Agora até problemas de Português temos que resolver? História de uma aula de Matemática

Heloisa Borges Nascentes Coelho
Professora do Centro Pedagógico da UFMG
Doutoranda em Educação Matemática, PUCSP
helonasc@cp.ufmg.br
helonasc@bol.com.br

Resumo
Este artigo relata a história de uma situação de sala de aula de matemática, em uma turma de quinta série do Ensino Fundamental, em que um aluno faz a seguinte pergunta: Professora, agora nós temos que resolver até problemas de português? De imediato a professora percebeu que, nós professores, éramos responsáveis por deixar que os alunos acreditassem que a matemática se resumia a cálculos. Essa situação foi um desafio para professora levando-a a aprofundar seus estudos. Novos livros, novas leituras, novas práticas. O jogo foi a que mais chamou a atenção dos alunos talvez porque o jogo esteja presente e faz parte da vida deles. Sendo assim, este relato ilustra uma experiência com a Torre de Hanói e mostra que os alunos aprendem muito com jogos e que mostraram que ao transporem suas estratégias de jogo para uma linguagem matemática eles conseguem aplicar a matemática da "sala de aula" em outros contextos

Palavras-chave: Histórias de Sala de Aula; Jogos; Torre de Hanói.

Do we even have to solve problems in Portuguese now? A Math class story

Abstract

This article deals with a story, which happened during a 5th grade math class, where a student asked the following question: Teacher, do we even have to solve problems in Portuguese now? Immediately the teacher noticed that the teachers themselves were responsible for making the students believe that math only concerned numbers. This situation was a challenge for the teacher leading her to further investigation through new books, readings, and practices. The use of games was what attracted most the students' attention, maybe because they are part of their lives. Therefore, this article reports an experiment with the game Tower of Hanoi and shows that students learn a lot through games, and by transferring the games strategies to a math language, they can apply the "classroom" math to other contexts.

Keywords: Classroom Stories; Game; Tower of Hanoi.

Introdução

Histórias de aulas têm muitas, mas há sempre aquelas que não esquecemos. Esta que vou contar é uma delas. Tudo começou quando um aluno da 5a série perguntou à sua professora: "Professora, agora até problemas de português nós temos que resolver problemas de Português também"?

O Contexto

A professora tinha acabado de se formar e a única prática de sala de aula que ele tinha era do estágio, com aulas particulares e como monitora no curso de Licenciatura de Matemática.

Ano Novo, já formada, emprego novo, sala nova e era todinha dela. Quanta felicidade! Era tudo o que ela desejava. Estava com todo o "gás", a alegria era uma só. Pensava ela: "Pronto, agora tenho tudo que quero, ensinar, educar. Vou colocar em prática tudo que me foi ensinado na faculdade. Estou preparadíssima, tive ótimos professores, minhas notas eram ótimas, só precisava mesmo de uma sala de aula".

Início do ano letivo só professores reunidos. Havia um seminário de dois dias antes que os alunos iniciassem as aulas. Professores da mesma disciplina, coordenados por uma professora mais antiga da escola, discutiam o currículo que deveria ser desenvolvido em cada série. Professores de disciplinas diferentes, mas que atuariam na mesma série, se reuniam para organizar a chegada dos alunos, qual era o perfil dos mesmos, se havia algum novato, se alguém tinha intenção de fazer excursão ao longo do ano. Normas da escola foram discutidas, que encaminhamentos deveriam ser tomados com problemas de disciplina, alunos não poderiam ficar fora da sala de aula nem com a professora, quando fosse dia de prova o aluno que terminasse antes deveria fazer alguma atividade até que todos tivessem terminado.

Para ela tudo era novidade, mas não via mesmo a hora de conhecer seus alunos e ensinar tudo que tinha aprendido, ou que ela achava que tinha aprendido.

O questionamento

Algum tempo havia passado e as coisas não eram como havia planejado. Os alunos, com idade entre 10 e 11 anos, não eram fáceis. Tinham muita energia e não conseguiam permanecer em uma única atividade por muito tempo. Percebia que havia aprendido muita Matemática na faculdade, mas como ensinar essa Matemática? Como fazer com que eles tivessem prazer de aprender? Começara a refletir mais. Tinha que haver uma saída e ela não sabia o que fazer. Comprou revistas, livros, filiou-se a Sociedades de Matemáticos e de Educadores Matemáticos e começou a estudar mais sobre Educação Matemática.

