da geometria com a realidade espacial, desvinculando seus aspectos intuitivos ou materiais, dos formais.

Com David Hilbert, a partir de sua obra *Fundamentos da Geometria* de 1899, esta tornou-se uma ciência puramente formal "eliminando" todo apelo à intuição. Na geometria euclidiana, os axiomas deviam ser verdades evidentes tendo como referência fatos concretos da realidade. Na geometria de Hilbert, os axiomas deverão ser apenas convenções sem referência real.

A parte material ou concreta da geometria foi separada da sua parte formal e recriada nos chamados de *modelos* ou *interpretações*, permitindo modelos diferentes e "novas realidades" para um mesmo sistema de axiomas.

O conceito de superposição foi capturado matematicamente mediante o conceito analítico de *função*, não sendo necessária outra justificativa para a reflexão de figuras planas que o "simples" fato de poder transformar uma na outra através de uma função. Conseqüência desse enfoque foi que, na versão de Hilbert, o teorema L-A-L virou um axioma e a existência da terceira dimensão teve de ser postulada mediante o axioma:

Existem quatro pontos não coplanares.

Com o *intuicionismo* de Brouwer, uma das correntes de filosofia da matemática surgidas a começos do século XX em decorrência da chamada *crise dos fundamentos*, houve uma reação ao excesso de formalismo de Hilbert. Essa tendência tem sido desenvolvida em varias direções ao longo do século XX, promovendo diversos tipos de construtivismo em matemática, sendo um dos mais importantes o baseado na teoria de categorias e de *toposes*. Essas teorias construtivistas, de alto grau de tecnicismo, e cuja descrição escapa aos alcances deste artigo, não têm consolidado, até hoje, sua influência na matemática.

3. O Modernismo na Matemática

A matemática, além de ser uma ciência exata, também é um reflexo do meio cultural das diversas épocas, como já vimos.

O *modernismo*, estilo que se manifesta, tanto na matemática como na arte, a finais do século XIX e começos do XX, pode ser considerada a última etapa da ilustração.

São suas características principais as seguintes:

- Ruptura com a tradição:

Ademais do que vimos no parágrafo anterior, podemos mencionar que a matemática rompe com a tradição ao se desligar de suas aplicações. É o nascimento, como observado por Bertrand Russell, da *matemática pura*.

- Mudança de linguagem:

No caso da arte moderna, por exemplo, a nova linguagem descarta o uso da perspectiva na pintura. No caso da matemática, surge a teoria de conjuntos e a teoria de funções como sua linguagem e seu fundamento. É importante esclarecer que a implementação desta linguagem nova no ensino escolar, na segunda metade do século XX, foi um grave erro do chamado *movimento da matemática moderna*, pois o que é fundamento não necessariamente é elementar.

- Separação de conteúdo e forma:

Na matemática, como na arte, também deu-se a separação entre conteúdo e forma. No caso da matemática, ao aparecer a noção de *isomorfismo* como fundamental para o estudo, por exemplo, das estruturas algébricas. Dois sistemas algébricos são considerados o mesmo se eles forem isomorfos, isto é, se eles tiverem mesma "forma" do ponto de vista da álgebra, sem importar a natureza particular de cada um deles.

- Fragmentação do conhecimento e da realidade:

O conceito de *estrutura matemática*, já representa uma fragmentação do conhecimento matemático ao decompor uma certa realidade, por exemplo os números inteiros como um todo complexo, em suas partes constituintes, digamos suas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, assim como sua ordem, criando a noção de *o anel dos inteiros*. Na arte moderna, especialmente no *cubismo*, também a realidade é fragmentada: as figuras são apresentadas por planos superpostos cada um dos quais captura um determinado enfoque da realidade analisada.

