Relato de Experiência

Relato de uma implementação de uma disciplina de Cálculo na Arquitetura

Gilda de La Rocque Palis
Departamento de Matemática e
Pós-Graduação do Departamento de Educação
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
gildalarocque@gmail.com

Resumo
Este trabalho descreve uma experiência de desenvolvimento curricular na disciplina de Cálculo no curso de Arquitetura. Ele apresenta a gênese, o desenho e a implementação da proposta curricular e analisa alguns resultados. O referencial que sustenta a proposta, implantação e análise de resultados baseia-se em teorias da Educação Matemática.

Palavras-Chave: Cálculo na Arquitetura, Computadores em Cálculo, Educação Matemática Universitária, Professor-pesquisador.

Description of an implementation of a course of Calculus for Architectur

Abstract
This work describes a curricular development experiment on Calculus for Architecture. It presents the genesis, the design and the implementation of the curricular proposal and analyzes some results. The framework supporting the proposal, implementation and the analysis of outcomes considers Mathematics Education theories.

Keywords: Calculus for Architecture, Computers in Calculus, Collegiate Mathematics Education, Teacher as Researcher.

Este trabalho relata uma experiência de desenvolvimento curricular na disciplina *Cálculo* no curso de Arquitetura e Urbanismo da PUC-Rio, originada pelo convite que recebemos em 2005 para lecionar aquela disciplina, que é pré-requisito para outras (*Física* e *Estruturas*).

A disciplina não tinha tradição curricular. Sabia-se pouco sobre seu público discente, desmotivado para estudar Matemática ("ao precisar, contrato um calculista"); em geral, frágil *background* algébrico. Alunos e professores estavam descontentes com a disciplina; cada lado acusava o outro pelo fracasso.

Procuramos então propor, implantar e analisar outro currículo[1] (ementa, livro, software de apoio, situações de aprendizagem), integrado à Arquitetura e que contornasse os problemas.

Este estudo qualitativo situa-se na área da Educação Matemática Universitária, empregando tecnologia computacional. A proposta curricular desenhada e resultados de sua implementação podem interessar a professores de Cálculo.

Inicialmente, buscamos nos informar sobre a base teórica relativa à integração da Matemática com a Arquitetura. A seguir, os nossos "achados".

Matemática na Arquitetura

Parece não haver consenso sobre que conteúdos matemáticos, e seus correspondentes níveis de aprofundamento, são necessários à formação do arquiteto. Pelo mundo afora, cursos de Arquitetura não exigem de seus estudantes uma formação matemática típica: o Nexus Network Journal[2] descreve situações variadas. Em artigo polêmico, Salingaros (2001) diz que a relação íntima tradicional entre Arquitetura e Matemática mudou no século XX, e que alunos de Arquitetura não precisam mais de uma formação matemática ampla; além de isto ser um problema em si mesmo, o movimento modernista, eliminando padrões na arquitetura do século XX, pode afetar nossa capacidade de reconhecer e de interpretar padrões em processos de pensamento.

Sob o prisma histórico, Arquitetura e Matemática têm uma estreita ligação, sobre a qual O'Connor e Robertson (2002) trazem várias referências, desde Anthemius (arquiteto e matemático, 474-534) até Buckminster Fuller (matemático, arquiteto e engenheiro, 1895-1983).

---

[1] "Currículo" aqui designa mais do que um programa, incluindo "uma abordagem global dos fenômenos educativos, uma maneira de pensar a educação, que consiste em privilegiar a questão dos conteúdos e a forma como estes conteúdos se organizam nos cursos" (gripo nosso). (Forquin,1993)

[2] http://www.nexusjournal.com

Na Educação Superior, porém, quase não se tem estudado a relação entre Matemática e Arquitetura. Existe uma literatura, recente e crescente, sobre ensino de Matemática nos cursos de Engenharia, mas não nos de Arquitetura, sendo poucos os trabalhos que abordam as disciplinas de Matemática nesses últimos.

Encontramos alguns estudos no site do Nexus Network Journal – Architecture and Mathematics Online, no link dirigido aos artigos da área didática[3]. A maioria deles focaliza tópicos geométricos abordados em Arquitetura. Poucos se detêm sobre problemas curriculares do ensino de Cálculo em cursos de Arquitetura. Dentre estes, Verner e Maor (2003) relatam uma proposta de desenvolvimento curricular integrado de Cálculo a uma variável num curso de Arquitetura. Essa proposta foi analisada por meio de questionários e entrevistas, e comparada a uma outra, não integrada, implantada num grupo de controle. O cotejo mostrou que a primeira trouxe ganhos na compreensão de conceitos e na motivação.

O trabalho de Verner e Maor e o nosso propõem diferentes atividades integradas. O pouco espaço não nos deixa detalhar o potencial das atividades lá sugeridas.

A seguir, tratamos do referencial teórico, na área de Educação Matemática, no qual nos apoiamos para construir e analisar a nossa proposta. O desenho e a análise da mesma podem ser explicitados com diferentes enfoques e níveis de detalhe. Neste trabalho preferimos destacar o que foi possível aprender com uma atividade que foi realizada em paralelo a grande parte do curso em questão e que utiliza o conceito de integral definida. Isto nos levou a omitir o tópico de derivadas tanto nesta seção de fundamentação teórica como na seção em que se detalha os conteúdos matemáticos planejados e implementados.

Pesquisa em Educação Matemática e o nosso trabalho

No ensino de Matemática superior, desde os anos 70 já se usa tecnologia computacional, o que tem induzido mudanças pedagógicas. Essa utilização serve: para se fazerem cálculos de difícil efetuação manual; para reforçar, esclarecer e antecipar idéias novas, e para criar familiaridade com elas; para investigar e descobrir fatos matemáticos, facilitando seu aprendizado, tanto procedimental como estrutural. Uma boa revisão da literatura sobre Computadores na Matemática do Ensino Superior pode ser encontrada em Crowe e Zand, 2001.

Em Educação Matemática, nem se precisa mais defender o uso de representações variadas, embora o emprego destas, por si só, não garanta

[3] http://www.nexusjournal.com/Didatics-intro.html

compreensão. Ademais, os alunos têm dificuldade tanto com as transformações no mesmo contexto representacional como na tradução de uma representação para outra. O professor deve planejar e propor situações didáticas que usem representações múltiplas, visando o desenvolvimento cognitivo. Uma excelente discussão sobre processos de pensamento em Matemática avançada, incluindo os processos envolvidos no uso de representações (registros ou quadros) acha-se em Dreyfus (1991).