Percebeu que o problema não era só dela, as colegas da faculdade que já estavam trabalhando estavam com as mesmas dificuldades.

Parou para refletir: Os alunos não estavam interessados no que a escola tinha a oferecer e que a escola não conseguia acompanhar a evolução e a transformação da sociedade. Novas tecnologias, novas linguagens, novas comunicações são realidades do momento que vivemos. A escola inserida nesse contexto, entretanto, não consegue acompanhar a evolução e transformação que vem ocorrendo. O tempo todo os alunos estão em contato com esses estímulos que não fazem parte da rotina da escola, não interessando, portanto, pelo que a escola oferece.

As pesquisas em Educação Matemática propiciavam novas perspectivas de análise das práticas pedagógicas, principalmente no que diz respeito a questões relacionadas ao desenvolvimento e à aprendizagem. Ela tem influenciado mudanças de postura em relação ao ensino de matemática com o objetivo de atender as demandas que o desenvolvimento da sociedade lhe tem apresentado. A escola e os professores devem se organizar sob uma nova ótica que pressupõe que os fatores socioculturais influenciam no desenvolvimento e aprendizagem dos alunos.

As situações didáticas precisam ser analisadas de acordo com essa nova ótica para compreendermos melhor como elas acontecem, quais suas características e como elas contribuem para a aquisição e evolução dos conhecimentos dos alunos ou os dificultam. Aos professores cabe respeitar os ritmos diferentes e o que cada criança pode fazer e entender e o que elas não podem entender e fazer.

Várias questões emergiam, como: quais as condições essenciais para que se possa propiciar a apropriação do saber por parte dos alunos? Como os professores estão se preparando para estabelecer relações, com a finalidade de possibilitar avanços cognitivos aos alunos? Que interações estão se estabelecendo em sala de aula e como elas estão contribuindo para o significado que os alunos estão atribuindo ao conhecimento escolar?

Para que mudanças ocorram é necessário repensar a formação do professor e do aluno, pois só assim conseguiremos tornar a escola um lugar onde a tematização e a sistematização de conhecimentos científicos vai formar cidadãos críticos e atuantes. É preciso repensar, simultaneamente, a prática de ensino e o número de horas de estágio na formação de professores com a capacitação continuada dos mesmos em exercícios com o objetivo de mudar sua postura em sala de aula propiciando que o aluno construa seu conhecimento matemático.

Nós professores devemos ter muito claro o papel da Matemática na educação, os caminhos que ela percorreu e quais podem vir a percorrer para que saibamos o que, para que e como ensinar. De forma geral, o professor deve aprender a incentivar o conhecimento empírico de seus alunos, criando condições para juntamente com o conhecimento científico leva-los a compreender a matemática através:

da reflexão; do questionamento; do levantamento de hipóteses; do desenvolvimento do raciocínio; do pensamento com clareza.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), "os professores devem ser profissionais capazes de conhecer os alunos, adequar o ensino à aprendizagem, elaborando atividades que possibilitem a ação reflexiva do aluno" (PCN, 1998, p. 38).

Um dos objetivos do ensino fundamental, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), é o de "questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação." (PCN, 1998, p. 56) Ainda,

> “os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem." (PCN, 1998, p. 60)

Procurando encontrar respostas para suas questões, começou a mudar sua prática pedagógica. Passou a olhar de uma maneira diferente a resolução de problemas, como um ponto de partida para a mudança dessa prática. Essa mudança a levou a criar atividades envolvendo problemas não padronizados, tipo desafio, ou seja, eles não se apresentavam só na forma de texto formal, mas também na forma de diálogos, diagramas e tabelas. À medida que os alunos iam terminando os exercícios do conteúdo estudado, eles escolhiam um problema desafio para resolver. Aqueles que não terminavam em aula levavam o problema para ser terminado em casa. Os procedimentos de resoluções eram ricos e diversificados. Socializávamos os diferentes procedimentos onde os alunos apresentavam suas diversas maneiras de resolução e as discussões eram muito enriquecedoras. Os alunos foram se entusiasmando e ela também. Até que um dia, após entregar um exercício de lógica onde as informações não traziam dados numéricos e os alunos tinham apenas que estabelecer relações para encontrar a solução, um aluno nos perguntou: - **"Professora, agora até problemas de português nós temos que resolver?"**

De imediato percebeu que, nós professores, éramos responsáveis por deixar que os alunos acreditassem que a matemática se resumia a cálculos.

