Sugestão Para Sua Aula

Números e Geometria com Dobradura de Papel

José Antonio Novaes
Professor, UERJ
novaesja@globo.com

Resumo
Nesta seção usaremos a técnica do Origami para desenvolver atividades, já testadas em salas de aula, que podem levar os alunos, num primeiro momento, a conjecturas sobre ângulos opostos pelo vértices, ângulos formados por paralelas cortadas por transversais. Num segundo momento, trataremos do estudo dos números e desenvolveremos atividades que permitam comparações, adição, subtração e multiplicação de frações e estudar frações equivalentes. Em seguida abordaremos o estudo de alguns números irracionais do tipo $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ Concluiremos abordando uma construção, com origami, do segmento áureo.

Palavras-chave: Origami, Geometria, Números, Atividades

Introdução

Há muito tempo que se buscam atividades docentes que levem os alunos de matemática a fazer conjecturas para determinados resultados e posterior demonstração. Neste artigo são apresentadas algumas atividades que atendem a estes desejos. Na 1ª parte trabalha-se com dois resultados que quase todo professor desenvolve, quando tem que ensinar geometria. São os resultados de congruência dos "Ângulos Opostos pelo Vértice e o Sistema Formado Por Duas Retas Paralelas e Uma Transversal". Como o título diz, isto é feito com dobraduras de papel. Aliás, o Origami foi escolhido por utilizar material de baixo custo – podemos reaproveitar papéis.

Na 2ª parte trabalha-se frações e busca-se claramente o entendimento de adições e multiplicações de frações, antes de se falar em algoritmo para estes cálculos. Ainda apresenta-se uma elegante divisão de um papel quadrado em 5 partes iguais.

Na 3ª parte trabalha-se com os números irracionais. Mostra-se como podemos construir os números irracionais a partir de uma simples folha de papel de lados paralelos. Para terminar esta parte visita-se um pouco do lado artístico da matemática e desenvolve-se um pouco a conhecida Divina Proporção. Tudo é claro usando as técnicas do Origami.

Na última parte apresenta-se um desafio com um resultado muito interessante que obtemos fazendo uma série de dobraduras pelas bissetrizes de ângulos, obtida por dobraduras, em uma folha de papel de lados paralelos.

1ª Parte – Ângulos com dobraduras

Objetivos

Nesta 1ª parte, com a utilização das técnicas de origami (dobradura de papel) realizaremos atividades que visam a:

- Construção de idéia de ângulo.
- Relações posicionais, relativas a paralelas cortadas por transversais, entre ângulos.
- Propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e de ângulos formados por um sistema de paralelas cortadas por transversal.

Material necessário

Papel, lápis de cor e régua.

Atividade 1

a) Tome uma folha de papel. Dobre-a, de modo que as bordas da folha não coincidam. Vinque bem.
   Que figura geométrica a linha de dobra sugere?
b) Abra a folha de dobre-a novamente de forma que não coincida com a dobra anterior, mas a intercepte.
c) Quantas regiões as linhas de dobras determinam no papel?
d) Há regiões iguais? Quais?

Obs. Neste momento há possibilidade de respostas diferentes. Se o aluno se prende ao papel dirá não – caso mais freqüente. Se ele abstrai do papel para o plano dirá sim. No caso da resposta negativa devemos propor que imaginem o papel ilimitado.

e) Que figura geométrica cada região sugere?
f) Que figura geométrica todas as regiões sugerem?

g) Dobre o papel pelo ponto de interseção das linhas de dobras e de tal maneira que uma linha fique sobre a outra.
h) O que você conclui? Justifique.
i) Faça um desenho correspondente.

