Exploração de trabalhos de Escher em aulas de geometria

Clarissa Trojack Della Nina
Professora do IEE Vasconcelos Jardim-General Câmara/RS
e CNEC – São Jerônimo/RS
Mestre em Educação Matemática pela PUCRS.
clarissatrojack@gmail.com

Maria Elvira Jardim Menegassi
Professora do Colégio Dom Bosco – Porto Alegre/RS
Licenciada em Matemática pela PUCRS.
elvira4@terra.com.br

Mercedes Matte da Silva
Professora do Colégio Farroupilha – Porto Alegre/RS
Mestre em Educação Matemática pela PUCRS.
mercedesmatte@terra.com.br

Resumo
A integração entre diferentes disciplinas é uma das maneiras de perceber a ligação entre elas. Em geral, professores de Matemática buscam parcerias com outras disciplinas para fazer com que os alunos observem a presença da Matemática em outras áreas do conhecimento. A Matemática tem forte ligação com a Arte e, neste caso, em especial, quer-se mostrar o vínculo entre ela e algumas das obras do artista holandês, M.C. Escher. Suas obras mostram diversos conceitos trabalhados, em geral, na geometria, assim como simetria, rotação e translação. Este trabalho tem por objetivo estudar esses conceitos através da análise de algumas obras de Escher de que forma ele estruturava seus diversos mosaicos, os quais consistem num pavimento de ladrilhos variados.

Palavras-Chave: Escher, Matemática e Arte, Mosaicos geométricos, Geometria.

Exploration of Escher´s works in geometry classrooms

Abstract
The integration between different discipline is one in the ways to perceive the linking between them. In general, teachers of Mathematics search partnerships with others disciplines to make with that the students observe the presence of the Mathematics in other areas of the knowledge. The Mathematics has fort linking with the art and, in this case that, special, it is wanted to show the great one tie between it and the workmanships of the dutch artist, M.C. Escher. Its workmanships show diverse worked concepts, in general, in geometry, as well as symmetry, rotation and translation. This work has for objective to analyze some workmanships of Escher observing these concepts. Of that it forms it structuralized its diverse mosaics, which consist of a floor of varied paving-tiles.

Keywords: Escher, Mathematic and Art, Geometric Mosaics, Geometry.

Introdução

A visão das pessoas, em geral, a respeito da Matemática está associada a sentimentos negativos, pois muitas vezes é considerada uma disciplina difícil, chata, fechada e de pouca aplicação. Já as pessoas que tem uma visão contrária a esta, conseguem "ver" a Matemática em quase tudo que as rodeiam.

Neste trabalho quer-se mostrar a forte ligação da Arte com a Matemática, através dos trabalhos de Escher[1] que utiliza noções de Matemática nas suas obras.

A ligação entre Arte e Matemática favorece o interesse por novas formas de aprendizagem, buscando um sentido mais estético e cultural para esta ciência. A integração da Arte com a racionalidade da Matemática desperta a curiosidade e o senso de observação, fazendo com que o aluno tenha um olhar mais crítico do mundo que o cerca. Analisar, refletir e compreender os critérios utilizados na composição de uma obra de arte provoca o interesse e a necessidade de preservação das diferentes culturas.

Essa proposta pedagógica foi pensada para que a integração dos conhecimentos das duas disciplinas envolvidas aconteça efetivamente. Cada disciplina apresenta suas estruturas, conceitos, habilidades, procedimentos e aplicações, o que não inviabiliza a existência de conexões entre elas.

Na obra de Escher é constante o revestimento e a pavimentação regular de uma superfície, usando padrões que se justapõe sem deixar nenhum espaço vazio. De acordo com Fainguelernt e Nunes (2006, p. 23) a inspiração de Escher veio a partir de estudos profundos que realizou sobre a Arte e a cultura árabe e suas propriedades geométricas. A Arte árabe é repleta de simetrias, translações e padrões de repetição, porém fica limitada a formas abstrato-geométricas. Escher foi além, e usou figuras existentes na natureza, tais como peixes, borboletas, aves, répteis entre outros.

Escher utilizou demasiado em seus trabalhos as isometrias do plano, entre elas a simetria e a translação. Os seus trabalhos impressionam dois mundos – o das Artes e o da Matemática.

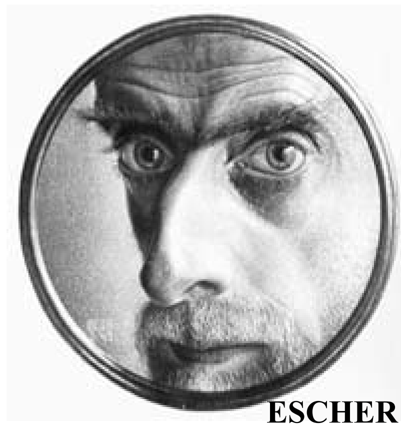
Através de uma prática que integra as disciplinas de Artes e Matemática, esse trabalho tem como objetivo possibilitar ao aluno uma análise das obras de Escher, observando os conceitos matemáticos por ele utilizados na construção de suas produções artísticas, dando ênfase a obras classificadas pelo autor como divisão regular de superfícies.

[1] Maurits Cornelis Escher (1898-1972): artista holandês.

As atividades propiciam um ensino de Matemática contextualizado e significativo, e que também desperte no aluno a sensibilidade e a curiosidade pelo mundo das Artes.