Do ábaco aos modernos computadores, dos ginásios gregos à nossas atuais escolas, a educação tem sido um desafio, mas tem definido e modificado a história da humanidade. Da Matemática racional à Matemática prática, da priorização dos estudos teóricos à valorização das aplicações práticas, o ensino-aprendizagem de Matemática também sempre foi um desafio.

A princípio, o ensino de Matemática era reservado apenas aos membros de uma classe privilegiada: a dos escribas, dos altos funcionários e dos dirigentes. Portanto, era considerada uma ciência nobre, desligada dos ofícios, das atividades manuais.

No final do século XIX, iniciaram-se manifestações em diferentes países com o objetivo de modernizar o ensino de Matemática inclusive com introdução de novos conteúdos. Felix Klein, junto com Gauss, Riemann e Poincaré, forneceram elementos essenciais que impulsionariam a matemática. Klein incentivou jovens a estudar Matemática. Em suas aulas valorizava e proporcionava a compreensão dessa ciência.

Miorim (1998) nos apresenta parte da autobiografia (1923) de Klein, onde se recordava da conferência ocorrida 50 anos antes:

> "Em minha aula inaugural em dezembro, eu apresentei um detalhado programa para meus planos de ensino, em que declarava que a unidade de todo conhecimento e o ideal de uma educação completa não poderiam ser negligenciados por causa dos estudos especializados. E, em conseqüência disso, que a educação humanística e a matemático-científica [...] não deveriam ser colocadas em oposição à outra. Por outro lado, que era necessário cultivar a matemática aplicada da mesma forma que a pura, a fim de preservar a conexão entre disciplinas próximas, como a física e a tecnologia. Além disso, juntamente com a capacidade

> lógica, igual importância deve ser dada à necessidade de desenvolver a intuição e, mais geralmente, a imaginação matemática [...]. Finalmente, as universidades devem se preocupar com o ensino preparatório nas escolas, e assim dar particular ênfase na educação dos professores. As organizações das escolas técnicas de ensino médio devem ser examinadas, e em muitos aspectos tomadas como modelo." (MIORIM, 1998, p. 67)

Como podemos perceber, já naquela época, Klein nos chama atenção para estudarmos matemática integrada às outras ciências, ressaltando ainda a importância da tecnologia, a capacidade lógica, a imaginação matemática e inclusive na formação de professores. Klein poderia estar proferindo essa conferência hoje. Os valores por ele apontados são os mesmos que discutimos tanto hoje na Educação Matemática.

Mas, é preciso ter claro que a Matemática não deve ser dogmática, devendo integrar-se com as outras ciências. E, cabe a nós professores, ver e mostrar que a Matemática, como qualquer outra ciência dentro do seu contexto, deve alcançar os objetivos propostos pela educação enquanto formadora.

A prática do professor deve sempre procurar entender e atender à demanda imposta pelo contexto social. As tendências das pesquisas em Educação Matemática têm centrado seus interesses para atender essa demanda, envolvendo estudos como: resolução de problemas, informática, história da matemática, jogos, formação de professores, entre outros.

A aprendizagem através de jogos tem sido muito discutida nos últimos anos. Após estudos como de Piaget (1978) e Vygotsky (1988), é possível encontrarmos vários trabalhos que relatam experiências de professores utilizando jogos como mais uma metodologia para a aprendizagem. O que nos causa estranheza é o porquê destes trabalhos serem desenvolvidos na pré-escola e nas séries iniciais do ensino fundamental e quase não aparecem nas séries finais deste ensino.

