

Ensino Questionador Orientado da Matemática: Exemplos de Professores

Olive Chapman

Universidade de Calgary, Canadá
chapman@ucalgary.ca

Tradução: Rosa Maria Mazo Reis

UCP, UNESA
mazoreis@ism.com.br

Resumo

De modo a ajudar os alunos a aprender Matemática com compreensão e a desenvolver o raciocínio matemático, lhes deve ser permitido resolver problemas desafiadores, explorar padrões, formular e conferir conjecturas, raciocinar e se comunicar matematicamente. Uma perspectiva questionadora de ensino pode providenciar uma maneira significativa de se obter isso numa aula de Matemática. Esse artigo discute abordagens questionadoras de ensino que podem fazer a diferença na maneira com que os alunos aprendem Matemática. Ele contém cinco exemplos de abordagens de ensino que os professores foram capazes de incorporar em sua prática de modo a orientá-la pelo questionamento. Essas abordagens incluem modelos de ensino questionador desenvolvidos e utilizados por professores, e atividades de aprendizado baseadas em análise dos erros matemáticos dos alunos, comparando exemplos com não-exemplos, investigando exemplos resolvidos, e questionamentos orientados, perguntas e proposições. Eles são expostos como um estímulo encorajador para que os professores continuem, ou comecem, a modificar o seu ensino de modo a promover o aprendizado significativo por seus alunos.

Palavras-chave: Ensino de matemática, atividades questionadoras, compreensão conceitual, aprendizado construtivista, modelos de ensino.

Inquiry-Oriented Teaching of Mathematics: Examples from Teachers

Abstract

In order to help students to learn mathematics with understanding and to develop mathematical thinking, they should be allowed to solve challenging problems, explore patterns, formulate and check conjectures, reason, and communicate mathematically. An inquiry teaching perspective can provide a meaningful way of accomplishing this in the mathematics classroom. This paper discusses inquiry-oriented teaching approaches that could make a difference to how students learn mathematics. It provides five examples of teaching approaches teachers have been able to incorporate in their teaching to make it more inquiry-oriented. These approaches include models of inquiry teaching developed and used by teachers and learning activities based on analyzing students' mathematical errors, comparing examples versus non-examples, investigating solved examples, and inquiry-oriented questioning and prompts. They are offered as a stimulus to encourage teachers to continue to, or start to, make changes to their teaching to promote meaningful learning in their students.

Key words: Teaching mathematics, inquiry activities, conceptual understanding, constructivist learning, teaching models

Introdução

Ao longo do século passado houve várias teorias diferentes sobre o que significa aprender e fazer matemática. Entretanto, a teoria que parece ter se perpetuado por professores através de seu ensino é a perspectiva behaviorista. Essa perspectiva trata alunos como recipientes vazios nos quais o professor despeja o conhecimento. Assim, o professor se concentra em dizer aos alunos o que e como fazer e os treina até que eles possam reproduzir o conceito ou procedimento do modo que o professor almeja, normalmente sem compreendê-lo profundamente. Vários docentes continuam a ensinar dessa forma, apesar dos esforços atuais de reforma do ensino da matemática promoverem teorias de aprendizado, como o construtivismo, que considera o aprendizado como um processo ativo envolvendo a construção do conhecimento através de nossas experiências, interpretação pessoal e construção de significado.

Na América do Norte, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) produziu documentos com padrões para reformar o currículo de matemática (NCTM, 1989), o ensino da matemática (NCTM, 1991), subsídios matemáticos (NCTM, 1995) e um documento atualizado nesses padrões (NCTM, 2000), todos estes refletindo a perspectiva construtivista do aprendizado. Por exemplo, NCTM (2000, p.5) afirma que alunos têm que aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios. O documento explica que quando alunos compreendem matemática, eles são capazes de usar o seu conhecimento de forma flexível. Eles combinam o conhecimento factual, facilidade procedimental e compreensão conceitual de maneiras poderosas. Aprender “o básico” é importante, entretanto, alunos que memorizam fatos ou procedimentos sem compreensão freqüentemente não estão certos de quando ou como eles devem usar o que sabem. Em contraste, a compreensão conceitual permite aos alunos lidar com situações-problemas inéditas. Eles podem resolver problemas que não haviam encontrado antes.