A nossa proposta prestigia o uso de recursos computacionais no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo, os quais permitem abordagens dinâmicas de certos tópicos, em vez de práticas tradicionais estáticas. Bem interativa, a associação entre variadas representações pode ser explicitada com o uso de tecnologia digital. Dinamismo e interatividade atraem a atenção mais para o desenvolvimento dos conceitos do que para o das habilidades de manipulação simbólico-algébrica (FERRARA *et al*, 2006).

Dentre os referenciais teóricos usados na pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior, destacamos a teoria APOS (ASIALA *et al*., 1996), que lida com a concepção *processo-objeto* de um conceito matemático. Essa teoria, com a qual temos trabalhado (PALIS, 2003), põe em relevo uma mudança qualitativa crucial no estudo das relações que os alunos desenvolvem com os conceitos matemáticos: a transição de concepções *processo* para concepções *objeto*, cuja dificuldade era subestimada no nível universitário.

Objetos abstratos e processos computacionais são dois aspectos da mesma coisa. Por exemplo, $3x - 2$ pode ser visto como um *objeto* em si mesmo, mas também como o *processo* de "multiplicar 3 por x e subtrair 2". O conceito de limite tem características tanto de um *processo* quanto de um *objeto* matemático; logo, o mesmo se dá com o conceito de integral definida. A conversão de um processo em objeto (*reificação*) é necessária para a compreensão profunda de um conceito, mas é também algo muito complicado e difícil de atingir, envolvendo um complexo círculo vicioso. Não se deve esperar tal conversão antes que o aluno tenha alguma familiaridade com objetos que ele ainda vê como processos. Sem a reificação, por outro lado, tais processos não adquirem significado real.

Pesquisa em Educação Matemática e a Integral Definida

A pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem de Cálculo tem dado mais atenção ao conceito de derivada que ao de integral. Famoso estudo de Orton (1983) considera improvável poder-se apresentar sem muitas dificuldades a integração, caso desejemos que os alunos saibam mais do que apenas calcular integrais e obter respostas para aplicações, mesmo sem entender os procedimentos e conceitos empregados. Para Orton, apesar de a noção de limite ser básica para se compreenderem a derivada e a integral, todo professor de Cálculo sabe que se destina escasso tempo ao assunto. Embora a idéia de limite seja quase ausente no ensino pré-universitário, ela pode ser aí construída pouco a pouco, intuitivamente, quando for adequada — não como um tópico em si mesmo, mas no contexto de outros tópicos. Orton menciona vários exemplos geométricos e numéricos: o estudo das áreas de figuras irregulares pela contagem de malhas de quadrados contendo a figura, ou nela contidas; a determinação de somas de termos de seqüências geométricas (*e.g.*, na representação fracionária de dízimas periódicas); o cálculo de aproximações de π, usando polígonos inscritos num círculo ou circunscritos a ele; as soluções iteradas de equações; e outros. Concordamos plenamente com isto e temos feito sugestões neste sentido (PALIS 1989, 1994).

Orton propõe ainda mais: os fundamentos do Cálculo devem ser retomados muitas vezes ao longo da educação matemática do aluno; a primeira abordagem pode ser bem informal, e cada reconstrução deve ser mais formal e rigorosa que a anterior. Ele cita vários problemas no desempenho dos alunos: dificuldades com manipulações simbólicas (inclusive parênteses e expoentes fracionários e negativos) e com a leitura gráfica de funções. Esses obstáculos são freqüentes entre estudantes universitários e dificultam o trabalho com as somas de Riemann na integral definida.

Monaghan et al. (1994) examinaram idéias sobre a noção de limite apresentadas por alunos que aprenderam Cálculo por um sistema de computação algébrica, o *Derive*. O estudo mostra que o objeto “limite” pode aparecer mais claramente usando-se um sistema de computação algébrica; porém, outros problemas aparecem com a eliminação do processo subjacente ao objeto. Com apoio de um tal sistema, o aluno pode focar o limite como um processo (calculando os termos de uma seqüência que “tende” ao limite) ou como um objeto (determinando o valor do limite por meio de um comando específico do programa). Essas duas facetas complementares podem ser vistas na ordem que se desejar. Os autores chamam essa metodologia de “construção seletiva”; segundo eles, ela possibilita a elaboração de materiais que propiciam uma base cognitiva para se compreender limite como processo e como objeto.

Czarnocha *et al* (2001) estuda a compreensão do conceito de integral definida por alunos que já tiveram dois semestres de Cálculo a uma variável, em curso superior da área técnico-científica, e indica que a coordenação entre o esquema visual das somas de Riemann e o esquema de limite de seqüências numéricas é necessária para um bom entendimento do conceito de integral. Além disso, propõe que seqüências e seus limites sejam abordados intensivamente *antes* das somas de Riemann.

A proposta curricular: ementa, livro, software de apoio, atividades especiais

A ementa de Cálculo para Arquitetura era a do Cálculo I para Engenharia. Isto nos parecia inadequado e de realização difícil, pelo excesso de conteúdo e pela conseqüente necessidade de uma aprendizagem veloz e de muito tempo de estudo, o que não condiz com alunos que precisam rever vários conteúdos do Ensino Médio. A ementa continha muito formalismo matemático e poucas aplicações, inclusive pouca ênfase no estudo de funções em contextos cotidianos e científicos.

De saída, era preciso adaptar o currículo à área profissional. Assim, entrevistamos o coordenador do curso de Arquitetura sobre uma abordagem adequada da disciplina. Resolvemos limitar o trabalho às funções polinomiais e valer-nos das notas de aula do curso de Sistemas Estruturais na Arquitetura I, as quais poderiam fornecer subsídios para atividades com viés interdisciplinar.

Com base nesses argumentos, criamos uma nova ementa: Números, equações, funções e gráficos. Derivadas e integrais de funções polinomiais de uma variável real. Aplicações: traçado de gráficos, problemas de otimização, áreas e volumes.

Escolhemos o livro de Edwards e Penney (1997), o software Winplot para apoio computacional e desenvolvemos duas atividades adrede concebidas para a disciplina.