Atividade 2

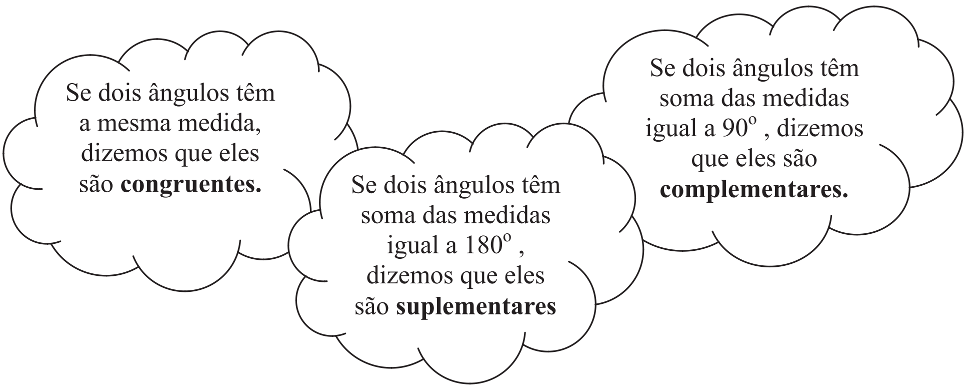
a) Tome uma tira de papel de lados paralelos e faça nela uma dobra inclinada de modo que forme ângulos com os dois maiores lados paralelos.
b) Abra a tira. Que elementos matemáticos sugerem;
   i) Os maiores lados do papel? ii) A linha de dobra?
c) Dobre o papel pela linha de dobra. Olhando apenas um lado, quantos ângulos você vê? Quantos são formados pela linha de dobra e os maiores lados do papel? Marque-os.
d) Dobrando o papel para trás, una os vértices dos ângulos marcados.
e) Sem separar os vértices, abra um capuz. O que você conclui?

Atividade 3

a) Abra o papel da atividade 2 e desenhe a figura que você vê prolongue, nos dois sentidos, o segmento transversal.
b) Pinte de azul os ângulos agudos, que são internos em relação às retas paralelas e, alternos em relação à reta transversal.
c) Que relação métrica existe entre os ângulos pintados de azul?
d) Pinte de amarelo os ângulos obtusos, que são internos em relação às retas paralelas e, alternos em relação à reta transversal.
e) Que relação métrica existe entre os ângulos pintados de amarelo?
f) Há alguma relação entre um ângulo pintado de amarelo e um ângulo pintado de azul? Escreva-a.
g) Pinte de vermelho os ângulos agudos externos e alternos.
h) Pinte de verde os ângulos obtusos externos e alternos.
i) Que relação métrica existe entre os ângulos pintados de verde e um pintado de vermelho?

j) Num sistema de retas paralelas cortadas por transversais, que relação existe entre um ângulo agudo e um ângulo obtuso qualquer?

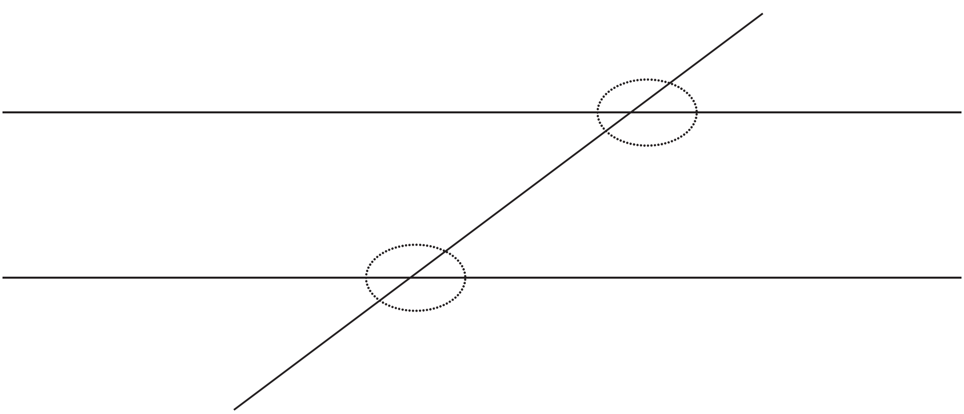
Vamos dar nomes?!...



l) Considere a figura abaixo e complete a tabela classificando os pares de ângulos:

(a) Usando as palavras: alternos ou colaterais e internos ou externos

(b) Usando as palavras congruentes ou suplementares.



Ângulos	Alternos/colaterais	Internos/externos	Suplementares/congruentes
e			
e			
e			
e			
e			
e			

2ª parte - Números racionais com dobraduras

Objetivos

Nesta 2ª parte, com a utilização das técnicas de origami (dobradura de papel) realizaremos atividades que visam a:

Construção de números racionais (frações)

Comparação, adição e multiplicação de racionais.

Material necessário

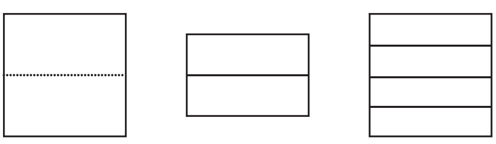
Papel, lápis de cor e régua.