"Onde termina o jogo e onde começa a Matemática séria?" Assim se inicia um texto de Miguel de Guzmán no Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática (1990), onde o autor defende que

> "o ensino da Matemática deve dar uma maior importância aos jogos. Na realidade, os jogos são atividades que tem muito em comum com a própria atividade matemática. Até um dos maiores boubarkistas, o matemático francês Jean Dieudonné (1982) , afirmou que "nove décimos

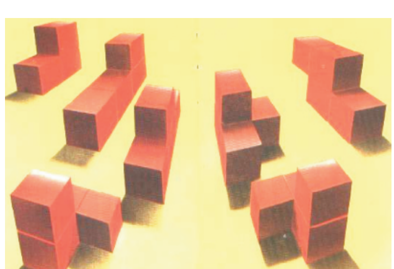
> das matemáticas, além daquelas que foram suscitadas por necessidades práticas, são resoluções de adivinhas." (GUZMÁN, 1991, p. 5)

Na nota do tradutor do livro, Contas com Contos, de Guzmán (1991), Jaime Carvalho Silva, questiona,

> "será que o ensino e a sociedade em geral, ao secundarizarem atividades como as que estão ligadas aos diversos tipos de jogos de papel, de tabuleiro, etc., não estarão de algum modo a contribuir para o progressivo desinteresse dos jovens pela procura de soluções de problemas pelo puro prazer da descoberta, ou pelo hábito de questionar afirmações que carecem, ou podem carecer, de fundamento, isto é, pelo abafar do espírito crítico?"

A relevância do jogo vem de longa data. Filósofos como Platão, Aristóteles e outros, destacaram o papel do jogo na educação. Em um papiro, denominado de papiro Rhind, redigido há mais de 3 500 anos por um escriba egípcio de nome Ahmes e comprado em 1858 na cidade egípcia de Luxor pelo colecionador de antiguidades, Henry Rhind, encontramos diversos problemas matemáticos que hoje são apresentados como desafios.

Podemos aprender muito com os jogos principalmente se persistirmos em tentar descobrir os princípios de seu funcionamento. Por exemplo, certa vez tivemos um aluno em que todas as vezes que íamos ter aula no Laboratório de Matemática ele não se continha e pegava o cubo de Piet Hien, e já sabendo montar tentava bater o recorde no tempo de si mesmo. Este jogo é um quebra-cabeça cujo objetivo é ajustar sete sólidos para formar um cubo. Piet Hein, seu inventor, diz que há centenas de maneiras diferentes de construir o cubo, mas descobrir apenas uma das maneiras já é bastante difícil.



Estas são as sete peças do cubo de Piet Hein.
Fonte - SNAPE, C. e SCOTT, Heather, 1994: 11

Há vários tipos de jogos, como os de estratégia, de azar, de construção, de lógica. Cada jogo trabalha diferentes funções que podem interferir na aprendizagem formal de conteúdos.

Mudaram o mundo, os objetivos e a concepção de ensino; portanto, o professor precisa também mudar. Hoje, o professor deve ter como objetivo levar o aluno a utilizar modelos matemáticos no estudo de determinadas situações problema, representá-los utilizando os mais eficientes e adequados sistemas simbólicos da matemática como instrumento de pensamento; utilizá-los em uma variedade de situações que lhes dêem significados. O professor deve engajar-se num processo de reavaliação de sua prática pedagógica. Deve comprometer-se com a formação do aluno, por ser crítico e analítico. Educar não se limita a repassar informações, educar é preparar para a vida. Conforme Santos (1997), que nos ensina:

> "Cada época e cada cultura tem uma visão diferente de infância, mas a que mais predominou foi a da criança como ser inocente, inacabado, incompleto, um ser em miniatura . . . Entretanto, já no século XVIII, Rousseau se preocupava em dar uma conotação diferente para a infância, mas suas idéias vieram a se firmar no início do século XX, quando psicólogos e pedagogos começaram a considerar a criança como uma criatura especial com especificidades, características e necessidades próprias. Foi preciso que houvesse uma profunda mudança da imagem da criança na sociedade para que se pudesse associar uma visão positiva a suas atividades espontâneas, surgindo como decorrência a valorização dos jogos e brinquedos." (SANTOS, 1997, p. 19)

Segundo Franco (1997), são três os tipos de conhecimento com os quais o ser humano lida: físico, social e lógico-matemático. O conhecimento lógico-matemático é interno ao sujeito. Não pode ser ensinado e apóia-se nas relações que o indivíduo estabelece entre objetos, fatos e acontecimentos. As semelhanças, igualdades e/ou diferenças não estão nos objetos em si, mas na cabeça do sujeito que estabelece paralelo entre eles. O aprender, o conhecer exige de cada ser o querer e o interagir com os pares e com o objeto de conhecimento. Os jogos são atividades importantes para o desenvolvimento cognitivo e moral das crianças, quando utilizados objetivando essa conquista.