Baseado na perspectiva da reforma do aprendizado, ensinar matemática deve envolver abordagens que permitam que os alunos adquiram uma compreensão relacional e conceitual do conteúdo matemático e desenvolvam a habilidade própria para o pensamento matemático. NCTM (2000) aponta para o fato de que a instrução matemática deve fornecer experiências que encorajem e permitam que os alunos se tornem solucionadores de problemas matemáticos, se comuniquem matematicamente, e raciocinem matematicamente. Esse tipo de instrução deve incluir abordagens de ensino questionador. Como explicou NCTM (1991), uma sala de aula questionadora pode ser promovida engajando alunos em extensas

discussões matemáticas e os encorajando a raciocinar matematicamente. Antes de discutir exemplos de abordagens questionadoras, um rápido panorama do contexto em que esses exemplos se dão é fornecido a seguir:

Currículo Oeste Canadense de Matemática

No Canadá, nós não temos um currículo nacional de matemática. Nós temos currículos regionais ou provinciais. Entretanto, estes são muito semelhantes filosoficamente e são significativamente influenciados pelos documentos do NCTM citados na seção anterior desse artigo. Minha província é Alberta, que fica no Canadá Ocidental. Eu, portanto, forneço uma breve descrição do currículo oeste canadense de Matemática de modo a fornecer uma noção do contexto em que se espera que nossos professores trabalhem.

Em 1995-1996, as províncias do oeste do Canadá aprovaram um novo documento sobre as expectativas para o currículo matemático a ser cumprido em cada província e território. Esse documento, chamado “*Western Canadian Protocol – Common Curriculum Framework for K-12 Mathematics*,” incorpora uma filosofia sobre a matemática e o seu ensino que reflete os padrões do NCTM. Esse currículo afirma que: “Alunos aprendem agregando significado ao que fazem; e eles devem ser capazes de construir o seu próprio significado da matemática. O significado é melhor desenvolvido quando aprendizes encontram experiências matemáticas que articuladas do simples para o complexo e do concreto para o abstrato.” [Alberta Education, 1996, p.2]. As metas para os alunos incluem: “usar a matemática de forma confiante para resolver problemas e para se comunicar e raciocinar matematicamente” [Alberta Education, 1996, p.2]. O currículo também descreve a natureza da matemática em termos de nove características: mudança, constância, dimensão, número, padrão, quantidade, relações, forma e incerteza. O conteúdo é organizado em quatro temas: números, padrões e relações, forma e espaço e estatística e probabilidade. Finalmente, o currículo enfatiza sete processos matemáticos [Alberta Education, 1996, p.4], que são:

Resolução de problemas: Espera-se que os alunos relacionem e apliquem o novo conhecimento matemático através da resolução de problemas.

Comunicação: Espera-se que os alunos se comuniquem matematicamente.

Conexão: Espera-se que os alunos conectem as idéias matemáticas com os outros conceitos na matemática, com experiências cotidianas e com outras disciplinas.

Raciocínio: Espera-se que os alunos raciocinem e justifiquem seu pensamento.

Visualização: Espera-se que os alunos usem a visualização para assistí-los ao

processar informações, fazer conexões e resolver problemas.

Estimativas e cálculo mental: Espera-se que os alunos usem estimativas e cálculo mental sempre que apropriado.