Atividade 1

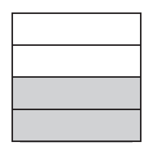
a) Dobre um quadrado juntando um lado com o lado oposto (você está determinando a mediatriz de um lado), vincando bem. Desdobre e pinte uma das partes determinadas pela linha de dobra.

Que fração do quadrado você pintou? Faça uma figura que represente o papel depois de pintado e registre a fração ao lado.

b) Dobre outro quadrado ao meio, como o anterior, e desdobre. Dobre cada lado do papel paralelo à linha de dobra até esta.



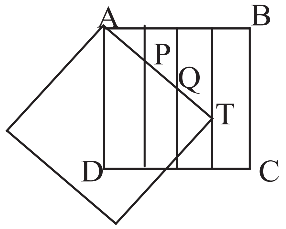
Você acabou de dividir o quadrado em 4 partes iguais.



Pinte 2 destas partes. Que fração do quadrado está representada?

O que é maior, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$?

Pra dividir um papel quadrado em três partes podemos usar o seguinte método: dobre um papel em 4 partes. Faça um dos vértices de outro papel quadrado, congruente ao primeiro, coincidir com o vértice A do papel que você dobrou em 4 partes e um outro vértice coincidir com a 3ª linha de dobra. Veja a figura.



Observe que AP = PQ = QT

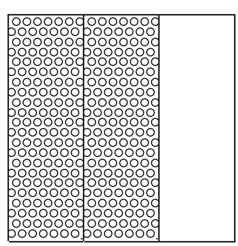
Este método é uma simples aplicação de um resultado conhecido como "Lei segmentar de Tales". Podemos usá-lo para dividir um papel em qualquer número de partes. Para isso devemos escolher uma potência de 2 maior que o número de partes desejadas.

c) Dobre um quadrado congruente ao do item (a) em três partes iguais. Pinte uma das partes. Quanto esta parte pintada é do quadrado?

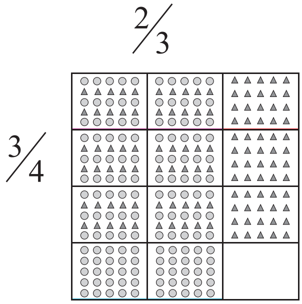
d) Coloque justapostas as partes pintadas dos itens (a) e (c) sobre outro papel quadrado congruente a eles. Pinte a parte totalizada $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ no 3º quadrado. Que fração do 3º quadrado está pintada?

e) Usando apenas quadrados determine o valor de $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$

f) Dobre um papel quadrado em três partes. Pinte duas destas partes de azul, use lápis de cor, como na figura abaixo.



Pelo lado que ainda não foi dobrado, dobre o mesmo papel em 4 partes e pinte três destas partes de vermelho.

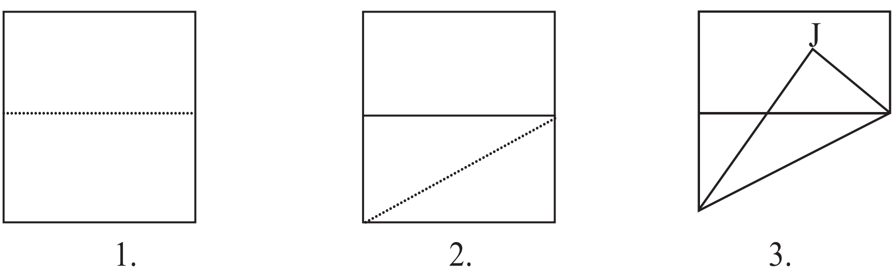


Que fração do papel tem junto circulos e triângulos? Que operação nós acabamos de realizar? Indique a expressão e o resultado. (lembre do modelo que dá a área de um retângulo).

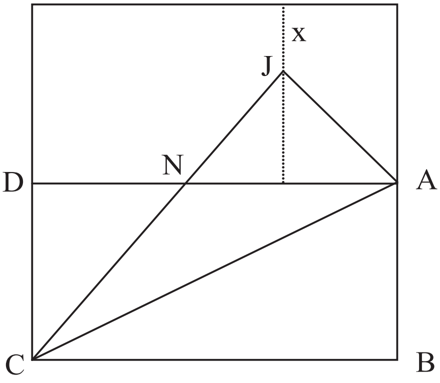
Uma elegante divisão em 5 partes iguais

1. Dobre um papel quadrado pela mediatriz do lado.
2. Em seguida dobre pela diagonal de um do dois retângulos que ficaram determinados pelos lados do papel e pela linha de dobra.