Novos livros, novas leituras, novas práticas. Era hora de avançar, os problemas teriam um espaço maior em suas aulas e buscou outras atividades matemáticas. Trabalhou com atividades de Lógica Matemática onde para se alcançar o objetivo era necessário estabelecer e coordenar relações. Com isso, desejava mostrar que a matemática era muito mais do que resolver cálculos. Dentre as atividades aplicadas, o jogo foi a que mais chamou a atenção dos alunos talvez porque o jogo esteja presente e faz parte da vida deles.Assim, ela resolveu desenvolver um projeto com jogos. Optou por jogos, por acreditar que ao trabalhar jogos estaria utilizando a resolução de problemas, poderia trabalhar a história da matemática e também utilizar novas tecnologias.

Utilizou jogos dando ênfase ao conhecimento matemático que nele permeia, pois é essa produção que mais a interessou. Como a matemática está presente também nos jogos e nele acredita que os alunos agem de maneira mais espontânea espera que eles estabeleçam os conteúdos específicos da matemática aprendidos com as estratégias ou soluções apresentadas. No seu projeto os alunos não iriam apenas jogar e brincar, mas interpretar o jogo matematicamente. As maneiras como os alunos chegarão à solução, os métodos usados, podem ser os mais diversos e o importante será a discussão e a análise desses métodos.

A Torre de Hanói

O jogo que utilizou nessa pesquisa foi a Torre de Hanói, um quebra-cabeça milenar, criado, a partir da lenda, por Edouard Lucas (1842-1891), matemático francês que deixou importantes trabalhos no campo da matemática recreativa.

Esse quebra cabeça foi vendido como brinquedo, pela primeira vez em 1883, com o nome de Torre de Brahma. Os discos eram em número de oito e as regras eram as mesmas enunciadas na lenda. A princípio a autoria do quebra cabeça era atribuída ao Prof. CLAUS, do colégio LI-SOU-STIAN, onde mais tarde descobriu-se que os nomes eram anagramas de LUCAS e de SAINT LOUIS, nomes do criador e do colégio em que lecionava.

A Torre de Hanói tem origem em uma lenda indiana onde o centro do mundo encontra-se sob uma cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. No centro há uma placa de metal onde estão fixados três pinos de diamantes. Ao criar o mundo, Deus Brahma colocou sessenta e quatro discos de ouro maciço, o maior deles na base, junto à placa, e o restante, apoiados uns sobre os outros, em ordem decrescente de tamanho, até chegar ao topo onde se encontra o menor disco. Essa é a Torre do Deus Brahma em que dia e noite, incessantemente, os sacerdotes do templo foram incumbidos de transferir todos os discos para um dos outros dois pinos, obedecendo as leis imutáveis fixadas pelo maior dos Deuses do hinduísmo.

As leis ou regras são:

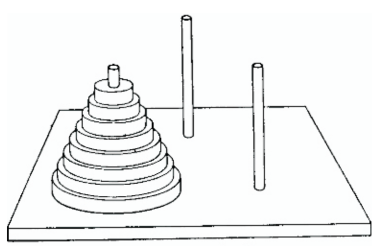
- transferir apenas um disco de cada vez;
- jamais um disco maior pode ser colocado sobre um menor;
- transferir toda a torre com o menor número de movimentos.

Segundo a lenda, a vida transcorrerá durante a realização da tarefa dos monges e quando os sessenta e quatro discos de ouro maciço forem transferidos para um dos outros pinos, templo e brâmanes virarão pó e, com um estrondo o mundo desaparecerá.

Os monges no Templo de Brama
Fonte: SNAPE, C., SCOTT, H. 1993: 26

Os monges do templo de Brama precisariam de mais de 18 000 000 000 000 000 000 de jogadas para terminar a tarefa. Se a história fosse verdadeira e os monges conseguissem manter a média de um disco por segundo, ininterruptamente, eles levariam muitos bilhões de séculos para transferir os 64 discos de um pino para outro.