A Vida do Escher[2]

Maurits Cornelis Escher nasceu na Holanda em 17 de junho de 1898 na cidade de Leeuwarden e morreu em 27 de março de 1972. É um artista que utiliza noções matemáticas nas suas obras nas quais é possível perceber notável combinação de sensibilidade e precisão técnica. É no campo da geometria, em especial, que ele demonstra em seus trabalhos um grande domínio nessa área.


ESCHER

Escher quer mostrar no seu trabalho a "imagem de seus pensamentos", conforme ele mesmo relata:

> Pessoalmente vivi, durante anos, num tal estado de ilusão. Mas depois veio o momento em que os meus olhos puderam ver claro. Percebi que o domínio da técnica não era mais a minha finalidade, porque fui tomado dum outro anseio, cuja existência até então me era desconhecida. Vinham-me idéias que nada tinham que ver com a arte da gravura, fantasias que me cativavam de tal maneira que as queria absolutamente transmitir a outros. Isto não podia acontecer com palavras, pois não eram pensamentos literários, mas sim "imagem de pensamentos" que só se poderiam tornar compreensíveis aos outros, quando se lhes pudesse mostrar como imagem visual. O método pelo qual se poderia chegar a essa imagem, perdeu de repente significado. Naturalmente, não é em vão que alguém se ocupa durante anos com as técnicas da gravura. O "ofício" não só se havia tornado na minha segunda natureza, mas também me parecia necessário para continuar

[2] Todas as imagens dos trabalhos de Escher foram retiradas de: http://images.google.com.br/images?hl=pt-BR&q=ESCHER&btnG=Pesquisar+imagens.&gbv=2

> a usar uma técnica de reprodução que possibilitasse fazer compreender as minhas intenções a muita gente ao mesmo tempo (ESCHER, 2004, p. 5).

Em 1922 deixou a escola de Arquitetura e Artes Decorativas, na qual tinha iniciado nas técnicas de gravura artística. A madeira foi seu primeiro material predileto, e nos sete anos que permaneceu na Itália trabalhou com este material. Foi em 1929 que produziu sua primeira litografia[3] e, em 1931 fez sua primeira xilogravura. De 1922 até 1935 dedicou-se a pesquisa das propriedades do material para gravura e suas limitações. Neste período ele produziu aproximadamente 70 xilogravuras[4] e entalhes, e, cerca de 40 litografias, os quais considerou como "exercícios de dedos" e com pouco ou nenhum valor. Por volta de 1938 se concentrou em transmitir suas idéias pessoais, nesta época vivia na Itália. Esteve também na Suíça, na Bélgica e na Holanda. Cada vez mais sua idéia era expressar suas imagens interiores. Em 1946 teve contato com a técnica de raspagem, gravura à maneira negra (meia-tinta)[5]. Sua predileção foi contornar uma figura através de contraste de cores.

Na maioria das suas obras Escher tem a intenção de esclarecer uma determinada linha de pensamento que tem ligação com suas observações e as leis da natureza do mundo que o cerca. Conforme suas idéias ele escreve:

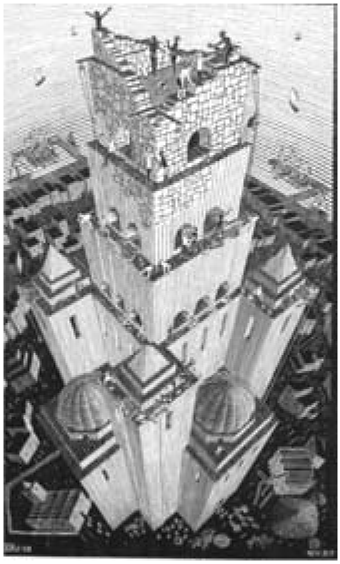
> Olhando de olhos abertos os enigmas que nos rodeiam e ponderando e analisando as minhas observações, entro em contato com os domínios da matemática. Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exatas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão (ESCHER, 2004, p. 6).

Escher (2004) classifica suas obras de dez maneiras:

I. Primeiras Estampas

As sete figuras deste grupo não formam uma unidade e foram produzidas antes de 1937. Elas reproduzem realidades observadas pelo autor. A seguir apresentamos duas dessas figuras com o título da obra e o ano de criação.

3 Processo de gravura em plano, executado sobre pedra calcária.
4 Estampa tirada de gravura em relevo sobre prancha de madeira.
5 Estampa obtida pelo processo de gravura a entalhe em que a imagem se consegue mediante granido da placa, que produz um negro uniforme.



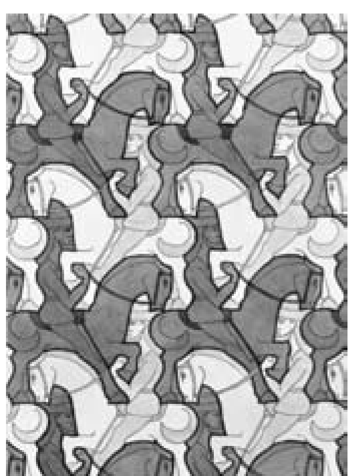
Torre de Babel - 1925

Sonho - 1925

II. Divisão regular de superfície

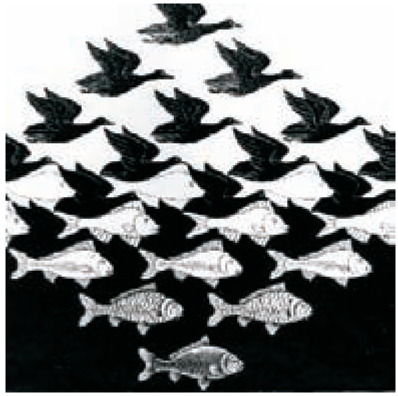
As 28 figuras deste grupo representam um período de grande inspiração. Nelas aparecem conceitos como simetria, mostrando como uma superfície pode ser dividida em figuras iguais e preenchida por elas. A seguir são apresentadas algumas dessas figuras, novamente com o seu título e ano de criação.

a) <u>Reflexão com escorregamento:</u> para representar simetria numa superfície plana, é preciso observar três princípios fundamentais da cristalografia: translação, rotação e reflexão com escorregamento.