Marque o ponto J, que o vértice do papel determina no interior do quadrado. A distância deste ponto ao lado mais próximo dede $\frac{1}{5}$ do lado.



Vamos mostrar que a distância de J ao lado mais próximo mede o lado dividido por 5. Na figura abaixo denotando $BC = x$ $\quad \frac{l}{5}$



O ângulo $A\hat{C}B \equiv A\hat{C}N$ por construção com dobradura.

Os ângulos $B\hat{C}A \equiv C\hat{A}N$ pois são alternos e internos.

Logo $C\hat{A}N \equiv A\hat{C}N$ ACN é isósceles. Portanto AN = CN.

O JAN é retângulo em J.

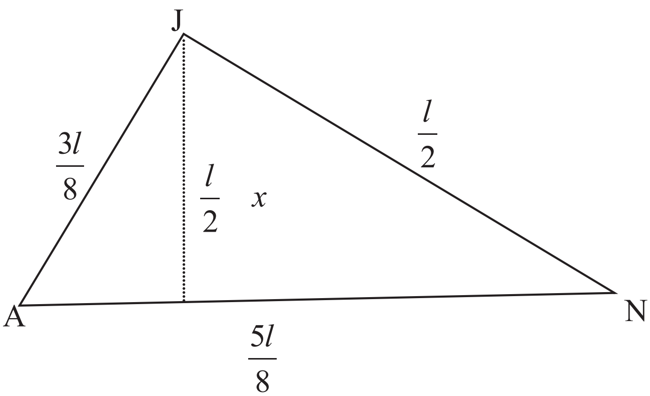
CJ = l NJ = l – CN = l – AN.

Além disso: $AJ = \frac{l}{2}$.

Usando Pitágoras:

$(AN)^2 \quad (l \quad AN)^2 \quad (\frac{l}{2})^2$. Daí concluímos que $AN \quad \frac{5l}{8} \quad NJ \quad \frac{3l}{8}$.

Destacando JAN temos: $\frac{l}{2} \quad x \; .\frac{5l}{8} \quad \frac{3l}{8}.\frac{l}{2}$



Simplificando obtemos:

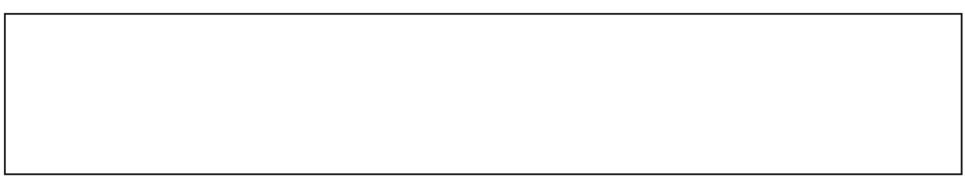
$5 \; \frac{l}{2} \quad x \quad \frac{3l}{2}$

daí: $\frac{5l}{2} \quad 5x \quad \frac{3l}{2}$

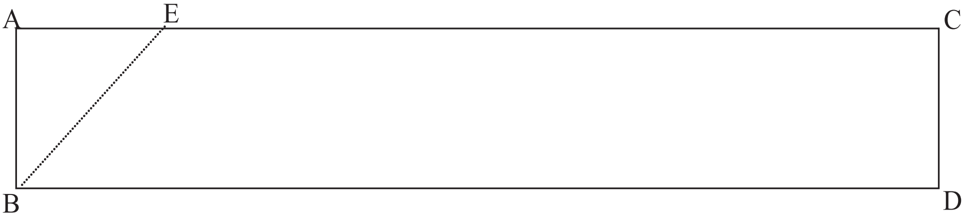
Finalmente concluímos que $x \quad \frac{l}{5}$.