O livro selecionado enfatiza, conforme seu Prefácio, "o aspecto gráfico juntamente com o tratamento numérico e simbólico", usando figuras e tabelas numéricas geradas em computador. Alinha-se, portanto, com a tendência de uso dessa tecnologia para estimular o emprego de representações múltiplas e para aprimorar o desenvolvimento conceitual dos alunos. A nossa escolha se baseou fortemente nesta característica além da ótima apresentação gráfica do texto como um todo.

O software escolhido foi o Winplot, fácil, de domínio público[4], já existente em português (JESUS, 2001) e rico em meios de visualização e de cálculo relativos à disciplina, sobretudo ferramentas de produção de gráficos de funções e de cálculo de integrais definidas por vários métodos numéricos com apoio visual. Para os alunos se familiarizarem com o programa, receberam um texto com os comandos necessários para obter gráficos e calcular, por diversos métodos numéricos,

[4] http://math.exeter.edu/rparris

aproximações de integrais definidas. Os cálculos podem ser visualizados graficamente. Com o texto dado, os alunos aprenderam, por conta própria, a empregar o software, sobre o qual não houve aula específica. Aprender a utilizar pacotes computacionais só com apoio de algum manual é algo que os alunos vão certamente enfrentar em sua vida acadêmica e profissional. Ademais, não havia tempo nem laboratório disponíveis para aulas com computador.

Uma dentre as duas atividades concebidas para a disciplina, e propostas em adição aos problemas do livro e àqueles propostos por nós, não é tratada aqui neste texto. Ela consiste num grupo de problemas que aborda, analítica e graficamente, a relação entre derivada e integral, com base nos diagramas (onipresentes em livros de Estruturas e de Resistência de Materiais) de esforços cortantes Q e momentos fletores M em vigas com cargas transversais ($M'(x) = Q(x)$).

A outra atividade, sobre a qual nos deteremos mais adiante, visa às habilidades de desenho arquitetônico. Trata-se do seguinte desafio: concepção e desenvolvimento do projeto de uma praça pública num terreno de 100m x 100m. O aluno é solicitado a usar funções para descrever os contornos de possíveis elementos da praça (canteiros, laguinhos, coretos...) e a calcular as áreas desses espaços. O trabalho incluiu gerar no computador um desenho do projeto e detalhar todos os cálculos efetuados (detalhes em PALIS, 2006).

Essa atividade inspira-se no trabalho de Brumatti (1999) e avança em vários aspectos, seja de revisão e emprego de literatura pertinente para construção e análise da proposta, seja quanto ao detalhamento da própria proposta.

Nessa atividade, o aluno aplica muito do conteúdo da disciplina. O planejamento de praças é parte da atuação de arquitetos e urbanistas; logo, o trabalho é uma aproximação da futura atividade profissional. O aluno enfrenta uma situação de aprendizagem com a qual não está habituado, pois tem muitas escolhas a fazer, incluindo a organização de seu tempo e a apresentação do trabalho.

A seguir, detalhamos a seqüência de ensino-aprendizagem de integral definida, que ocupou um terço do semestre. Como já dito ao final da seção 2, o que foi possível aprender com o projeto da praça como realizado pelos alunos é o foco da análise neste texto. Assim, no detalhamento da proposta curricular, omitimos as derivadas, não pertinentes ao projeto da praça.

O estudo da integral definida na proposta curricular

A seqüência de ensino-aprendizagem de integral definida foi planejada conforme as etapas seguintes — tudo intercalado com vários exercícios:

— Discussão sobre o conceito de área de figura plana, usando o método de exaustão (Lima, s/d), uma abordagem que já embute estratégias de integração numérica. Os alunos aceitam intuitivamente a existência da referida área e tratam como aproximações desta os números encontrados ao aplicar-se o método. Não se abordaram regiões não mensuráveis.

— Cálculo de aproximações da área A da região plana delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = x$ e pelas retas $y = 0$ e $x = 2$. Apresentam-se formas diferentes para se calcularem aproximações de A, por falta e por excesso, utilizando-se polígonos constituídos de coleções de retângulos (aproximações pelo extremo esquerdo e pelo extremo direito), com partições regulares (partições de [a, b] por subintervalos de mesmo comprimento) e forte apoio gráfico. Começa-se com seqüências A(n) de aproximações da área A, com a noção de limite de A(n) e com o valor da área A (no caso, 2). Os livros de Cálculo costumam omitir a *unidade* de área[5].

— Repete-se tudo com a função $f(x) = x^2$ definida em [0, 3] e com a função $f(x) = 100 - 3x^2$, definida em [0, 5]. Começa-se a dizer que A(m) é uma aproximação de A com quatro casas decimais se, para n > m, parece que as casas decimais não se alteram. Solicitam-se conjecturas para a área estudada em cada caso, e prossegue-se com o cálculo algébrico-simbólico das áreas, usando-se a noção de limite de forma intuitiva, com as dificuldades algébricas previstas.

— Noções gerais de soma de Riemann, definição de integral de uma função em [a, b]. Reformulação da integral definida para uma função contínua Noções gerais de soma de Riemann, definição de integral de uma função *f* em [a, b]. Reformulação da integral definida para uma função contínua *f*, usando partições sempre regulares. Interpretação de integral de uma função *f* negativa e contínua em [a, b]. Teorema Fundamental do Cálculo aplicado apenas a funções polinomiais.

— Cálculo corriqueiro de áreas planas.

— Métodos de integração numérica (extremo esquerdo, extremo direito, ponto médio, trapezoidal e Simpson[6]) explicados com apoio em gráficos e tabelas numéricas. Só abordamos funções polinomiais, o que possibilita desenvolver uma concepção operacional (processo) da integral por meio de seqüências numéricas distintas, obtidas pelos diferentes métodos, e também pode levar a desenvolver uma concepção estrutural (objeto) de integral pela aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo.

Nessa abordagem da integral definida, há permanente interação entre os quadros geométrico, numérico e algébrico-simbólico. O Winplot foi relevante no conforto operacional. Ele permite calcular aproximações de uma integral definida a

[5] Muitos livros de Cálculo não explicitam a unidade de área usada para expressar as medidas calculadas por integração.
[6] Omite-se o fato de que a regra de Simpson dá resultado exato para polinômio de grau 3.

partir da função f, do intervalo de integração [a, b], do número de subdivisões de [a, b] e do método (ponto esquerdo, direito, médio, trapezoidal, Simpson, aleatório). Além dos valores calculados, o programa permite visualizar a região estudada. É possível arbitrar o número de casas decimais para as aproximações. Os valores obtidos são arredondados para o número escolhido. Com certo abuso de linguagem, é possível construir seqüências numéricas A(n) correspondentes a áreas de figuras planas F(n) que “tendem” para a figura F cuja área A se procura. O programa permite visualizar a seqüência F(n) em paralelo à seqüência A(n).