Cavaleiros - 1946

b) A função das figuras como plano de fundo: quando observamos um objeto na figura e o restante é apenas pano de fundo.



Ar e água - 1938

c) Desenvolvimento de formas e contrastes: quando numa tira de papel se desenvolve uma evolução de baixo para cima.

Libertação - 1955

d) O número infinito: para representar um número infinito é preciso ir reduzindo o tamanho da figura até que alcance o limite da forma infinitamente pequena.

Céu e Inferno - 1960

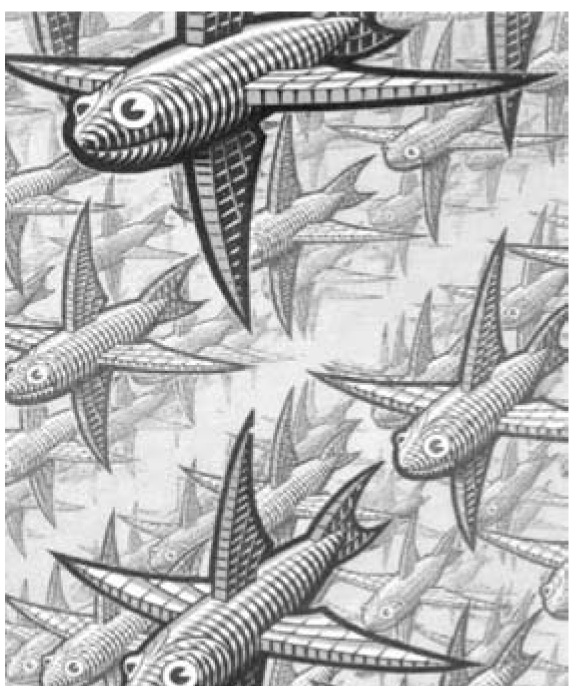
e) Narrativas em imagens: representa a transição do plano para o espaço e vice-versa.

Répteis - 1943

f) <u>Preenchimento irregular de superfícies planas:</u> figuras que preenchem um espaço sem que nenhuma figura se repita.

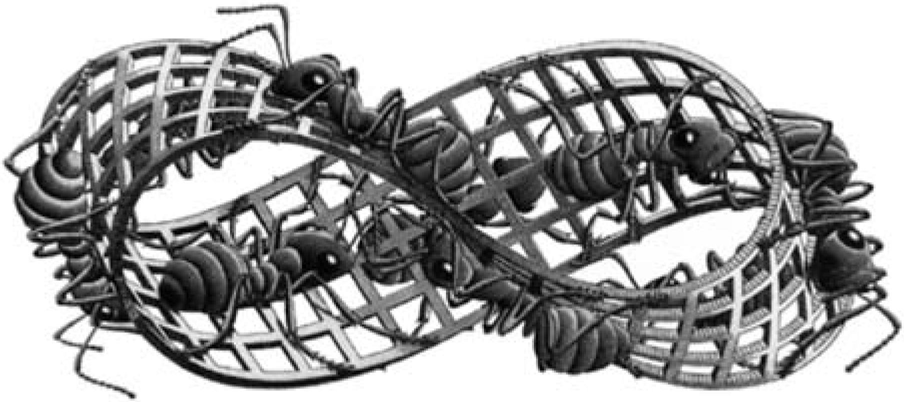
Mosaico II - 1957

III. O espaço ilimitado



Profundidade - 1955

IV. Círculos e espirais no espaço



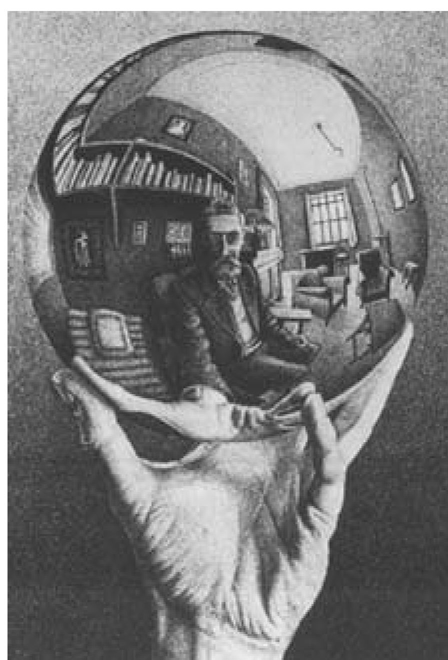
Laço de Möebius II

V. Reflexões

a) Reflexões na água:

Três Mundos - 1955

b) Reflexões em esferas:



Mão com esfera refletora – 1935

VI. Inversões

Ver uma figura de fora para dentro ou de dentro para fora pode mostrar a inversão que a mente produz.