- Autocrítica:

Na matemática, a autocrítica manifesta-se no desenvolvimento da *lógica matemática* a finais do século XIX, devido fundamentalmente a Gottlob Frege, e ao advento da *metamatemática*, programa esboçado por Hilbert a começos do século XX como conseqüência dos problemas aparecidos no desenvolvimento de sua axiomática formal. O fracasso desse programa, demonstrado pelos teoremas de limitação (incompletude) de Gödel, decreta o fim da matemática qualificada de moderna segundo os lineamentos indicados aqui. Os resultados de Gödel, ao concluir que em qualquer sistema axiomático (suficientemente forte como para conter a aritmética de Peano) existem verdades, da "realidade" matemática que o sistema pretende descrever, não demonstráveis no sistema, abrem passo à possibilidade de outros mecanismos de demonstração matemática diferentes dos dedutivos, por exemplo as demonstrações computacionais, rompendo com um "paradigma de rigor" de mais de dois mil anos. Este fato ainda não foi aceido pela maioria dos matemáticos profissionais, a pesar de suas evidentes conseqüências para o desenvolvimento, e também para o ensino, da matemática.

4. A Linguagem Visual da Matemática

4.1 O Contexto e a Contextualização

Uma das características fundamentais da matemática é a sua comunicabilidade e, para tal efeito, a linguagem matemática é essencial. Essa linguagem deveria ser ampliada para envolver tanto os aspectos formais quanto os intuitivos, estes últimos ligados aos aspectos sensíveis.

Na procura de uma linguagem visual para a matemática, o primeiro valor estético que se faz necessário nessa construção é *o contexto*, como foi sugerido na seção 1.

No processo de ensino-aprendizagem da matemática, há dois tipos de contextualização, ambos importantes para os processos de transposição didática dos conteúdos a serem ensinados:

– a contextualização dos conceitos matemáticos no cotidiano do aluno, com a finalidade de aplicá-los a situações ditas concretas, e

– a contextualização dos objetos matemáticos num contexto espaço-temporal, com a finalidade de apreciá-los esteticamente, ou melhor, de pôr em evidência suas qualidades estéticas.

Um exemplo de contextualização do segundo tipo é o seguinte: pensemos num triângulo isósceles em duas posições diferentes (a palavra "posição" já indica uma contextualização espaço-temporal), numa apoiado na base e na outra apoiado no vértice. Suas propriedades geométricas são as mesmas, pois são triângulos congruentes, porém, do ponto de vista estético, a primeira apresentação o mostra num estado de equilíbrio maior no espaço, isto é, mais estável, do que a segunda. A própria expressão "base de um triângulo" teve uma motivação contextual, mais ainda, as palavras "equilíbrio" e "estabilidade" não teriam sentido para um triângulo descontextualizado do espaço que o contém. Como veremos depois, o equilíbrio é a referência visual mais forte do ser humano (DONDIS, 1999, p. 32), e é possivelmente em virtude disso que quando um professor desenha no quadro um triângulo isósceles apoiado sobre seu vértice ou sobre um dos lados congruentes, os alunos não o reconhecem.

De fato, a contextualização dos objetos matemáticos num contexto espaço-temporal é um fator importante nos processos ligados à sua apreensão pela intuição.

Como já vimos, contextualizar um objeto é dar um referencial espaço-temporal ao objeto, de modo que, do ponto de vista estético, o contexto passa a formar parte do próprio objeto como sugerido por Aristóteles, embora a "realidade" do contexto possa ser diferente da realidade do objeto.

Exemplos muito importantes de objetos matemáticos com grande conteúdo estético são as seqüências (finitas ou infinitas). Elas, por estarem constituídas de objetos múltiplos e numa ordem determinada, sugerem uma "narrativa", é sua condição de *seqüencialidade* ou *serialidade*. As seqüências contam uma história, um processo, e estão intimamente ligadas aos conceitos de "continuidade" e "infinito" de grande apelo estético.

Uma forma de contextualizar uma seqüência num contexto espaço-temporal é através de uma representação geométrica. Ela permite evidenciar, poderíamos dizer melhor visualizar, suas simetrias e, em decorrência disso, seu padrão ou "moldura". Um exemplo histórico desse processo é constituído pelos já mencionados *números figurados* (números triangulares, quadrados, pentagonais, etc.) estudados pelos pitagóricos. Através dessa representação espacial (e também temporal, pois a seqüencialidade sugere o tempo) é possível perceber o "todo maior" da seqüência, que a *Gestalt*, como teoria da organização perceptiva, explica, tornando possível conjeturar sua lei de formação e predizer, ou melhor, prever, sua continuação ou seu limite.