A metodologia de ensino valoriza a discussão de problemas e o que o aluno faz em sala ou em casa. É contínua a interação entre alunos e professor. Aulas expositivas cingem-se a introdução e sistematização.

Implementação da proposta

A proposta foi implantada em duas turmas de cerca de 25 alunos, nos dois semestres de 2005. No primeiro semestre, o estudo gerou familiaridade com o ambiente. No segundo, algumas mudanças foram necessárias principalmente com relação à parte introdutória do curso, referente a Gráficos e Funções, e ao gerenciamento da atividade da praça.

Conforme o Prefácio do livro, o capítulo 1 (funções e gráficos) visa “oferecer um início conciso e rápido ao estudo do Cálculo”. Mas isso não supre bem as deficiências dos alunos: vários deles entendem função apenas como uma fórmula, concebem gráfico de função somente como um procedimento para construir uma pequena tabela e para marcar e ligar os pontos correspondentes, ou resolvem equações qual mero protocolo. Faltam-lhes raciocínio funcional e melhores noções do que seja um gráfico ou uma equação.

Este problema levou-nos a complementar extensivamente o capítulo 1 por meio de atividades que abordem esses tópicos, aí incluídos alguns temas com os quais o livro não trabalha, como diferenças e semelhanças entre os processos empregados e os resultados obtidos ao se desenhar um gráfico de uma função utilizando-se tecnologia computacional ou lápis e papel. Ao se tratar de gráficos em computadores, essa prática é fundamental e permite apreender melhor a própria idéia de função e de sua representação gráfica (PALIS e IPIÑA, 1999; PALIS, 1997). Além disto, foi ainda crucial relembrar, de um prisma estritamente algébrico, as funções polinomiais.

Aos problemas propostos pelo livro no seu capítulo 1 acrescentamos vários outros, dentre os quais diversos exercícios com enunciado (e a serem resolvidos) no contexto gráfico, pois o livro praticamente não propõe trabalhos restritos ao quadro gráfico, exatamente aquele com o qual os alunos têm pouca familiaridade e muita dificuldade. Esses problemas visam a desenvolver habilidades de associação entre os quadros, sobretudo entre o simbólico e o gráfico (no qual se apóia, aliás, a introdução dos conceitos de derivada e de integral). Como exemplo simples de um tal problema podemos citar: Dado o gráfico de uma função *f* e um ponto a no eixo horizontal, marque segmentos de comprimento *f(a)* e *f(f(a))* no eixo vertical. (não é dada uma expressão de *f*)

Em Palis (2003), já observamos que as representações gráficas têm sido usadas para dar apoio intuitivo a cálculos e argumentações desenvolvidos ao se apresentarem definições, propriedades, teoremas e algoritmos matemáticos, sobretudo no Cálculo, e que a eficiência desse emprego tem sido questionada. Que é que os alunos realmente "vêem" quando nos apoiamos em gráficos para introduzir as idéias de derivada, limite e integral? Esse tipo de abordagem supõe que o aluno pode construir mentalmente uma função dada por um gráfico. Mas isto não ocorre com a maioria dos estudantes, o que pudemos verificar numa pesquisa empírica com um grupo de 115 alunos iniciantes na área técnico-científica de nossa universidade, e que cursavam uma disciplina de transição Ensino Médio – Ensino Superior.

No segundo semestre houve mudanças no trabalho da praça, *v.g.*, antes realizado em grupos, passou a individual — segundo queixas de alunos, a participação de alguns colegas limitou-se, no respectivo grupo, à apresentação do trabalho. Sabíamos disso; as notas, aliás, variaram num mesmo grupo, dependendo das respostas a perguntas que fazíamos a distintos membros do grupo na apresentação final. Achou-se ainda que a atividade podia ser individual porque o nível de trabalho requerido não justificava a realização em grupo. Neste texto nos restringiremos ao que foi feito com a segunda turma.

Na apresentação do pré-projeto (a meados do semestre), — um esboço feito a mão e um desenho feito em computador, com os diversos espaços identificados e seus contornos dados por funções com seus respectivos domínios e fórmulas —, discutem-se as dificuldades previstas: explicitação dos domínios das funções usadas; distorções gráficas (*e.g.*, elipses onde se esperavam círculos); distorções nos desenhos em escala (*v.g.*, bancos de jardim com 50m x 4m). Esta atividade também foi mais bem realizada individualmente no segundo semestre e valorizada com uma parcela do grau atribuído a uma das provas.

A análise da experiência de inovação curricular, como um todo, pode ser feita desde vários enfoques e registros coletados. Preferimos destacar o que foi possível aprender com o projeto da praça, como já foi dito anteriormente. A seguir, a análise do projeto da praça é apresentada.

Análise do projeto da praça

Os alunos reagiram bem ao projeto e se envolveram bastante, o que não se dera quando o mesmo trabalho fora realizado por grupos de cerca de quatro alunos. Na lida com o Winplot, não houve problema que não fosse resolvido em conversas de final de aula ou no atendimento semanal. Os alunos saíram-se bem no desafio de aprenderem sozinhos o Winplot, sem aulas de instrução específica.

Foi ótimo o desempenho da turma na etapa em que era preciso dar as expressões das funções cujos gráficos delimitavam as regiões especificadas no projeto. Houve boa apropriação e mesmo expansão dos conhecimentos sobre construção de gráficos de funções da forma $g(x) \quad af(bx \quad c) \quad d$ a partir do conhecimento do gráfico de f. Foi intenso o trabalho com a noção de variável como argumento e como parâmetro. A necessidade de definir funções por meio de expressões e domínios contribuiu para reduzir a dificuldade com tais noções.