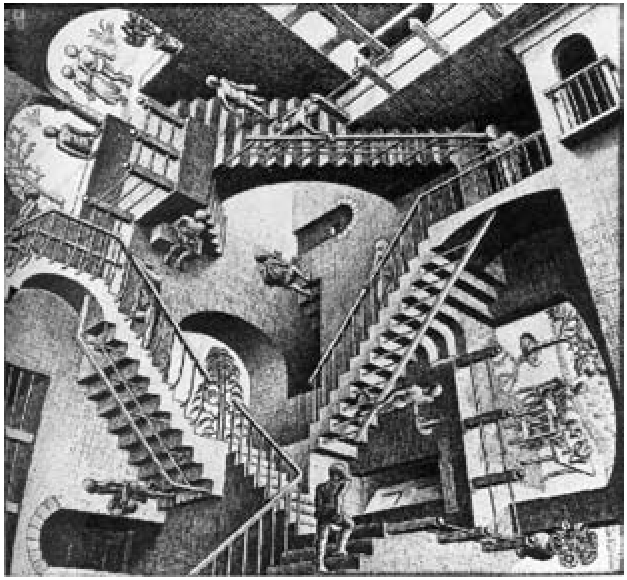
Côncavo e Convexo - 1955

VII. Poliedros

Estrelas - 1948

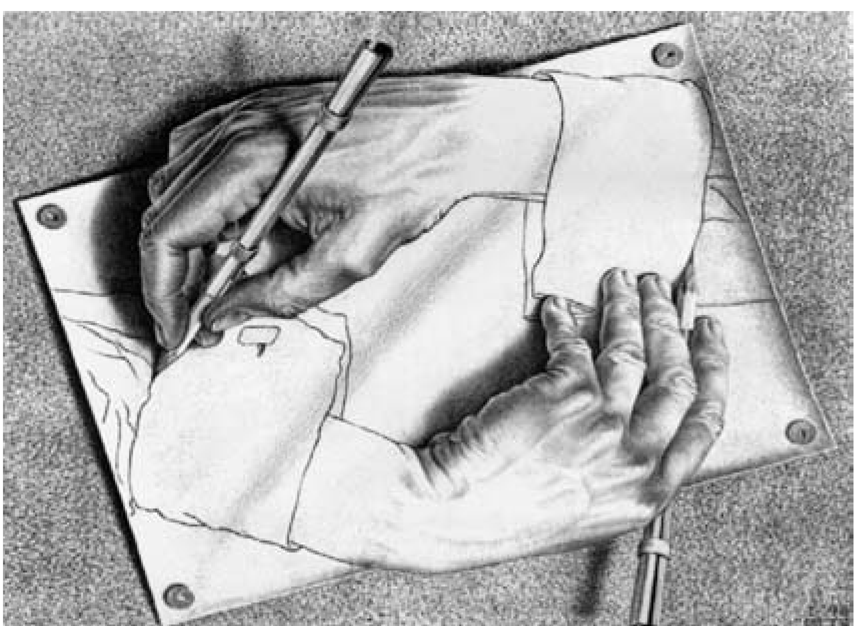
VIII. Relatividades

Figuras dão idéia de perspectiva e horizonte.



Relatividade - 1953

IX. Conflito entre superfície e espaço



Desenhando-se - 1948

X. Construções impossíveis

Escher é considerado o artista que mais êxito teve na conexão da Matemática com a Arte. Na sua obra existe um profundo conhecimento de geometria.

Belvedere - 1958

Divisão Regular de Superfícies

Este trabalho tem por objetivo analisar algumas obras do Escher observando os conceitos matemáticos que ele utilizou para construir determinadas obras, no caso, pertencente à segunda maneira de sua classificação.

Escher fazia mosaicos que consistiam num pavimento de ladrilhos variados. Pavimentar um plano é preencher completamente este mesmo plano com o uso repetido de polígonos ou outras figuras, sem falhas, nem sobreposições. Essas figuras que se repetem sem falhas e sobreposições são chamadas de ladrilhos. Na composição de seus mosaicos, Escher, trabalhava com os seguintes conceitos matemáticos: simetria, ângulos, rotação, vetor, reflexão e translação.

Simetria - Reflexão

A simetria é observada na natureza, nas Artes, na arquitetura e em muitos objetos utilizados no dia-a-dia. A borboleta é um perfeito exemplo de simetria na natureza. Na geometria, simetria significa que existe uma sobreposição perfeita a partir de um ou mais eixos que denominamos eixo de simetria.

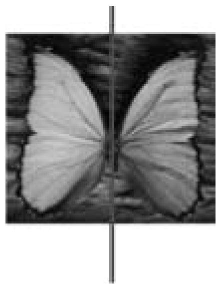


Figura 1 - Simetria da borboleta

As figuras podem apresentar diferentes eixos de simetria:

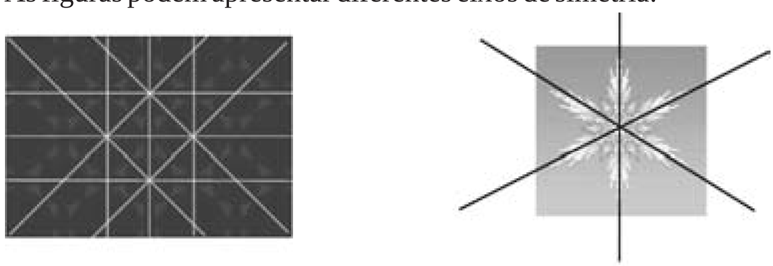


Figura 2 - Eixos de simetria

Associando a simetria a um sistema de coordenadas no plano cartesiano, torna-se fácil a construção de diferentes figuras e possibilita que o aluno compreenda as propriedades de reflexão no plano.