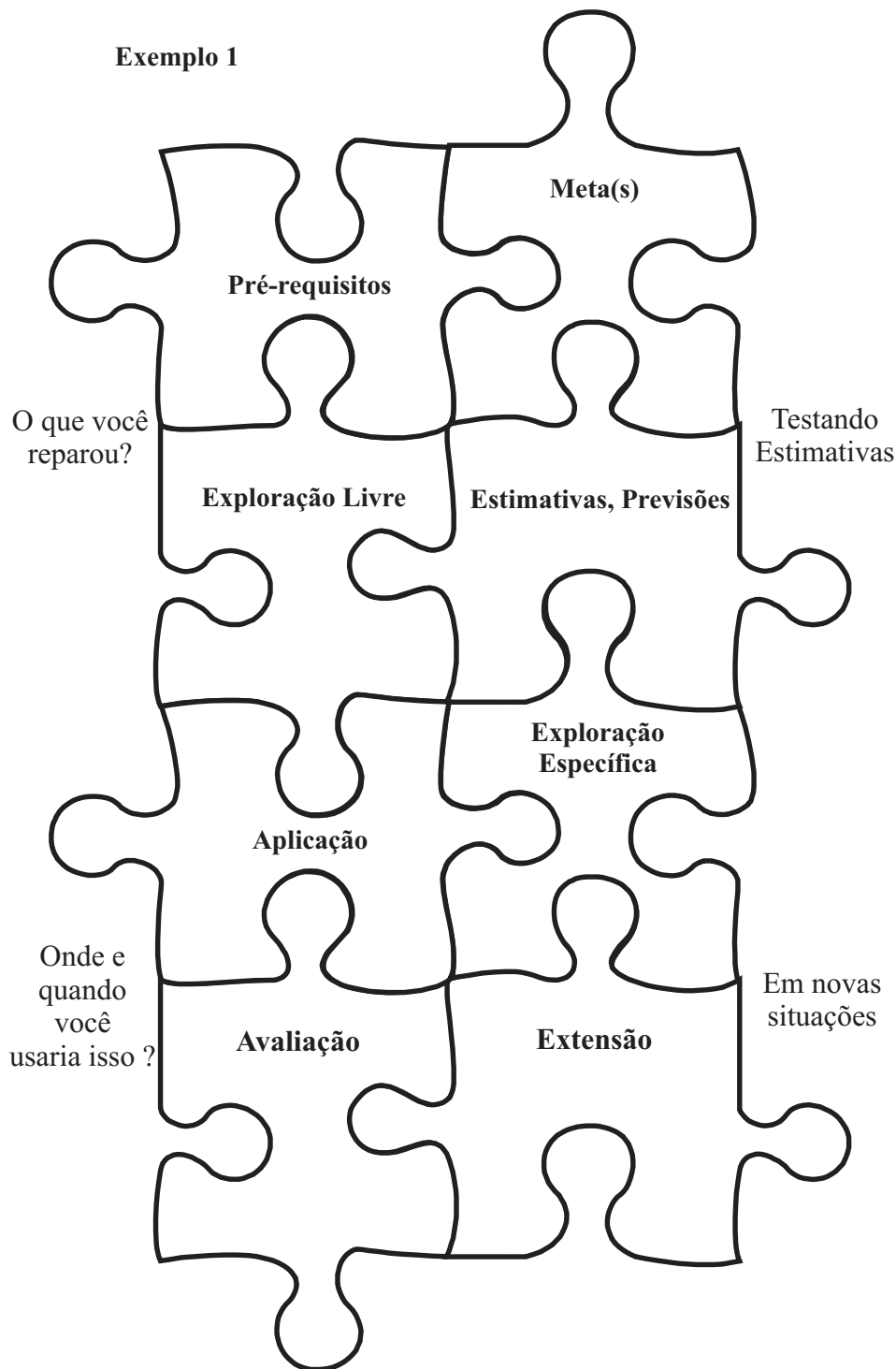
Tecnologia: Espera-se que os alunos selecionem e utilizem as tecnologias apropriadas como ferramentas na resolução de problemas.

Os currículos para as séries décima a décima segunda (Ensino Médio) também foram modificados significativamente em relação a categorizar os alunos conforme suas habilidades e interesses profissionais. As classificações anteriores foram substituídas por duas novas denominações: Matemática Pura e Matemática Aplicada. Matemática Pura é a versão revisada do que era anteriormente utilizado para o ramo mais apto ou acadêmico de alunos interessados em seguir carreiras relacionadas com a matemática. Matemática Aplicada é um novo currículo para substituir o anteriormente utilizado para aquele menos apto ou de matemática básica, com alunos não interessados em carreiras relacionadas com a matemática. As grandes diferenças entre os programas Matemática Aplicada e Matemática Pura são os tópicos estudados, e a abordagem para a resolução de problemas e a aquisição de conhecimento. Ambos os programas pretendem auxiliar os alunos a desenvolver a habilidade crítica de utilizar matemática, para encontrar soluções para problemas envolvendo situações de vida real. O programa de Matemática Aplicada é baseado em projetos e com o foco na aplicação da matemática na resolução de problemas. O intuito é que através de atividade desafiadoras e interessantes, os estudantes aprofundem suas habilidades em operações matemáticas e na compreensão de conceitos. Cursos de Matemática Pura enfatizam a linguagem especializada da álgebra como método preferido para o aprendizado de conceitos matemáticos e resolução de problemas. O intuito é que os alunos aprendam sobre teorias matemáticas, encontrem soluções exatas para equações, e usem o raciocínio matemático formal e modelos para a resolução de problemas.