No cálculo das áreas dos setores da praça, dentre os 24 alunos participantes:

— sete as calcularam com o Winplot, escolheram valores para cada uma e os expressaram em m^2;

— três as calcularam com o Winplot, escolheram valores para cada uma e os expressaram sem unidade de medida;

— um as calculou com o Winplot, escolheu valores específicos para cada uma e os expressou em unidades de área (omitindo que esta correspondia a 100 m^2);

— dois as calcularam só com lápis e papel e responderam em m^2;

— seis usaram o Winplot mas não atribuíram valores específicos às áreas das regiões; deram as listas de aproximações fornecidas pelo programa para um certo número de subdivisões e para diferentes métodos numéricos; para áreas retangulares ou circulares, deram valores calculados por fórmulas já conhecidas por eles;

— cinco não as calcularam.

A tabulação não leva em conta a correção dos cálculos; o trabalho é longo e complexo, com muitas escolhas a fazer do ponto de vista estético, com várias associações entre representações algébricas e gráficas de funções e cálculo de áreas de diversas regiões com níveis variados de dificuldade. Sendo heterogênea a turma, o nível de acerto variou muito. Só a aluna L acertou todos os cálculos e apresentou seu excelente projeto numa organização que possibilitava, dentre outros aspectos, seguir perfeitamente raciocínios e procedimentos que L adotou para calcular as áreas.

A complexidade dependia de cada projeto. Para certas regiões, a determinação das funções que era preciso integrar (e em que intervalos) trazia dificuldade similar à dos casos tratados em sala e no livro. Outras regiões requeriam subdivisão em sub-regiões cujas áreas se pudessem calcular por integração; esse processo poderia ser difícil (ver o cálculo da área da região 7 no Anexo 1).

A aluna T (ver Anexo 2) calculou corretamente a área da região R, limitada pelos arcos de parábola 1 e 2 e pelas retas x = 0 e y = 0. Para isto, calculou a integral da função $f(x) \quad 5 \quad x^2/2$ em [0; 3,18] e deste valor subtraiu a integral de $f(x) \quad 2 \quad x^2$ em [0; 1,41]. Também acertou a área da região limitada pelo arco 6 e y = 10: subtraiu a integral de $f(x) \quad (x \quad 6)^2 \quad 9$ em [5, 7] do retângulo de área 20. Já ao calcular a região limitada pelos arcos de parábola 3 e 4, agiu incorretamente, mas percebeu que havia algo errado, pois essa região é congruente à região R. Ao tentar calcular a região limitada por y = 10 e pelos arcos 2, 3, 5, não subdividiu a região convenientemente, afirmando mesmo que a área estava entre as curvas 3 e 5, nem usou os recursos do programa para visualizar o processo.

A tela mostrada no Anexo 2 com uma região hachurada exemplifica o procedimento de cálculo de uma área pela aluna F, que não calculou a área que queria, mas uma outra, o que se pode visualizar com o programa. Mas F não usou tal informação do programa para corrigir seu procedimento; pode não ter solicitado a visualização ao Winplot.

No final havia dúvidas, que se tinham discutido na entrega do pré-projeto, sobre os conceitos de área e de semelhança, inclusive quanto à razão entre as áreas de região no terreno e na sua representação. A base teórica para abordar essa razão resume-se assim: a integral de uma função não-negativa no intervalo [a, b] dá a medida da área da região plana limitada pelo gráfico de *f* e as retas x = a, x = b e y = 0, se tomarmos como unidade de área o quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1)[7]. As escalas horizontal e vertical não precisam ser iguais. A transformação do plano dada por $T(x, y) \quad (ax, by)$ leva uma figura de área S numa figura de área $|abS|$. Como a maioria dos alunos usou a escala 1:1000 nos dois eixos, só era preciso multiplicar o valor das integrais por 100 para obter as correspondentes áreas na praça em metros quadrados.

Os seis alunos que deram como valor de certas áreas a lista de aproximações calculadas por diferentes métodos pelo Winplot podem não ter assimilado a concepção *processo* de integral. Abordamos a integral com forte apoio em quadros diferentes, numérico e gráfico, enfocando idéias de aproximação, o aspecto dinâmico do conceito. Não se estranhe que alguns alunos tenham concebido a

[7] Ver nota 4

integral como um *processo* numérico, que permite aproximar um certo valor específico (a medida exata da área considerada), e não como um *objeto* numérico (o limite comum das distintas seqüências construídas pelo programa, ou seja, o valor exato da área). Mas aqueles seis alunos podem ter tido problemas com o próprio conceito de área, diferentes métodos de cálculo levando a medidas distintas[8].

Quanto a outras pesquisas sobre integral definida, não estávamos num ambiente de computação algébrica como Thomas et al. (2004), transitamos entre cálculos exatos (com lápis e papel) e limites de cálculos aproximados, onde as próprias manipulações algébricas para o cálculo exato podem ter afastado alunos da concepção *objeto*.

Examinando a análise de dados de Czarnocha, vimos que os sujeitos de sua pesquisa entendiam o limite das somas de Riemann ou como uma soma infinita de retângulos de largura pequena, ou como uma soma de linhas (uma soma infinita de retângulos de largura nula). A autora diz que o aluno deveria conceber as somas de Riemann em partições com 2, ..., *n* subintervalos, e pensar que *n* é finito, em vez de tratar o limite da soma de áreas de *n* retângulos como a soma do limite dessas áreas. Pelos comentários de nossos alunos, não vimos entre eles tais concepções errôneas — o que não significa que estas não possam ter ocorrido.

Conclusão

Não há, já publicada, pesquisa ampla o suficiente para subsidiar uma proposta de ensino de Integral Definida em uma disciplina de Cálculo para futuros arquitetos ou engenheiros. Em nossa proposta, baseamo-nos prioritariamente no referencial teórico geral sobre as representações múltiplas e sobre a dualidade *processo/objeto* dos conceitos matemáticos. A pesquisa mais citada na literatura (ORTON, 1983) aponta caminhos curriculares amplos demais para serem levados em conta no contexto de uma disciplina.

Analisando o projeto, podemos dizer que a turma se desenvolveu bem nos tópicos Funções Polinomiais e Integral Definida, além do que ocorre usualmente num primeiro contacto com Matemática superior.

O trabalho com vários processos (seqüências diferentes de aproximações de uma área) de mesmo limite (a área) pode ter ensejado um início de concepção *objeto* de integral por alguns alunos e não por outros, o que já era de se esperar. Mas não previmos a não-construção da concepção *processo* por alguns deles.