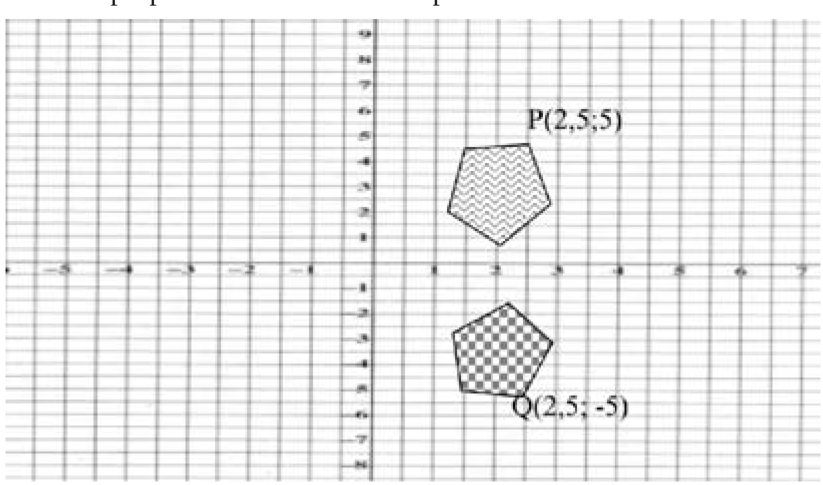


Figura 3 - Simetria no plano cartesiano

O ponto Q é simétrico ao ponto P em relação ao eixo das abscissas. Pode-se afirmar que todos os pontos de simetria reflexiva em relação ao eixo X, terão mesma abscissa e ordenadas opostas.

Um exemplo de trabalho de reflexão na obra de Escher é chamado “Dia e Noite”, no qual uma figura geométrica se transforma em um pássaro. Os pássaros brancos voam em direção à noite enquanto os pretos se dirigem para a imagem iluminada, que é a imagem refletida.

Figura 4 - Dia e Noite

Simetria - Translação

Translação é um movimento de simetria no qual uma figura desliza sobre uma determinada reta, mantendo-se inalterada. Observar-se movimentos de translação através do plano cartesiano, no qual se trabalha as relações entre segmentos. A figura original apenas sofre deslocamento, mantendo-se com mesma forma e mesma medida.

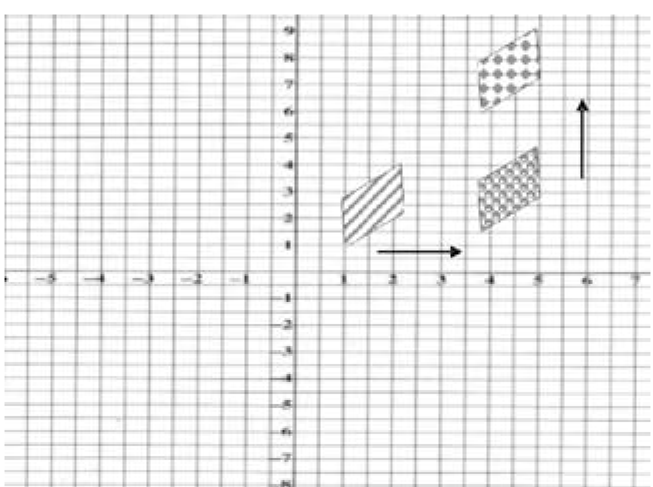


Figura 5 - Translação no plano cartesiano

Na gravura “Cavaleiros” é possível observar o movimento de translação tanto na parte superior como inferior, em sentidos opostos.

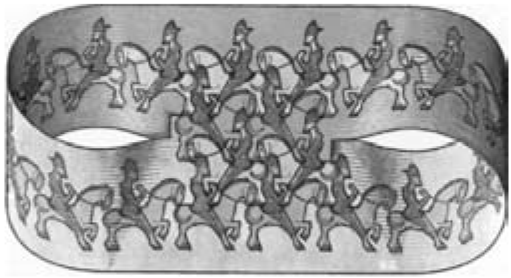


Figura 6 - Cavaleiros

Escher também utiliza na xilogravura “Dia e Noite” a simetria de translação, como podemos acompanhar nos gráficos abaixo.