Em Alberta, esse currículo foi implementado do ensino infantil ao fundamental (K até 9) em 1996-1997, e para o ensino médio (10 até 12 anos) em 1998-2000. Os professores com quem trabalho têm como objetivo implementar esse currículo e estão de acordo com sua filosofia. Isso é um desafio para muitos profissionais porque, como dito na introdução desse artigo, eles teriam que adotar abordagens de ensino consistentes com as metas de aprendizagem do currículo, por exemplo, abordagens questionadoras. Entretanto, alguns docentes foram capazes de incorporar abordagens no seu ensino de modo a torná-lo mais questionador. O restante deste artigo fornece cinco exemplos destas abordagens questionadoras para o ensino.

Exemplos de Abordagens Questionadoras para o Ensino

Exemplo 1



Esse exemplo é um modelo de ensino questionador desenvolvido e utilizado por um grupo de professores experientes que trabalharam comigo para ajudá-los a aprimorar o seu ensino de matemática. O modelo exige que o professor faça o seguinte:

1. Identifique *metas* de aprendizagem para a aula que incluam metas de compreensão conceitual, por exemplo, “os alunos aprenderão porque multiplicar dois números negativos resulta num número positivo”.
2. Verificar nos alunos, para o conceito a ser ensinado, o conhecimento *pré-requisito*, por exemplo, o quê os alunos sabem sobre o significado da multiplicação de dois números naturais se a aula for sobre números inteiros.
3. Fazer com que os alunos façam *estimativas* sobre os possíveis resultados relacionados com o conceito, por exemplo, estimar o que acontecerá quando eles multiplicam dois números negativos.
4. Permitir que os alunos abordem na *exploração livre* do conceito, por exemplo, dar aos estudantes blocos de duas cores diferentes para explorar como eles podem utilizá-los para representar e multiplicar inteiros sem qualquer auxílio do professor.
5. Engajar os alunos na *exploração específica* de um conceito, por exemplo, os alunos tentam modelar exemplos específicos de multiplicação de números inteiros com blocos coloridos guiados pelo professor, comparando os resultados com as estimativas, relatando resultados e tirando conclusões sobre o conceito.
6. Fazer com que os estudantes trabalhem numa *aplicação* do conceito.
7. Engajar os alunos na *avaliação* do seu aprendizado, por exemplo, reflexão e discussão sobre o que eles acham que agora sabem sobre a multiplicação de inteiros.
8. Sugerir uma *extensão* do conceito para outras situações ou conceitos relacionados, por exemplo, multiplicação de duas frações negativas.

O modelo tem a forma de quebra-cabeça porque os docentes acharam que as peças poderiam ser organizadas de modos diferentes, e algumas combinadas ou omitidas, dependendo do assunto. As peças, portanto, representam diferentes componentes que eles acreditaram serem importantes no ensino questionador. O

modelo também inclui duas das perguntas chave que os professores utilizaram para engajar os alunos no processo questionador, que são, “O que você reparou?” e “Onde e quando você usaria isso?”

Exemplo 2

Esse exemplo é um modelo de questionamento desenvolvido por uma turma de professores de matemática durante seu programa de formação continuada, onde algumas das aulas desenvolvidas foram usadas durante seu período de estágio.

Relacionar com conhecimentos e experiências já obtidas
 Explorar, criar, descobrir
 Relacionar, processamento
 Comunicar, aplicação
 Avaliar, reflexão

O modelo tem características similares ao modelo exposto no exemplo 1. Ele consiste numa série de palavras-chave que os alunos consideraram ser importante na condução de uma aula de questionamento baseada na maneira como eles o compreendem. Esse modelo exige que o professor:

1. Faça *conexões com conhecimentos e experiências já obtidas* pelos alunos
2. Permite que os discentes *explorem* um conceito usando tarefas investigativas de modo a *descobrir* por eles mesmos o significado de um conceito e *criar* o seu entendimento do mesmo.
3. Guiar os estudantes para que vejam *conexões* em sua exploração e para que *processem* o que eles estão aprendendo usando questões e proposições.
4. Fazer com que os alunos *comuniquem* os resultados obtidos por eles na exploração e que *aplique-no* a outros exemplos ou situações.
5. Fazer com que os alunos *avaliem* e *reflitam* sobre o seu aprendizado.