Resultados errados para certas áreas, pela formulação incorreta da integral

[8] Alunos já perguntaram se podemos achar, dependendo do método usado, valores distintos para o volume de um mesmo sólido.

a calcular, podem estar indicando um aluno que calcula uma área mas não se preocupa em visualizar o que realmente encontrou, para se corrigir, se preciso. Conforme Thomas et al. (2004), embora programas de álgebra simbólica ofereçam várias representações, o uso destas não é automático: os alunos não necessariamente usam uma outra representação para conferir o seu trabalho.

Em nosso caso, parece ter havido articulação suficiente entre os contextos algébrico e gráfico. A primeira parte do trabalho da praça baseia-se nessa articulação e foi muito bem sucedida.

Interpreto o que aconteceu no tocante às áreas como um sinal de que é preciso desenvolver atitudes metacognitivas de auto-regulação em nossos alunos, o que inclui a conferência de seus resultados e processos. É difícil desenvolver tais atitudes em alunos que crêem ser do professor a tarefa de corrigir. Ademais, vários alunos não concebem outro sentido para a palavra “conferir” que não seja percorrer de novo o que já escreveram, ou olhar a resposta no livro. Um exemplo simples dessa atitude ocorre quando o aluno, após resolver uma equação, não verifica se a resposta encontrada é mesmo solução, mas apenas reexamina as manipulações algébricas. Não é hábito dos alunos realizar a tarefa de outra forma, quando possível, examinar a ordem de grandeza da resposta ou ver se há incoerências. Uma possível maneira de verificar inconsistências é usar diferentes representações de objetos ou processos envolvidos. A verificação de processos e de resultados deve desenvolver-se em íntima relação com a articulação de representações, até para que se possam realizar as apostas cognitivas baseadas no diálogo entre as representações.

As atividades propostas foram adequadas aos alunos. Devem-se buscar outros tipos de atividades, relativas a necessidades trazidas pela área profissional específica, para se criar um acervo de propostas conveniente a essa clientela. Merecem exploração e desenvolvimento algumas sugestões ainda não suficientemente detalhadas em Verner e Maor (2003).

Uma conclusão surpreende: os conceitos de área e de semelhança podem não estar bem assimilados por muitos alunos no fim da Escola Básica. Tais conceitos são cruciais e explicitamente enfatizados como objetos de estudo nos Parâmetros Curriculares de Ensino Fundamental (BRASIL, 1998: 73,124-5) e Médio (BRASIL, 2002: 116). Pelo que notamos, esses temas devem ser revistos com cuidado nos diversos cursos universitários onde estão presentes as noções de escalas e medidas de grandeza, mormente as áreas que trabalham, por exemplo, com plantas, mapas, fotos e computação gráfica.

É relevantíssimo abordar em contextos variados a Integral Definida, a cujo respeito a restrição a áreas pode gerar idéias errôneas. Além do cálculo de áreas e volumes, é crucial incluir outras grandezas físicas, momentos e centros de massa. Esperamos que os alunos tenham criado, sobre a integral, um acervo de imagens que lhes possibilite aprofundar esse conceito, quando necessário, em outras disciplinas. Finalmente, como já dito, não existe consenso quanto ao currículo de Matemática para a formação de arquitetos e são raros os trabalhos publicados na área. Segundo Verner e Maor (2003), são necessários um *survey* abrangente e estudos empíricos sobre currículos possíveis, o que poderia reduzir o hiato entre os que defendem a permanência ou a retirada da Matemática na Arquitetura. Esperamos que essa proposta possa contribuir para a discussão. Ademais, este trabalho é exemplo do papel que a pesquisa em Educação Matemática pode ter na busca de soluções para os problemas que muitos docentes superiores encontram, em disciplinas para outros departamentos.

Este estudo insere-se no movimento do professor-pesquisador de sua própria prática. O professor-pesquisador alia investigação e ensino: em face de um problema prático, submete-o a exame crítico, resolve-o da melhor maneira possível e divulga sua solução. Esse trabalho beneficia diretamente o próprio professor e os alunos envolvidos, e gera conhecimentos didáticos. Sua divulgação contribui para se formar uma comunidade de professores interessados nas questões pedagógico-disciplinares e na valorização deste gênero de pesquisa no ensino superior de Matemática.

Referências

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; David, J.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Thomas, K. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. **Research in Collegiate Mathematics Education**, v. 2, p. 1-32, 1996.

Brasil/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental – Matemática**. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brasil/MEC. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

Brumatti, R. A computer based Calculus Course suited to professional expectations of future architects. **Anais do ICTCM 10**, p.67-71. Addison Wesley, 1999.

Crowe, D. e Zand, H. Computers and Undergraduate Mathematics 2: on the desktop. **Computers & Education**, 37 ,p. 317-344, 2001.

Czarnocha, B.; Loch, S.; Prabhu, V.; Vidakoviv, D. The concept of definite integral: Coordination of two schemas. **Anais do PME 25**, 2, p. 297-304, 2001.

Dreyfus, T. The nature of advanced mathematical thinking. In Tall, D. (ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. London: Kluwer, p. 25-41, 1991.

Edwards, C. H.; Penney, D. E. **Cálculo com Geometria Analítica**. V. 1, 4. ed. Prentice-Hall do Brasil, 1997.

Ferrara, F.; Pratt, D.; Robutti, O. The Role and Uses of Technology for the Teaching of Algebra and Calculus. In: Gutiérrez, Angel e Boero, Paolo (eds.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**. Rotterdam: Sense, p. 237-273, 2006.

Forquin. J-C. **Escola e Cultura**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1993.

Jesus, A. Winplot. **Revista do Professor de Matemática**, 47, p.41-44, 2001.

Lima, E. L. Medida e forma em Geometria. Rio de Janeiro: Impa/Vitae, (s/d).

Monaghan, J.; Shyashiow, S.; Tall, D. Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System, **Anais do PME 18**, p. 279-286, 1994.

O'Connor, J.; Robertson, E. F. **Mathematics and Architecture**, 2002 . Disponível no site: http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Architecture.html

Orton, A. Student's understanding of integration. **Educational Studies in Mathematics**, 14, p. 1-18, 1983.

Palis, G. L. R. Comprimento da Circunferência no Ensino Elementar. **Revista do Professor de Matemática**, 14, p.29-37,1989.