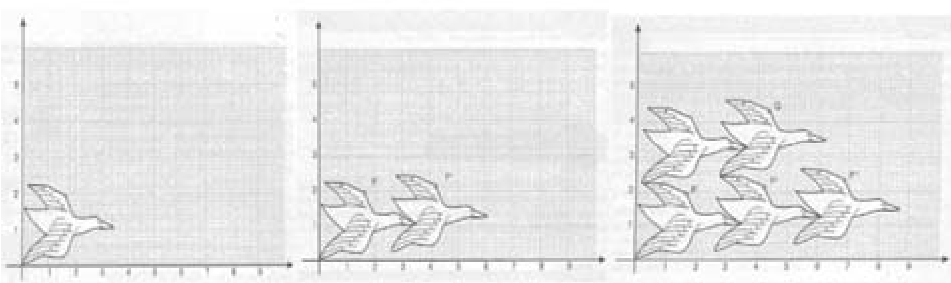
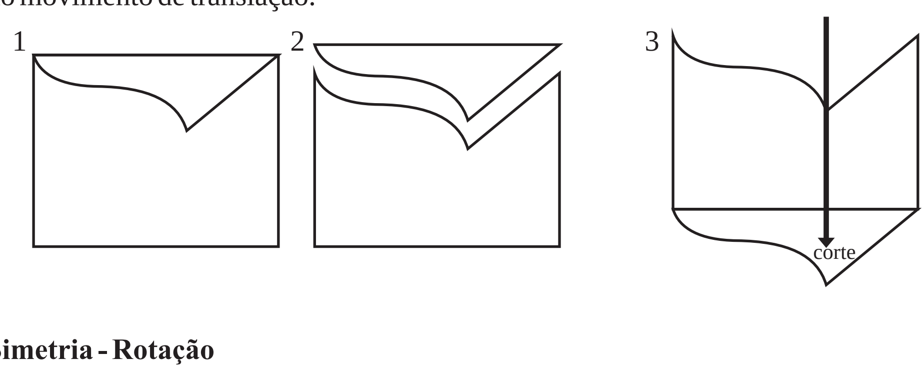


Figura 7 - Simetria e translação

No esquema abaixo é possível observar a construção de uma figura através do movimento de translação.



Simetria - Rotação

Na simetria de rotação, se pode observar que o movimento acontece em torno de um ponto, que poderá estar na figura ou fora dela. Este movimento percorre um ângulo, cujo vértice está no ponto de deslocamento.

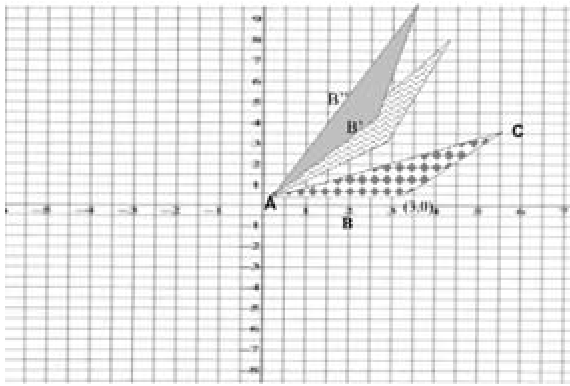


Figura 9 - Rotação no plano cartesiano

Observa-se que na figura 9 as rotações realizadas. A figura original (triângulo ABC) foi rotacionado de 30º e, em seguida, de 15º, no sentido anti-horário em relação à origem do plano cartesiano. A figura original sofreu rotação, porém, manteve-se com a mesma forma e as mesmas medidas. Portanto para descrever um movimento de rotação, são necessárias três informações: o ângulo, o ponto em torno do qual será rotacionada a figura e o sentido (horário ou anti-horário).

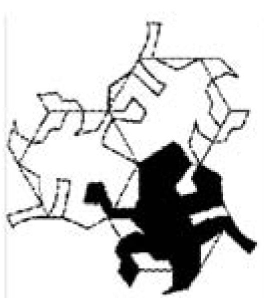


Figura 10 - Simetria e rotação

Divisão do Plano

Nas construções dos mosaicos de Escher existe um princípio básico que é como as figuras se movimentam no plano. Existem três tipos de movimentos: translação, rotação e simetria.

Conforme dissemos anteriormente, a pavimentação de um plano consiste em cobrir este plano com figuras planas, de modo que não haja espaços entre elas e sem haver sobreposições. Essa pavimentação só é possível de ser feita com certas figuras geométricas, e pode se utilizar a Matemática para decidir previamente se será possível essa pavimentação. Para isso, de acordo com Imenes (1987, p. 16): “Quando reunimos figuras ao redor de um ponto e conseguimos que a soma dos ângulos seja 360°, as figuras se encaixam sem deixar vãos, nem se sobrepõem”. Essa é a propriedade que permite construir mosaicos e as figuras planas regulares que verificam essa propriedade, são: o triângulo eqüilátero, o quadrado e o hexágono regular.

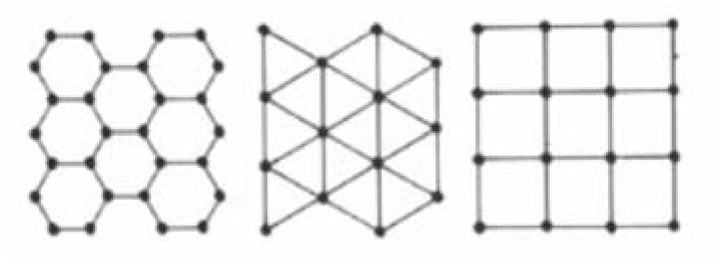


Figura 11 - Malhas dos mosaicos

Nos exemplos a seguir é possível observar mosaicos feitos com o triângulo eqüilátero, com o quadrado e com o hexágono regular, observando a formação do ângulo de 360° em torno de um ponto.