Assim, por exemplo, a seqüência 1, 4, 9, 16, ... é constituída pelos chamados de *números quadrados* ou quadrados perfeitos. É através da representação geométrica desses números que é possível encontrar algumas leis que governam a seqüência. Por exemplo, no caso dos números quadrados, temos que cada quadrado perfeito é a soma dos números ímpares consecutivos 1 + 3 + 5 + 7 + ... Também é possível prever o próximo termo da seqüência, 25, processo que envolve uma outra característica estética da matemática como é a *simplicidade*. "O próximo termo da seqüência", dentre as múltiplas possibilidades, é aquele cuja escolha é mais simples dentro de um certo conjunto de dados contidos nos termos anteriores da seqüência. Aliás, podemos concluir que um dos problemas matemáticos cuja primeira solução é de caráter visual é a predição de seqüências.

4.2 O Equilíbrio

Como foi mencionado antes, *o equilíbrio* e subseqüente propriedade de estabilidade é uma característica do objeto em relação ao seu contexto, é, segundo Dondis (1999), a referência visual mais forte do ser humano e sua base consciente e inconsciente para fazer avaliações visuais. Em matemática, o equilíbrio não é apenas uma qualidade ligada ao espacial. Em álgebra, por exemplo, uma equação, mais do que a expressão de uma simetria é a expressão de um equilíbrio entre seus membros, e as operações algébricas conducentes à sua solução são transformações que devem deixar invariável o equilíbrio estabelecido previamente.

4.3 O Contraste

Um valor estético intimamente relacionado com o contexto e com os fenômenos de percepção, no caso da matemática de percepção intelectual, é *o contraste*. De fato, a *Gestalt* explica que só pode haver percepção se houver diferenças entre as diversas partes do campo de percepção, o que pode ser levado também ao caso da percepção do *nôumeno*. Assim, por exemplo, só podemos entender o quente em relação ao frio, o doce em relação ao amargo, o pesado em relação ao leve; vemos o claro porque está próximo do obscuro. No caso da percepção do espaço, o contraste se dá na diferença figura-fundo, isto é, objeto-contexto.

O contraste pode se dar por semelhança ou por diferença. Uma das manifestações do contraste por semelhança na matemática é dado mediante a *analogia*. A analogia, processo de raciocínio já estudado por George Polya (POLYA, 1966), é uma espécie de proporcionalidade, não entre números senão entre conceitos. Como método, ela é muito importante nos processos de compreensão, descoberta e generalização em matemática. Por exemplo, alguns objetos tetradimensionais podem ser "compreendidos" por analogia com seus correspondentes tridimensionais: é o caso da hiperesfera e do hipercubo. Aliás, talvez seja mais correto afirmar que a definição desses objetos tetradimensionais só seja possível por analogia com os correspondentes tridimensionais.

Um outro exemplo é a analogia entre as funções trigonométricas e as hiperbólicas, analogia que força a descoberta dos números perplexos. Vejamos: os números complexos são números da forma x + iy com a e b números reais e $i^2 = 1$. Identificando esses números com os pontos (x , y) do plano cartesiano, podemos estabelecer uma relação íntima com as funções trigonométricas cosseno e seno através de sua representação em coordenadas polares, isto é, se $x^2 + y^2 > 0$, então, x = r cos e y = r sen, sendo r a distância do ponto (x , y) a origem e o ângulo que forma esse ponto com a parte positiva do eixo x. Por outro lado, em um primeiro curso de Cálculo, definem-se as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, através da função exponencial, da seguinte maneira: cosh = (e + e)/2 e senh = (e e)/2. Então, por analogia com a relação entre as funções trigonométricas e os números complexos, é possível definir, para as funções hiperbólicas, um sistema de números, os chamados números perplexos, que em certa forma reproduzam essa relação. Esses números são da forma x + jy com x e y reais e $j^2 = 1$, e surgiram na matemática, devido a motivações físicas, no início dos anos 80 do século XX. Uma das manifestações dessa analogia é a representação hiperbólica que esses números admitem, análoga à representação polar dos números complexos: por exemplo, no caso de termos $x^2 \quad y^2 > 0$ e $x > 0$, temos $x = r$ cosh e $y = r$ senh (aqui r e tem outra significação). Em conseqüência disso, os números perplexos estão às funções hiperbólicas como os números complexos estão às funções trigonométricas (CIFUENTES, 2003).