Hoje, este jogo é comercializado em madeira, com nove discos de cores azul, vermelho e amarelo que se alternam e os pinos dispostos na forma triangular.



A Torre que utilizada era confeccionada em emborrachado, onde os pinos não existem, são imaginários, e são representados por três pontos "A", "B" e "C". Os discos são de cores diferentes e em número de cinco.

A professora optou por essa forma por se o emborrachado mais leve e prático de transportar. Como não tem pinos, facilita a manipulação. Em discos de cinco porque é um número suficiente para se estabelecer as relações necessárias.

A Torre de Hanói é um jogo aparentemente de regras simples, mas de complexidade crescente como mostraremos a seguir.

Ao movimentarmos as peças de uma torre saindo de um pino e indo para qualquer outro, dos dois restantes, encontramos os seguintes movimentos mínimos:

NÚMERO DE PEÇAS DA TORRE	NÚMERO MÍNIMO DE MOVIMENTOS
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
⋮	⋮

Pela tabela percebemos que o menor número de movimentos de uma torre é estabelecido pela regra:

$$m_n \quad 2m_a \quad 1$$

onde: **m** é o mínimo de movimentos
n é o número de peças da torre
$\mathbf{m_a}$ é o mínimo de movimentos da torre anterior, ou seja , da torre com uma peça a menos.

Quanto a essa regra podemos justificar pelos próprios movimentos das peças. A maior peça sempre deverá fazer um único movimento do pino de origem ao pino de chegada. As demais peças, ou seja, o restante da torre deverá estar no pino intermediário para que possamos garantir o único movimento da maior peça. Lembrando que o menor número de movimentos independe do pino de origem ao pino de chegada, justificamos o dobro de movimentos da torre anterior, com uma peça a menos mais um.

Daremos um exemplo da explicação acima. Se quisermos transportar uma torre de cinco peças do pino A ao pino C, deveremos proceder da seguinte maneira:

1. Transportamos as quatro menores peças do pino A para o pino B, o menor número de movimentos para esse transporte é de 15 movimentos;
2. Transportamos a maior peça de A para C com um único movimento;

Transportamos a torre com quatro peças de B para C com mais 15 movimentos.

Para determinarmos o menor número de movimentos de uma torre utilizando essa regra é necessário conhecer o menor número de movimentos de todas as anteriores.

Na lenda, como a torre tem 64 peças, é necessário conhecer o menor número de movimentos de todas as torres anteriores, de 1, 2, 3, 4, 5, ... 60, 61 62 e 63 peça, o que resultaria a um número enorme de cálculos.

Observando bem a tabela, percebemos ainda uma outra regra, a qual determina o número mínimo de movimentos sem ser necessário conhecer o número de movimentos das torres anteriores, apenas precisamos conhecer o número de peças da torre, que é:

$$m_n \quad 2^n \quad 1$$

onde: **m** é o menor número de movimentos da torre
n é o número de peças da torre

No caso da lenda o resultado seria movimentos, o que nos dá um número de 20 algarismos, ou seja, 18 446 744 073 709 551 615 . Segundo Gardner (1967), "supondo que os sacerdotes trabalhassem noite e dia, movendo um disco por segundo, eles precisariam de muitos bilhões de anos para terminar o trabalho" (GARDNER, 1967, p. 70).

Agora, apresentamos um estudo em relação ao número de movimentos de cada peça de uma torre. Denominamos os pinos da Torre por A, B e C da direita para a esquerda. As torres serão denominadas de acordo com o número de peças que as compõem como, T_1 pata torre de uma peça, T_2 para torre de duas peças, T_3 para torre de três peças, e assim sucessivamente. As peças serão numeradas de acordo com a ordem decrescente de tamanho, 1 será a peça maior, a da base, 2 será a segunda maior e, assim por diante. A tabela abaixo nos mostra o menor número de movimentos de cada peça de acordo com a torre.