3ª parte - Alguns números irracionais

a) Tome uma tira de papel de lados paralelos. Tome cuidado para que esta tira seja um retângulo conforme figura abaixo.



b) Dobre o papel pela linha pontilhada, conforme o indicado na figura. O ângulo ABE deve ser congruente ao ângulo EBD.



c) O segmento $\overline{BE}$ é chamado "bissetriz do ângulo $A\hat{B}D$". Quanto mede $A\hat{B}E$?

d) Marque no $\overline{BD}$ o ponto F que o ponto A determinou quando foi realizada a dobra por $\overline{BE}$

e) Considerando $\overline{AB}$ como unidade, quanto mede $\overline{BF}$? Qual é o valor de $\overline{BE}$?

f) Dobre a tira de papel pela bissetriz de $E\hat{B}D$, determinando assim o ponto M. Confira a figura abaixo. Observe que os pontos E e M devem coincidir quando o papel estiver dobrado.

g) Dobre a tira pela diagonal BN do retângulo ABMN. Quanto mede $\overline{BN}$? Dobre a tira pela bissetriz de $N\hat{B}M$, determinando assim o ponto P.

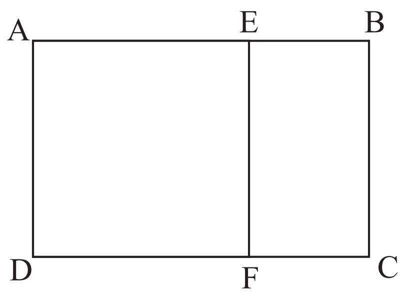
Parabéns! Você acabou de construir, usando dobraduras, os pontos M e P que têm como abscissa os números $\sqrt{2}\ e\ \sqrt{3}.$ Tente outros números irracionais. Compare com as construções com régua e compasso. Experimente e descubra como é bom aprender novas técnicas!

O segmento e áureo e a razão áurea

A seguir vamos trabalhar um pouco com alguns conceitos que formam umas das mais lindas páginas da história da matemática. Estes conceitos estão associados às coisas práticas como cartões de créditos, reprodução de coelhos, crescimentos de árvores e razões que se repetem nas flores e até no corpo humano. Não é nosso interesse aprofundar este assunto mas despertar a curiosidade de cada um.

"*Dizemos que um retângulo é áureo quando retirando dele um quadrado, de lado igual ao menor lado do retângulo, o retângulo que resta é semelhante ao retângulo original*".

Assim:



Os retângulos ABCD e EBCF são semelhantes. Chamando AB de **x** e AE de **a** , dizemos:

a) **a** é o segmento áureo de x e,
b) **x/a** é a razão áurea.

Com os valores acima temos EB = **x – a** e da semelhança de retângulos vem:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a} \Rightarrow x^2 - ax = a^2 \Rightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$$

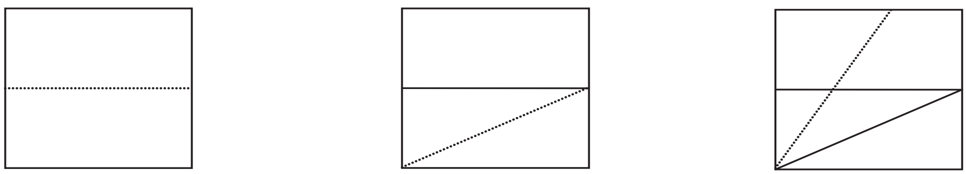
Resolvendo a equação do segundo grau em x, obtemos:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

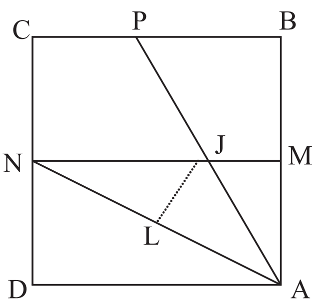
Como só temos valores positivos a solução $x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2}$ é estranha ao problema portanto $x = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$ é a solução que nos interessa. Daí $\frac{x}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é o valor da razão áurea.

Construção do segmento áureo com dobradura

a) Dobre um papel quadrado pela mediatriz do lado e desdobre. (lado com lado oposto)
b) Dobre um dos retângulos pela diagonal e desdobre. Esta diagonal determina dois ângulos de medidas diferentes.
c) Dobre o papel pela bissetriz do maior ângulo. O maior segmento determinados no lado oposto é o segmento áureo do lado. Veja as figuras na página seguinte.



Devemos mostrar o que acabamos de afirmar. Para isto vamos repetir a última figura e dar nomes aos pontos.



Chamando PB de **a** e AB de **x**, temos por semelhança que MJ = $\frac{a}{2}$ e daí NJ = $x \quad \frac{a}{2}$.