Já um típico uso do contraste por diferença, na matemática, é dado através do conceito de *contra-exemplo*. Um contra-exemplo pode ilustrar por quê uma determinada propriedade é satisfeita em alguns casos e em outros não ou que hipóteses são necessárias e que outras não o são.

Uma forma de medir a intensidade do contraste, por exemplo em geometria, é através da *proporcionalidade*. Ela mede, através do conceito matemático de “proporção”, o contraste de dimensões entre figuras e trata de capturar quantitativamente relações qualitativas como o grande em relação ao pequeno. Talvez, o contraste seja, ao longo da história, o primeiro elemento estético em ser transformado em “grandeza” matemática mediante a noção de proporcionalidade.

4.4 A Seqüencialidade

Uma das características estéticas mais importantes, motivada pelas seqüências, é o que nós chamamos de *seqüencialidade* ou *serialidade*, ela manifesta o caráter de narrativa de uma seqüência. Na arte, a serialidade manifesta-se quando o artista cria uma *série* sobre o “mesmo” tema. Na realidade nunca é o mesmo. Uma das séries mais famosas é a da Catedral de Rouen de Monet. Na interpretação da arte, uma série traduz a experiência de tempos vivenciados pelo artista através de “formas rítmicas da imagem” (OSTROWER, 1998, p. 75). Para nós, a criação de uma série pode ser interpretada como a procura do conhecimento de um objeto, conhecimento que só poderia ser atingido no limite infindável da prolongação dessa série. Toda série finita, considerada como fragmento inicial de uma possível série infinita, é só uma aproximação a esse conhecimento.

No ensino da matemática, a serialidade, também chamada de *seriação*, manifesta-se também na resolução de exercícios similares com o intuito de induzir no aluno a fixação de conceitos e a criação de novas situações que lhe permitam captar o objeto através da formação de padrões, e assim conquistar seu conhecimento sobre o conteúdo proposto.

4.5 A Simplicidade e a Abstração

A *simplicidade*, como já foi salientado, é outra característica estética da matemática. Diversos exemplos ilustram esse fato, e talvez o mais importante deles seja, como visto acima, *o método axiomático*. O princípio de simplicidade remonta-se aos gregos para quem o mundo natural devia satisfazer um ideal de perfeição e simplicidade.

A simplicidade também aparece no momento da escolha da "melhor" aproximação à solução de um problema, como no caso da predição de seqüências ou na determinação das curvas de ajuste para coleções discretas de dados. A própria "conclusão" de um raciocínio por indução ou por analogia pode ser considerado um fenômeno de predição e, portanto, regido pelas leis da simplicidade.

Ainda, no caso das seqüências, a aceitação de uma seqüência infinita como coisa terminada, é também um recurso de simplicidade. A existência dos números irracionais tem esse *status*.

Intimamente ligada à simplicidade está a *abstração*, talvez uma das características fundamentais da matemática e aparentemente a mais racional. Essa falsa aparência pode ser evidenciada, por exemplo, na música, pois, mesmo sendo abstrata tem um conteúdo que pode ser qualificado de alegre, triste, romântico, caótico, etc., isto é, emocional.

Em contraposição com *o concreto*, podemos aventar a idéia de que um objeto matemático pode ser considerado *abstrato* se não depender de um contexto espaço-temporal, enquanto será concreto se depender de um tal contexto. Um exemplo interessante da diferença entre o abstrato e o concreto, segundo o sentido dado acima a esses termos, pode ser encontrado na diferença entre um número inteiro e sua representação num determinado sistema de numeração. O número, digamos 75, é um ente abstrato, enquanto que sua representação em um determinado sistema de numeração, digamos em base 10 (75) ou em base 2 (1001011), é claramente contextualizada num certo tipo de espaço, pois a notação posicional (unidades, dezenas, centenas, ...) depende da configuração espacial dos algarismos.