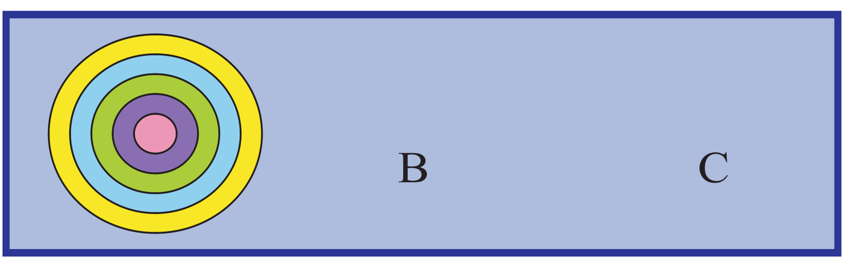
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Peça 1	1	1	1	1	1	1
Peça 2		2	2	2	2	2
Peça 3			4	4	4	4
Peça 4				8	8	8
Peça 5					16	16
Peça 6						32
Soma de movimentos das peças	**1**	**3**	**7**	**15**	**31**	**63**

[1] "O número citado não é primo, mas se aumentarmos o número de discos para 89, 107 ou 127, o número de movimentos necessários para transferi-los será primo. São exemplos dos assim chamados números de Mersennne ou seja: números primos da forma $2^n - 1$. O próprio Lucas foi o primeiro a verificar que $2^{127} - 1$ é um número primo. Esse gargantuesco número de 39 algarismos era até 1952 o maior número primo conhecido quando então foi usado um enorme computador eletrônico para encontrar cinco números de Mersenne maiores do que esse, sendo o maior deles o número $2^{2281} - 1$. Há várias indicações de que o número $2^{8191} - 1$ é primo, mas isso não foi provado até agora". Gardner (1967, p. 71)

Peça 6						32
Soma de movimentos das peças	**1**	**3**	**7**	**15**	**31**	**63**

Como podemos perceber o menor número de movimentos das peças é a seqüência da potência de base dois. O resultado do menor número de movimentos de uma torre será sempre um número ímpar, pois a maior peça faz apenas um movimento, do pino que inicia para o pino que deve ser montada a torre.

A Inovação



Representação da Torre utilizada na experiência

A experiência é realizada com crianças que trabalham com a Torre de Hanói num primeiro momento com duas peças e, num segundo momento com três peças. O problema consiste transportar a torre de um pino A à um pino C, deslocando apenas um disco de cada vez e não a colocando jamais sobre uma menor do que ela. A solução do problema exige, portanto, a utilização do pino B.

Cada dupla recebeu uma Torre e foi solicitado aos alunos que fizessem registro de tudo que fossem observando. Cada hipótese levantada era anotada no quadro e todos os alunos observavam, manipulando a torre, a veracidade ou não daquela hipótese, as discussões eram muito interessantes.

Os alunos, a princípio familiarizaram com as regras, e iam manipulando as peças e chegando ao resultado mínimo de movimentos através de tentativas. A Torre ia crescendo, a medida que cada etapa eles acrescentavam um disco, e não era mais possível achar a solução por tentativa. Logo que iniciaram a torre com quatro peças, retornaram a manipulação com duas e três peças, para observarem algum padrão e regularidades. Após esta etapa tudo correu com mais fluidez.

Iam registrando não só o menor número de movimentos de cada torre como o número de movimentos de cada disco. Trocavam idéias entre as duplas, argumentavam com os colegas suas conclusões, anotavam as estratégias utilizadas.

A Matemática esteve presente em todo o momento da atividade. Os alunos determinaram o número de movimentos de uma torre através de duas regras:

Pela regra,

$$m_n \quad 2m_a \quad 1$$

E pela regra,

$$m_n \quad 2^n \quad 1$$

Além disso, justificaram as regras utilizando argumentos onde a matemática não só de cálculos mas a matemática lógica esteve presente em todo o desenvolvimento da atividade. Também determinaram, com justificativas a quantidade de movimentos de cada peça e a relação entre os movimentos realizados por cada peça.

Meu Comentário

Esta professora que mudou a sua prática após a pergunta de um aluno - "Professora, agora nós temos que resolver problemas de português também?" - sou eu mesma.

Minha intenção ao escrever este texto foi mostrar como temos que dar vozes aos nossos alunos e quanto podemos com eles aprender. Meus alunos foram meus maiores incentivadores para meu desenvolvimento profissional.