Exemplo 3

Esse é um exemplo de como um professor de sexta série leva seus estudantes a explorar um assunto baseado naquilo que já possui significado para eles. No começo, estudando equações simples para descobrir a incógnita, a professora começa com o conceito de “igual”.

Alunos são apresentados ao conceito e então solicitados a fazer perguntas que considerem importantes para se estudar tal conceito. A seguir algumas das questões elaboradas:

- ✓ O que significa igual?
- ✓ Porque isso é sempre utilizado em Matemática?
- ✓ Como igual é utilizado na vida, não na Matemática?
- ✓ Como se usa igual?
- ✓ Quando se usa igual?
- ✓ Porque igual é representado por dois traços?
- ✓ Quando igual foi descoberto?
- ✓ Quando foi utilizado pela primeira vez?
- ✓ Que matemático explorou o conceito de igual?
- ✓ Qual é o outro símbolo utilizado para igual além de =?
- ✓ Quais são as outras palavras para igual?

Essas questões são base para maiores questionamentos, pesquisa (por exemplo, procurando na Internet, perguntando a matemáticos) para se obter respostas adequadas.

Exemplo 4

Esse é um exemplo de como uma professora usa uma abordagem questionadora para ensinar uma unidade em sistemas de equações. Um resumo de toda a unidade, ao invés de uma única aula, é apresentado por causa do modo com que o assunto se insere na unidade como uma parte integrante da mesma.

Uma semana antes de começar e discutir o tópico na aula, a professora pede aos alunos que colem gráficos que se interceptam de outras fontes que não sejam livros de matemática. Os gráficos não precisam ser necessariamente de retas. Eles podem ser qualquer tipo de gráfico com intersecção. Mas eles precisam estar representando uma situação de vida real.

Para a primeira aula da unidade de sistemas de equações lineares, os alunos trazem o material coletado e socializam com toda a classe. Eles passam todo o tempo da aula investigando e discutindo todos os gráficos coletados pela classe. Cada estudante mostra seu gráfico e fala sobre o que ele representa, o que as intersecções mostram, porque elas são importantes e porque alguém se interessaria em procurar a intersecção de um gráfico, num primeiro momento. Os gráficos coletados, em sua maioria, representam situações de negócios, economia ou física. Situações econômicas tendem a ser dominantes porque, de acordo com a professora, falam sobre dinheiro, que já possui um significado para os alunos. Para dever de casa, a professora dá para os alunos uma situação problema que solicita que se determine, se eles têm um trabalho de meio expediente, o que é melhor ter um salário fixo por hora ou um salário semanal mais comissão sobre certo período de tempo. Os alunos devem tentar resolver o problema da melhor maneira possível.

A segunda aula começa com a apresentação e discussão das soluções encontradas pelos alunos para o dever de casa. A professora coloca questões sobre como uma abordagem gráfica foi usada ou pode ser usada para resolver o problema, como o ponto de intersecção ou o *break even point* foi ou pode ser usado para analisar e solucionar o problema, e a relevância de se resolver sistemas de duas equações lineares em situações de vida real. A professora então salienta que, desde que eles [professora e alunos] tenham decidido que é importante procurar onde gráficos se interceptam, então eles vão estudar particularmente retas, equações lineares e suas intersecções. Ela pede aos alunos que voltem aos gráficos coletados e, para gráficos que envolvam duas intersecções entre linhas retas, que trabalhem em grupos para determinar as equações para cada conjunto de retas usando informações fornecidas pelos gráficos. Seguindo isso, a professora conduz uma discussão com toda a classe sobre o significado da representação algébrica no

contexto dessas aplicações e porque elas são úteis. Em particular, a turma discute a utilidade de uma abordagem algébrica ao invés de uma abordagem gráfica para se encontrar o ponto de intersecção. Os alunos, trabalhando em grupos, usam então suas calculadoras gráficas para plotar exemplos de casos especiais de sistemas de duas equações lineares que a professora escreve no quadro, por exemplo:

$$x + y = 4 \text{ e } 2x + 2y = 8$$

$$2x + y = 3 \text{ e } 2x + y = 5.$$

Estes foram escolhidos para que os estudantes investiguem e discutam outras relações entre duas equações, por exemplo, “O que acontece se elas [as retas] não se interceptarem? O que significa se uma reta coincide com a outra?” A investigação é seguida por uma socialização e discussão das descobertas dos alunos. Para terminar a aula, o professor pede que os alunos formem grupos e a cada grupo é atribuído um método diferente de resolução de equações, dentre aqueles sugeridos pelo programa. Como ela explicou, “Um grupo procura resolver esse sistema de equações graficamente, outro grupo procura resolvê-las usando o método da adição ou o método da subtração [i.e. o método da eliminação] e o terceiro grupo procura resolvê-las por substituição.”

Para as próximas duas aulas, os alunos trabalham em seus grupos investigando os padrões que se apresentam, para o método que lhes foi atribuído, para resolver um sistema de duas equações lineares. O objetivo é que o grupo estude exemplos resolvidos por eles de modo que compreendam a estrutura de seu método e que sejam capazes de ensiná-lo para os outros. Assim os alunos estão desenvolvendo sua versão própria sobre o que os métodos tratam. A professora circula, observa e intervém com questões ou um contra-exemplo para fazer com que os alunos pensem sobre qualquer limitação que ela veja no modo com que compreendem o método, por exemplo, “Será que isso funcionaria para...?”. Alunos resolvem todos os conflitos entre eles. A professora atribui exercícios para cada grupo para testar a compreensão do método por eles construído. O exercício contém

equações com coeficientes e constantes que são apenas naturais, apenas inteiros, apenas racionais ou alguma combinação desses números. Para dever de casa, a professora pede aos alunos que criem uma situação problema que possa ser resolvida com o método explorado por eles em aula. A professora recompensa alunos por criatividade, logo copiar problemas de livros é desencorajado e não é levado em conta. Para terminar a aula, os alunos têm que planejar como ensinar sua abordagem para outros de um modo que seja interessante e que os ajude a compreendê-la.

Na quinta aula, cada grupo ensina o método explorado para os outros grupos. Representantes de cada um dos grupos vão a todos os outros grupos para explicar o que foi feito no seu grupo e ensinar o seu método. Eles também devem justificar porque o seu método é o mais eficaz. Novamente, o professor circula, observa e intervém com um contra-exemplo para fazer com os alunos pensem sobre as limitações que ela vê na maneira com que eles compreendem o método. Os alunos resolvem todos os conflitos entre eles. Para dever de casa, os alunos devem “trazer uma situação problema real encontrada por eles, excluindo livros de matemática, para discutirem como eles usam ou podem resolver sistemas”. Por exemplo, “um dos alunos trouxe preços da Internet, então eles estavam procurando escolher o AOL ou outro provedor, e então eles trouxeram um gráfico que mostrava estes dois provedores e onde era o *break-even point* poderia não fazer diferença alguma de onde ele estava”. A professora determinou que 20% dos pontos seria correspondente a “encontrar um problema adequado para uma solução por sistemas e resolvê-lo”.

Nas duas aulas seguintes, cada grupo trabalha em problemas selecionados pela professora de livros texto de Matemática e daquilo desenvolvido pelos alunos. A professora fornece dicas através questões abertas quando os alunos “empacam”, mas nunca diz a eles explicitamente como fazer qualquer coisa. Cada grupo então “apresenta para a classe um problema diferente selecionado para ser socializado”. Problemas que ninguém tenha conseguido resolver mesmo depois das dicas fornecidas, são identificados ao final da aula. Para dever de casa os alunos devem continuar a pensar sobre eles.

Na oitava aula, os problemas não-resolvidos são propostos para toda a

turma discutir e a professora vai fazendo perguntas para ajudar aos alunos chegarem a uma solução coletivamente. Para o finalzinho da aula, a professora provoca uma discussão coletiva em extensões informais sobre o assunto, levantando questões como, “e se houvesse três equações no lugar de duas?”