5. Conclusão: Visualização e Realidade

Para finalizar faremos uma breve reflexão sobre a *visualização* como mecanismo de expressão de uma linguagem visual. Visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo processo de abstração. O ímpeto da visualização nos permite "ver", por exemplo, o infinito atual. A visualização é um processo de singularização ou exemplificação, mantendo a universalidade. Como dizíamos antes, a visualização permite "ver" mais padrões do que objetos. Esse processo é utilizado sempre que dizemos, por exemplo, "seja x fixo, porém arbitrário" no início de uma demonstração, ou quando distinguimos constantes arbitrárias de variáveis. Um dos desafios da matemática do século XXI será tornar a visualização em argumento de demonstração. Nesse caso, a visualização será o principal mecanismo para "ver" a verdade de um resultado matemático sem recurso à demonstração lógica. As demonstrações visuais farão uso possivelmente de uma linguagem visual apropriada, envolvendo também meios computacionais, os quais podem pôr em evidência a expressividade artística da matemática. Um precursor desse tipo de demonstrações visuais com recursos computacionais é a famosa prova do "teorema" das quatro cores, o qual, expresso em forma abreviada, afirma que bastam quatro cores para pintar qualquer mapa planar, e esse é o menor número possível para tal efeito.

A linguagem visual a que fazemos referência, ainda deverá adaptar, para a matemática, termos como "regularidade", "simetria", "sutileza", "variação", "profundidade", "singularidade", "fragmentação", "distorção" (este último, por exemplo, em contraposição a "exatidão"), dentre outros (DONDIS, 1999, p. 24). A *variação*, por exemplo, pode ser entendida como a manifestação da existência de diversas demonstrações para um mesmo resultado matemático. A *profundidade* pode ser evidenciada através de exemplos como as demonstrações de resultados que escapam ao contexto do seu enunciado. Um caso de destaque é o teorema fundamental da álgebra, o qual, aparentemente, não tem uma demonstração puramente algébrica sugerindo, então, relações inesperadas entre diversos campos da matemática. A *singularidade*, segundo Dondis (1999, p. 156), eqüivale a focalizar, numa composição, um tema isolado e independente. No caso da matemática, a singularidade manifesta-se, por exemplo, nos resultados que usualmente são chamados de "lemas" em relação a outros teoremas, pois eles chamam a atenção para certas características localizadas desses teoremas. Em fim, *o estilo* em matemática seria a síntese de todos esses elementos.

Finalmente, todo conceito de visualização remete a uma certa "realidade", pois "a realidade é a experiência visual básica". Admitir isso nos compromete a adotar alguma postura filosófica acerca da realidade matemática, e ela pode ser platonista, construtivista, etc. Uma discussão nessa direção se faz necessária para dar conteúdo semântico à linguagem visual da matemática esboçada nestas linhas.

Referências Bibliográficas

BACHELARD, G. **O Novo Espírito Científico.** 3ª Ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2000.

CIFUENTES, J. C., NEGRELLI, L. G. & ESTEPHAN, V. M. Apreciar la Matemática vs. Comprender la Matemática: Un Debate Didáctico. In: **Anais da V Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul.** Santiago Chile, 2000. Publicado em CD-ROM.

CIFUENTES, J. C. Fundamentos Estéticos da Matemática: Da Habilidade à Sensibilidade. In: M. A. V. Bicudo (Org.). **Filosofia da Educação Matemática: Concepções e Movimento.** Brasília: Ed. Plano, 2003, p. 59-79.

CIFUENTES, J. C. **O Método de Analogia na Construção do Conhecimento Matemático I**: A Matemática dos Números Complexos a Matemática dos Números Perplexos**.** Minicurso na XI Semana da Matemática da UFPR, 2003, 35p.

COURANT, R. & ROBBINS, H. **Qué es la Matemática?** Madri: Aguilar, 1955.

DIDEROT, D. De la Grâce, de la Négligence et de la Simplicité. In: **Traité du Beau, suivi de Essai sur la Peinture et Pensées Détachées sur la Peinture.** Verviers: Éd. Gérard, 1973, pp. 177-179.

DONDIS, D. A. **Sintaxe da Linguagem Visual.** São Paulo: Martins Fontes, 1999.

GOODMAN, N. Ciência e Simplicidade. In: S. Morgenbesser (Org.). **Filosofia da Ciência** São Paulo: Ed. Cultrix, 1975.

OSTROWER, F. **A Sensibilidade do Intelecto.** Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1998.

PEDOE, D. **La Geometria en el Arte.** Barcelona: Ed. Gustavo Gili, 1979.

POLYA, G. **Matemáticas y Razonamiento Plausible.** Madri: Ed. Tecnos, 1966.