Com essa pergunta fui fazer Mestrado em Educação Matemática onde desenvolvi minha pesquisa com o intuito de poder partilhar e contribuir com outros professores que os alunos aprendem muito com jogos e que mostraram que ao transporem suas estratégias de jogo para uma linguagem matemática eles conseguem aplicar a matemática da "sala de aula" em outros contextos.

E Agora?

Este ano a história é outra. Foi uma aluna da Licenciatura de Matemática, prestes a se formar, após o primeiro dia de estágio me disse: "Estou terminando meu curso e só hoje aprendi, com seus alunos, porque na divisão de números inteiros quando o resto não dá zero temos que colocar vírgula no quociente e acrescentar um zero no resto".

Portanto, foi esta outra questão que me incentivou a estar agora cursando o Doutorado em Educação Matemática, com o olhar centrado na formação inicial de professores de Matemática, com o intuito de contribuir para a formação de um Educador Matemático e não de um Matemático que se forma e não sabe o que, porque e, muito menos como ensinar.

Referências

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Ministério da Educação, 1999.

ANTUNES, Celso. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências.** Petrópolis: Ed. Vozes, 1998

ARIÈS, Philippe. **História Social da criança e da família**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1981

ARISTÓTELES. **Ética a Nocômano, X, 6**. Trad. Francesa. Paris: Vrin, 1959

BRENELLI, Rosely Palermo. **O Jogo como espaço para pensar**. Campinas, SP: Ed. Papirus, 1997

BROUGÈRE, Gilles. **Jogo e educação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998

CAMPOS, Tânia M. M. **Tendências atuais do ensino e aprendizagem da Matemática**. Em Aberto. Brasília: 1994

CAILLOIS, R. **Les jeux et les hommes**. Paris, Gallimard, 1967

CHRISTIE, James. **La fonctoin de jeu au niveau des enseignements prescolaires**

et primaires, L'éducation par lê jeu et l'environnement. nº 43, 1991

D'AMBROZIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 2ª Edição. Campinas, S.P.: Ed. Papirus, 1997

DDAVIS, Morton. **La Théorie des jeux**. Paris: Colin, 1973

DUFLO, Colas. **O jogo de Pascal a Schiller**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999
EIGEN, Manfred; WINKLER, Ruthild. Laws of the game. New Jersey: Princeton University Press, 1993

FAIGUELERNT, Estela K.; GOTTLIEB Franca C.. **Teoria e Prática da Educação O Jogo como Metodologia no Ensino de Matemática**. Maringá: 2001 (Revista volume 4 (8) / 2001 - artigo)

FRANCO, Ângela. Matemática: **O pensar e o jogo nas relações numéricas**. B.H.: Ed. Lê, 1997

FREITAG, B. **Aspectos Filosóficos e sócioantropológicos do construtivismo pós- piagetiano**. Anais do Seminário Internacional da Aprendizagem. Porto Alegre:1992

FRIEDMANN, Adriana. **O direito de brincar: a brinquedoteca**. São Paulo: Ed. Scritta, 1996

_______________ **Brincar: crescer e aprender**. São Paulo:Ed. Moderna, 1996

GARDNER, Martin. **Divertimentos Matemáticos**. Trad. Bruno Mazza. São Paulo: IBRASA, 2ª edição, 1967

_______________**Ah, descobri**! Lisboa: Gradiva, 1990

GUZMÁN, Miguel de. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, nº 18, novembro. Portugal: 1990

_______________**Aventuras Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1990

_______________ **Contos com contas**. Portugal: Ed. Gradiva, 1991

HENRIOT, Jacques. **Sous couleur de jouer - La métaphore ludique**. Paris: José Corti, 1989

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens**. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1990

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **O jogo e a educação Infantil**. São Paulo: Ed. Pioneira,1994

_______________**O brincar e suas teorias**. São Paulo: Pioneira, 1998

_______________**Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1997

KOCK, Ingedore Villaça. **A inter-ação pela linguagem**. São Paulo: Contexto, 1997

KOCH, Maria Celeste Machado. **Sobre educação**. Caderno AMAE

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação Matemática**. São Paulo, Ed. Atual, 1998

MONROE, Paul. **História da Educação**. Trad. I. Becker. São Paulo: Cia Ed. Nacional, 18ª edição, 1987