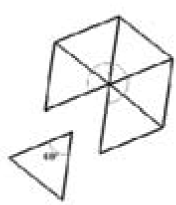
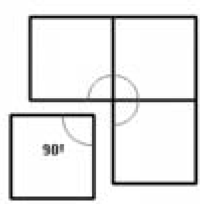
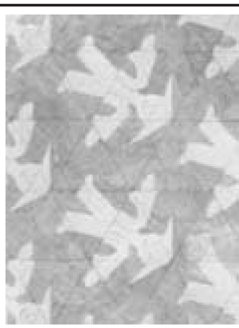
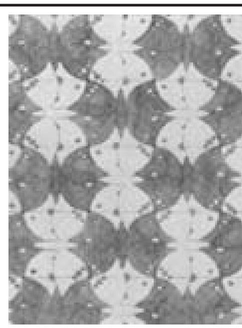
6 ângulos de 60°	4 ângulos de 90°	3 ângulos de 120°
		
		

Figura 12 - Exemplos de mosaicos

Como contra-exemplo, podemos observar a figura 13, na qual a soma dos ângulos em torno do mesmo ponto não é igual a 360º. Existe um espaço não preenchido, já que 3. 108° = 324° fica faltando 36° para completar os 360°, ou seja, com o pentágono regular não é possível fazer um dos mosaicos de Escher.

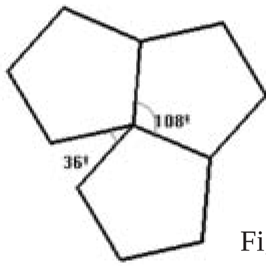


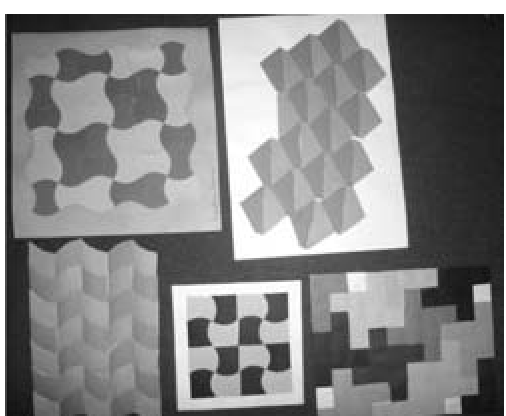
Figura 13 - Contra-exemplo de malha

Atividades de Sala de Aula

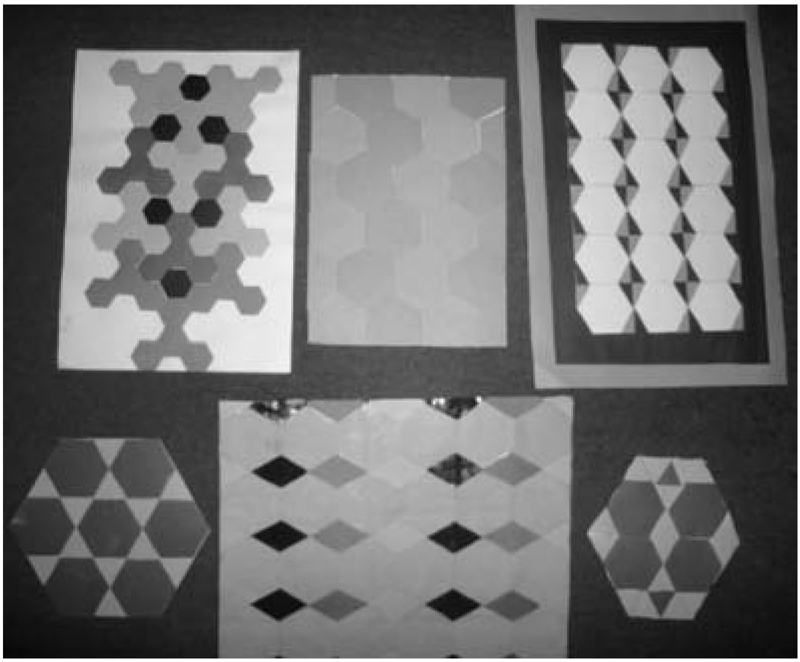
Articulando Artes e Matemática é possível explorar na geometria dos mosaicos de Escher os conceitos matemáticos que compõem suas construções.

A seguir apresentamos algumas atividades aplicadas com alunos do Ensino Médio nas escolas em que as professoras autoras trabalham. A atividade foi ministrada em 4 aulas. Para a construção dos mosaicos os alunos reuniram-se em grupos de dois ou três componentes. A professora ofereceu aos alunos os materiais necessários (papel cartaz de diversas cores, tesoura, cola e régua).

Atividade 1: Diante do estudo realizado acima, foi solicitado aos alunos que escolhessem uma das formas de polígonos (triângulo eqüilátero, quadrado ou hexágono) para cobrir um plano e a partir dela criar o seu modelo (módulo). A parte que é repetida chama-se módulo. O módulo se repete várias vezes até formar o mosaico. Os exemplos a seguir foram feitos por alguns alunos.

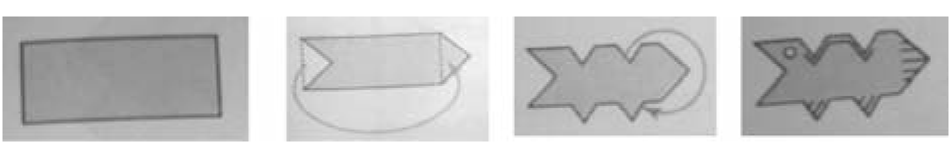


Nesses trabalhos realizados pelos grupos, observa-se que o módulo escolhido partiu do quadrado. Alguns sofreram pequenas alterações em sua forma, mas, em todos os alunos tiveram o cuidado de manter a área, assim como acontece nos mosaicos do Escher. Foi observado que em cada trabalho havia o uso de simetrias, rotações e de translações.