Finalmente, na última aula da unidade, a professora dá um teste escrito sobre o assunto. Para a resolução dos problemas no teste, professora inclui a resposta final. Assim, não se pontua apenas a resposta, reforçando a importância da compreensão e da explicação (através da escrita) do processo de resolução.

Exemplo 5

A seguir temos exemplos de uma técnica simples que professores podem incorporar em seu modo de ensinar para acrescentar um componente questionador

(1) Exemplos resolvidos

Alunos podem receber exemplos resolvidos para descobrir um padrão neles, para entender a estrutura do processo. Por exemplo, alunos podem receber três exemplos resolvidos de multiplicação de dois binômios, como os que se seguem:

Caso 1

$$(x-3)(x-2)$$



$$x(x-2) - 3(x-2)$$



$$x^2 - 2x - 3x + 6$$



$$x^2 - 5x + 6$$

Caso 2

$$(x+3)(x+2)$$

$$x(x+2) + 3(x+2)$$

$$x^2 + 2x + 3x + 6$$

$$x^2 + 5x + 6$$

Caso 3

$$(x-3)(x+2)$$

$$x(x+2) - 3(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 3x - 6$$

$$x^2 - x - 6$$

Sem que o professor tenha explicado o processo para seus alunos, eles podem trabalhar em grupos para fazer coisas do tipo: buscar um padrão, explicar o que acontece em cada passo, identificar que conceitos matemáticos são aplicados em cada passo, criar seus próprios exemplos e testar suas conjecturas, e especular

como poderiam trabalhar de trás para frente, isto é, se feita uma pergunta (por exemplo, com um trinômio) e é preciso se começar da mesma forma (isto é como os fatores ou dois binômios).

(II) Comparando

Essa abordagem necessita que os estudantes já tenham comparado conceitos matemáticos como um meio para identificar e entender a estrutura ou as relações existentes entre eles. Isso pode ser usado em conceitos de qualquer tópico matemático, seja ele de aritmética, álgebra ou geometria, por exemplo. Os três casos a seguir são exemplos de diferentes formas de perguntar onde questões podem ser formuladas provocando uma comparação:

Caso i. Comparando exemplos e não-exemplos

Por exemplo, explicando como os exemplos são similares, mas diferentes dos não-exemplos no quadro a seguir a escreva as características de que conceito matemático os exemplos representam.

Exemplos	Não-exemplos
3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6	7, 0.7, 0.07, 0.007, 0.0007, 0.00007
-13, -2, 9, ..., 130, 141, 152	46, 6.78, 2.60, 1.61, ..., 1.02, 1.00, 1.00, 1.00
15, 10, 5, 0, -5, -10,, 16, 9, 4, 1, 4, 16, ...
22.6, 22.6, 22.6, 22.6, 22.6, 22.6	1, 2, 4, 8, 16, ..., 1 048 576
	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Caso ii. Comparando formas equivalentes

Por exemplo, explicar como o que se segue são iguais e diferentes e as relações entre eles.

$$\frac{2}{3}xy, \quad \frac{2x}{3}y, \quad 2y\frac{x}{3}, \quad 2\frac{xy}{3}, \quad \frac{2xy}{3}$$

Caso iii. Comparando para identificar e explicar aquele que não pertence ao grupo em cada caso.

$$(a) \quad x^2 + 6x + 9 \quad x^2 - 2x + 1 \quad x^2 + 20x + 100 \quad x^2 + 5x + 6$$

$$(b) \quad 5x^3y \quad 6x^3y^2 \quad x^3y^2 \quad -6x^3y^2$$

$$(c) \quad x + y = 5 \quad y = x^2 \quad x^2 + y^2 = 9 \quad y = x^3$$

$$(d) \quad 32 \quad 1024 \quad 25 \quad 128$$

(III) Erros dos Alunos

Os erros dos alunos podem ser usados para levá-los a pensar sobre o conceito e desenvolver uma compreensão mais profunda sobre o mesmo. Por exemplo, estudantes podem receber atividades que exigem a explicação do erro.