__________. Tecnologia, gráficos e equações. **Revista do Professor de Matemática**, 26, p.30-38, 1994.

__________. Gráficos de Funções em Calculadoras e Com Lápis e Papel, **Educação e Matemática**, 45, p. 37-40, 1997.

__________. Uma análise das construções mentais subjacentes à produção e interpretação de gráficos de funções. Carvalho, L. M.; Guimarães, L. C. (orgs.). **História e Tecnologia no Ensino de Matemática**, v.1. Rio de Janeiro: IME/UERJ, 2003.

__________. Uma aproximação à questão da integração curricular de matemática e arquitetura. Anais do III SIPEM, 2006. CD-ROM.

Palis, G. L. R. e Ipina, L. Procurando Um Equilíbrio Entre O Que Se Pode "Ver" E O Que Se Pode "Imaginar". **Revista Educação Matemática Pesquisa**,1 (2), p. 31-46, 1999.

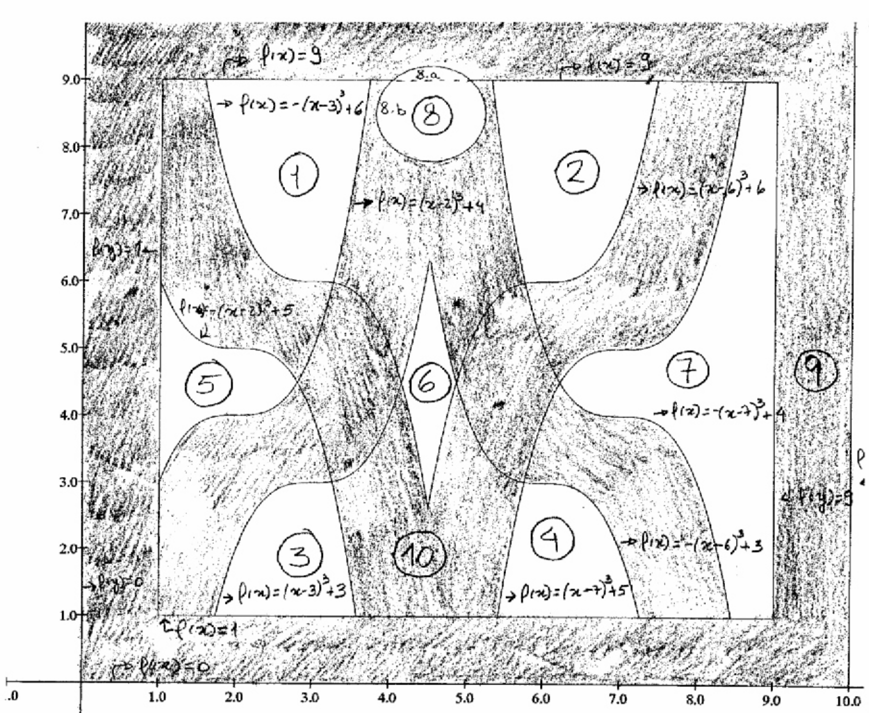
Salingaros, N. A. Architecture, Patterns, and mathematics. **Nexus Network Journal**, 3(1), 2001.

Thomas, M., Monaghan, J. e Pierce, R. Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, assessment, Teaching and Learning. In: Stacey, K. e Kendal, M. **The Future of the Teaching and Learning of Algebra**, p. 153-186. USA: Kluwer, 2004.

Verner, I. M.; Maor, S. The Effect of Integrating Design Problems on Learning Mathematics in an Architecture College. **Nexus Network Journal**, 5(2), 2003.

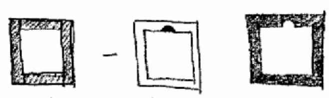
Submetido em 27/11/2006
Aprovado em 15/10/2007

Anexo 1



ESC = 1/1000

(9) $\Rightarrow 10 + 10 + 2.8 = 36$



36 - 0,1425 = 35.8575 U.A.

(10) $\Rightarrow 8 \times 8 = 64$

$64 - \left((1) + (2) + (3) + (4) + (6) + (7) + (8b)\right) =$

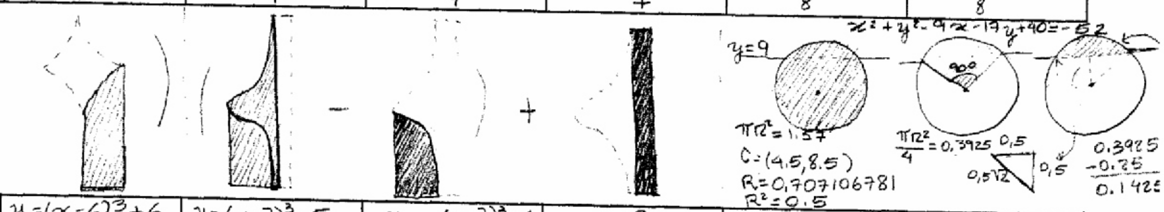
$64 - 28.388497 = 35.611503$ U.A.

$f(x) = 0$	$D = [0, 10]$
$f(x) = 10$	$D = [0, 10]$
$f(x) = 1$	$D = [1, 9]$
$f(x) = 9$	$D = [1, 3.70998]$
$f(y) = 0$	$D = [0, 10]$
$f(y) = 10$	$D = [0, 10]$
$f(y) = 1$	$D = [1, 9]$
$f(y) = 9$	$D = [1, 9]$
$f(x) = 9$	$D = [7{,}44225, 9]$

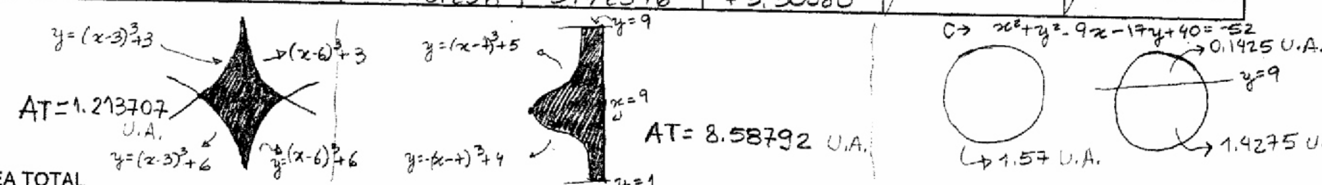
$f(x) = (x-3)^3 + 3$	$D = [1{,}74008, 4.5]$
$f(x) = (x-2)^3 + 4$	$D = [1, 3.25637]$
$f(x) = -(x-2)^3 + 5$	$D = [1, 3.58740]$
$f(x) = -(x-3)^3 + 6$	$D = [1.5577, 4.5]$
$f(x) = (x-7)^3 + 5$	$D = [5.41260, 8.5879]$
$f(x) = (x-6)^3 + 6$	$D = [4{,}5, 7{,}44225]$
$f(x) = -(x-6)^3 \cancel{+3}$	$D = [4{,}5, 7.25992]$
$f(x) = -(x-7)^3 + 4$	$D = [5.29002, 8.44225]$