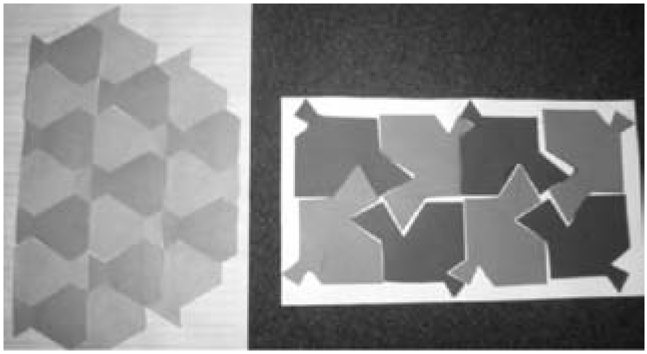
Nos exemplos acima, os módulos foram formados a partir do hexágono regular. Os alunos usaram cores diversas e com isso perceberam a construção de mosaicos diferentes, a partir de uma mesma figura plana.

Atividade 2: O exemplo a seguir foi extraído do livro "Vivendo a matemática – geometria dos mosaicos" e mostra que a partir de um retângulo (1º passo), é possível criar um módulo e a partir dele um mosaico. Observando que o retângulo pode ser formado a partir de dois quadrados.



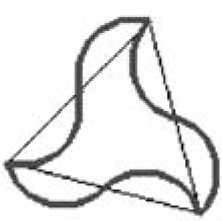
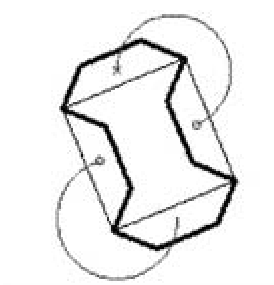
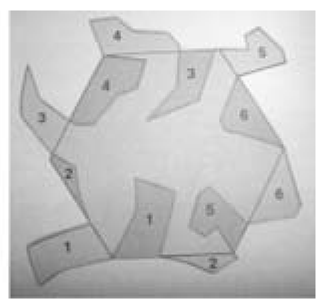
1º passo	2º passo	3º passo	4º passo

Foi solicitado que os alunos criassem um módulo que não fosse só a figura geométrica, mas que assumisse alguma forma.

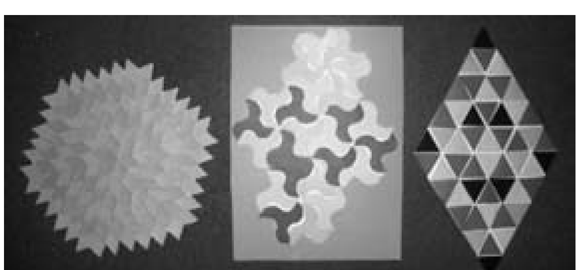


Nos trabalhos acima, os alunos partiram do quadrado e criaram módulos, e construíram pavimentações distintas. No mosaico da esquerda, os alunos usaram a simetria de reflexão e no mosaico da direita, foi usada a simetria de rotação em torno de um ponto fixo. A figura foi rotacionada em 90º.

Atividade 3: A partir de uma malha triangular, quadrangular ou hexagonal use formas curvas como em alguns mosaicos e faço o seu. Abaixo se observa três modelos.

Os exemplos de trabalhos abaixo foram feitos por alunos, no qual o módulo foi criado a partir do triângulo eqüilátero e usando as simetrias de rotação e translação.



Considerações Finais

A conexão entre Artes e Matemática pode trazer uma nova visão para o ensino, neste caso, de geometria. Nas obras de Escher os alunos podem perceber a presença da Matemática em um contexto que a princípio não teria ligação nenhuma com ela, e ainda, que não é necessariamente só os matemáticos que utilizam a Matemática.

A construção de conceitos como simetria, rotação e translação observadas em várias obras de Escher podem ser utilizadas em outros conteúdos como funções, geometria espacial, geometria analítica e outras. Permitir que os alunos criem mosaicos próprios é uma forma de fazer com que eles tenham pleno domínio desses conceitos, os quais serão utilizados na elaboração de outros.

O uso de obras de Arte no ensino da Matemática traz um diferencial para as aulas e possibilita um maior envolvimento dos alunos com a disciplina, além de propiciar um novo olhar para ela. Nossa experiência mostrou que os alunos gostaram e participaram ativamente das tarefas.

Acreditamos que atividades como essa desmistifica a Matemática, torna-a mais prazerosa, além de incentivar a criatividade e desenvolver a sensibilidade nos estudantes.

Nossa prática através da produção e observação artística, relacionada aos conceitos matemáticos mostrou que os alunos são capazes de desenvolver saberes que os leva a compreensão do sentido estético nas duas áreas: Artes e Matemática. Nessa experiência também tem destaque à reflexão feita pelos alunos sobre o quanto a Matemática está inserida em diferentes contextos, estendendo esta observação para outras manifestações culturais e assim ampliando sua visão do mundo.

Referências

ECHER, Maurits Cornelius. **M. C. Escher - gravura e desenhos**. São Paulo: Distribuidora Paisagem, 2004.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Kátia Regina A.. **Fazendo arte com a matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a matemática – geometria dos mosaicos**. São Paulo: Scipione, 1987.

http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/MOSAICOS/document/introduccion.html

http://descartes.cnice.mecd.es/indice_ud.php

Submetido em setembro de 2007
Aprovado em dezembro de 2007