Exemplos de erros de alunos em fração:

$$\text{Caso 1.} \quad \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{4}{6}, \quad \frac{2}{5} \frac{1}{5} \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{8} \frac{6}{7} \frac{7}{15}$$

$$\text{Caso 2.} \quad 3\frac{3}{8} \quad 1\frac{1}{2} \quad 2\frac{1}{8}, \quad 2\frac{5}{6} \quad 1\frac{2}{3} \quad 1\frac{1}{6}, \quad 4\frac{7}{8} \quad 1\frac{1}{4} \quad 3\frac{5}{8}$$

$$\text{Caso 3.} \quad \frac{3}{8} \frac{4}{8} \frac{12}{8}, \quad \frac{1}{3} \frac{2}{5} \frac{3}{15}, \quad \frac{2}{7} \frac{3}{7} \frac{6}{7}, \quad \frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{6}{12}$$

$$\text{Caso 4.} \quad \frac{7}{8} \frac{2}{5} \frac{16}{35}, \quad \frac{3}{4} \frac{4}{5} \frac{16}{15}, \quad \frac{3}{5} \frac{2}{5} \frac{15}{10}$$

Exemplos de erros de alunos em Álgebra:

$$1. \quad a^2 \cdot b^5 = (ab)^7$$

$$2. \quad a^2 \cdot a^5 = a^{10}$$

$$3. \quad 3^2 \cdot 3^3 = 9^5$$

$$4. \quad x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$$

$$5. \quad \frac{xa}{x} \frac{xb}{xd} \quad \frac{a}{d} \frac{b}{d}$$

$$6. \quad x \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{ax}{bx}$$

$$7. \quad 3a + 4b = 7ab$$

$$8. \quad 3x^{-1} = \frac{1}{3x}$$

$$9. \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + y$$

$$10. \quad (3a)^4 = 3a^4$$

(IV) Questionando

Questionar é um importante meio de engajar alunos nessa metodologia de perguntas e para facilitar o desenvolvimento de sua habilidade de raciocínio matemático. Seguem-se exemplos de tipo de perguntas adaptadas de Watson e Mason (1998) que professores consideraram efetivos.

- Comparando: O que é igual e diferente sobre ...? Por exemplo, (sem o desenho), o que eles tem em comum e o que diferem as expressões a seguir: $y = 2$; $y = 2x$; $y = 2x + 1$?
- Trocando/variando: O que acontece se você muda, altera, varia um aspecto de algo? Por exemplo, o que acontece com o gráfico se você variar a em $y = ax^2$?
- Revertendo: Se isso for uma resposta, qual seria a pergunta feita? Por exemplo, se a resposta é triângulo, que pergunta poderia ter sido feita?
- Justificando: Como está errado em...? Por exemplo, o que está errado com $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$?
- Exemplificando: O que seria um ou mais de um exemplo de ...? Por exemplo, o que seria um exemplo de um polinômio?
 O que faz ... um exemplo de ...? Por exemplo, o que faz $3x^2 + 2x + 1$ um exemplo de polinômio?
 O que seria um contra-exemplo de ...? Por exemplo, o que é um contra-exemplo de um polinômio?

Essas questões podem ser usadas em discussões com toda a turma, em trabalhos de grupo ou em atendimento individual.

Conclusão

Para ajudar alunos a aprender matemática com compreensão e para desenvolver um pensamento matemático, eles precisam ser provocados para resolver problemas, explorar padrões, formular e checar conjecturas, justificar e verbalizar. Um ensino orientado por perguntas possibilita que isso aconteça. Esse artigo apresenta algumas idéias sobre esse ensino orientado por perguntas que pode fazer uma diferença em como os alunos aprendem matemática. Não se pretende esgotar como professores fazem, poderiam fazer ou devem fazer, mas agir como um estímulo para encorajar educadores a continuarem nesse caminho, ou para fazerem mudanças de maneiras que o seu ensino possibilite uma aprendizagem significativa em seus estudantes.

Referências

Alberta Learning. **Western Canadian protocol for collaboration in basic education: Common curriculum framework for K – 12 mathematics**. Edmonton, Alberta: Alberta Education, 1996.

National Council of Teachers for Mathematics **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: Author, 1991.

National Council of Teachers for Mathematics **Assessment standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1995.

National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 2000.

Watson, A., and Mason, J. **Questions and prompts for mathematical thinking**. Derby, England: Association of Teachers of Mathematics, 1998.