$x^2 + y^2 - 9x - 17x + 40 = -52$

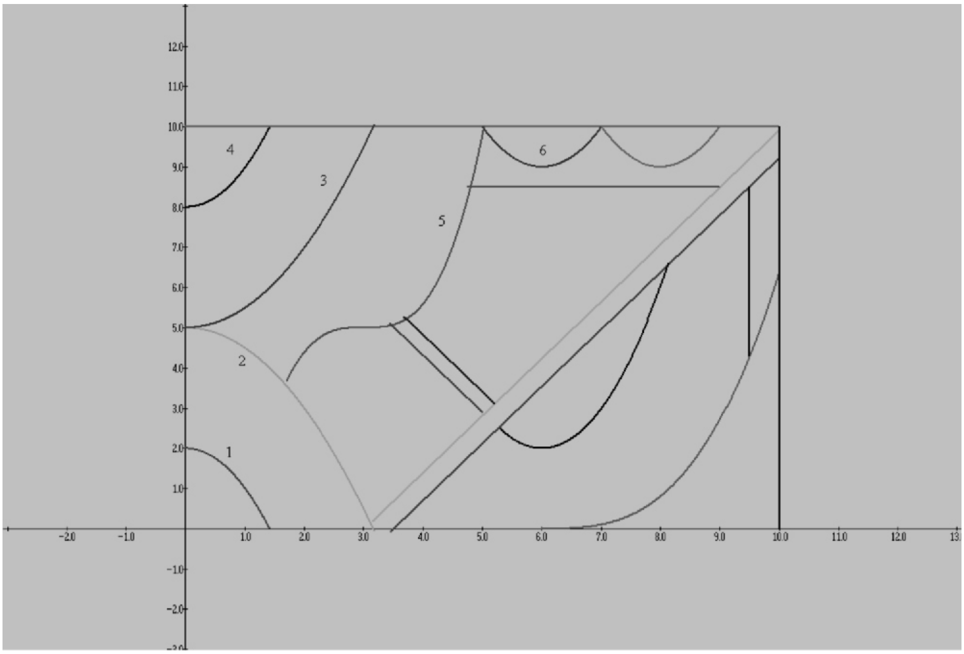
INTEGRAÇÃO F-G	6	7	7	7	8	8
F	$y=(x-6)^3+6$	$y=(x-7)^3+5$	$y=-(x-7)^3+9$	$y=9$		
G	$y=1$	$y=1$	$y=1$	$y=1$		
LIMITE INFERIOR	4,5	6.20630	6.20630	8.5874		
LIMITE SUPERIOR	4,85529	8.5874	8,44225	9		
SUB INTERVALOS	100	100	100	100		
PONTO À ESQUERDA	0,93675	-10,95928	-5,176432	-3,30080		
PONTO MÉDIO	0,94009	-11,01245	-5,72546	-3,30080		
PONDTO À DIREITA	0,94341	-11,06643	-5,68606	-3,30080		
TRAPEZOIDAL	0,94008	-11,01285	-5,72519	-3,30080		
PARABÓLICO	0,94009	-11,01258	-5,72537	-3,30080		
ALEATÓRIO	0,93996	-11,01258	-5,72546	-3,30080		
ÁREA	0.94009	11,01258	5,72546	+3,30080		



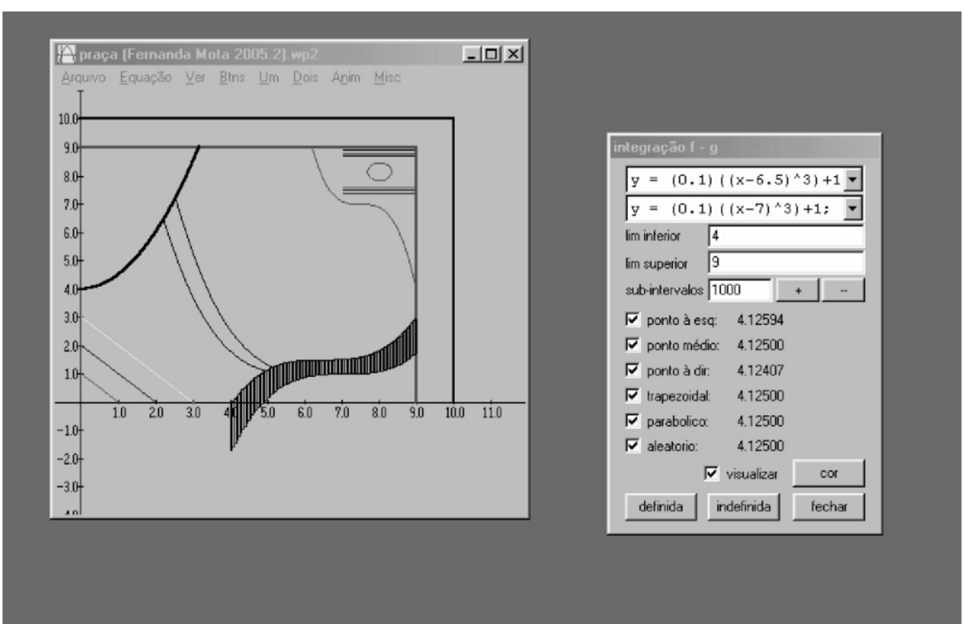
ÁREA TOTAL



Anexo 2



1
2
3
4
5
6



praça (Fernanda Mota 2005.2).wp2
Arquivo Equação Ver Btns Um Dois Anim Misc
integração f - g
y = (0.1)((x-6.5)^3)+1
y = (0.1)((x-7)^3)+1;
lim inferior 4
lim superior 9
sub-intervalos 1000
ponto à esq: 4.12594
ponto médio: 4.12500
ponto à dir: 4.12407
trapezoidal: 4.12500
parabolico: 4.12500
aleatorio: 4.12500
visualizar
cor
definida
indefinida
fechar