Seja JL a altura do triângulo JAN. Os triângulos AMN e JLN são semelhantes. Daí´, concluímos que:

$$\frac{AN}{ND} \quad \frac{JN}{JL} \text{ (1)}$$

Por Pitágoras é fácil concluir que $AN \quad \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Como os triângulos AMJ e AJL são congruentes, JL = MJ. Daí:

$$\frac{\frac{x\sqrt{2}}{5}}{\frac{x}{2}} \quad \frac{x \quad \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \qquad \frac{ax\sqrt{5}}{4} \quad \frac{x^2}{2} \quad \frac{ax}{4}$$

Simplificando (divisão por x e multiplicação por 4) temos:

$$a\sqrt{5} \quad 2x \quad a \qquad \frac{x}{a} \quad \frac{1 \quad \sqrt{5}}{2}$$

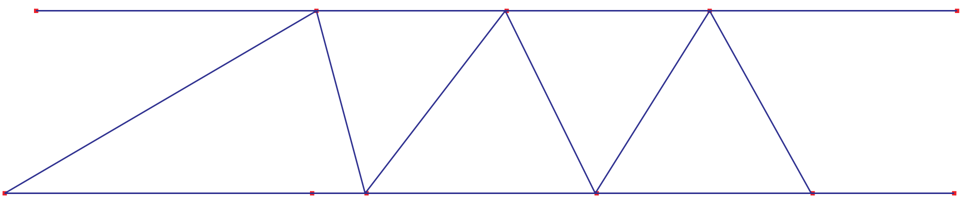
Que é a nossa afirmação.

O segmento áureo aparece em muitas construções geométricas. Só para exemplificar citaremos duas.

1. O lado do pentágono regular é igual ao segmento áureo da diagonal do mesmo.
2. O lado do decágono regular é igual ao segmento áureo do raio do círculo circunscrito ao decágono.

Momento Final

A figura abaixo representa doas retas paralelas. Tome uma tira de papel de lados paralelos e faça nela um dobra qualquer. Assim você obtém o segmento de reta AB. Dobre pela bissetriz do ângulo



Agora responda às perguntas:

1) O triângulo ABC e equilátero?
2) E o triângulo EFG? Você apostaria que não?

Vamos provar que esta seqüência de triângulos converge para um triângulo equilátero.

Seja $_0$ a medida do ângulo $B\hat{A}C$ e $_1$ a medida do ângulo $A\hat{B}C$ então temos:

$$_1 \quad \frac{\quad _0}{2} \quad \frac{}{2} \quad \frac{_0}{2}$$

Chame de $_2$ a medida do ângulo $B\hat{C}D$, então:

$$_2 \quad \frac{\quad _1}{2} \quad \frac{\frac{\quad _o}{2}}{2} \quad \frac{}{2} \quad \frac{}{4} \quad \frac{_0}{4}$$

Continuando assim, obtemos:

$$_n \quad \frac{}{2} \quad \frac{}{4} \quad \frac{}{8} \quad \frac{}{16} \quad \cdots \quad (\ 1)^{n\ 1}\frac{}{2^{n}\ _1} \quad (\ 1)\frac{_0}{2^n}$$

A última igualdade é a série geométrica de razão um meio e primeiro termo $\frac{}{2}$ que

todos sabemos dá $\lim_n \quad _n \quad \frac{}{3}$

Bibliografia

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

FUSÈ, Tomoko. **Unit origami.** Tokyo, New York: Japan Publica-tions, 1990.

GILBERT, William. **A cidade de Origami.** São Paulo: Nobel, 2001.

GÊNOVA, A. Carlos. **Tangram em Origami.** São Paulo: Global, 1990.

GÊNOVA, A. Carlos. **Introdução à composição modular.** São Paulo: Global, 1990.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros.** Niterói: EdUFF, 1998.

KASAHARA, Kunihiko. **Origami omnibus**. Tokyo, New York: Japan Publications, 1967.

KASAHARA, Kunihiko. **Origami made easy.** Tokyo, New York: Japan Publica-tions, 1973.

NOVAES, José Antonio; VIEIRA, Maria da Conceição; DAVID, Maria Ignês Rocha; CASTRO, Mônica Rabello; RESENDE, Nelson de Mello. **Cadernos de Exercícios / Matemática.** Rio de Janeiro: Cap-UERJ, 2003.