
Atividades de geometria espacial e tecnologias informáticas no contexto da educação a distância online

Silvana Claudia Santos

Mestre em Educação Matemática pela UNESP, Rio Claro.

Membro do GPIMEM

silcsantos@yahoo.com.br

Resumo

Neste artigo discuto o processo de elaboração e a discussão de atividades desenvolvidas com o *software* Wingeom, em um curso a distância *online* para professores de matemática. Apresento o contexto do curso e as inquietações que motivaram a realização de uma pesquisa em um ambiente virtual de aprendizagem. Também apresento concepções teóricas sobre investigar em matemática utilizando tecnologias informáticas e mostro como as diferentes mídias, além da proposta pedagógica, condicionaram a elaboração e desenvolvimento das atividades, bem como a discussão matemática. Para finalizar, destaco a importância de pesquisas que contribuam com a prática da sala de aula, além de contribuírem com a produção do conhecimento científico.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Educação a Distância, Atividades Investigativas, Tecnologias Informáticas, Geometria Espacial.

Spatial geometry activities with computers in the context of on-line distance education

Abstract

In this article, I discuss the process of elaborating and discussing activities developed with the software Wingeom in an on-line distance education course for mathematics teachers. I present the context of the course and the concerns that led me to conduct the study in a virtual learning environment. I also present theoretical conceptions regarding the investigation of mathematics using information technologies and show how different media, as well as the pedagogical proposal, condition the elaboration and development of the activities, as well as the mathematical discussion. Finally, I comment about the importance of studies that contribute to classroom in addition to contributing to scientific knowledge.

Keywords: Mathematics Education, Distance Education, Investigative Activities, Computers, Spatial Geometry.

Contexto Investigado

Este artigo é fruto da pesquisa de Mestrado intitulada “A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial” que desenvolvi no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro. Nela investiguei como se dá a produção matemática¹ em um ambiente virtual de aprendizagem a partir do desenvolvimento de atividades de matemática, mais especificamente sobre geometria espacial², por professores de matemática de vários estados brasileiros e uma professora da Argentina.

O objetivo deste artigo é destacar o processo de elaboração e a discussão de atividades matemáticas que foram propostas no curso de extensão universitária à distância, intitulado “Tendências em Educação Matemática” e oferecido no primeiro semestre de 2005 pelo IGCE³ - UNESP, Rio Claro. O curso teve uma carga horária de 33 horas, divididas em 11 encontros semanais síncronos (via *chat*). Além das discussões síncronas, também havia interação assíncrona, por meio de fóruns de discussão, correio eletrônico, portfólio, etc. O professor Marcelo Borba⁴ era responsável pelo curso e eu atuava como professora monitora, participando de todos os encontros *online* e auxiliando em questões técnicas e administrativas. Neste curso de extensão, além das discussões teóricas sobre as várias tendências em Educação Matemática, havia momentos específicos para discussões acerca do desenvolvimento de atividades de geometria.

A dinâmica das sessões síncronas consistia em discutir sobre um tema, em Educação Matemática, preestabelecido. Para as aulas sobre discussões teóricas, eram enviados textos com antecedência aos alunos-professores⁵ e nesses chats dois participantes eram escolhidos para liderar a discussão, lançando perguntas para fomentar o debate. As atividades de geometria também eram enviadas com antecedência aos participantes, para que, com o auxílio do Wingeom⁶, realizassem suas investigações que seriam discutidas nas sessões de *chat*. Dúvidas quanto à utilização do Wingeom ou sobre os enunciados das atividades eram discutidas em fóruns ou por *e-mail*. O Wingeom permite que sejam feitas construções geométricas em duas e três dimensões e por meio de animação, possibilita verificar diversas

¹ Produção matemática é aqui entendida como o processo de exploração de conceitos matemáticos (geométricos) e verificação de propriedades, validação e criação de conjecturas, visando a generalizá-las (SANTOS, 2006).

² Neste texto utilizo “geometria espacial” para me referir à “geometria euclidiana espacial”.

³ Instituto de Geociências e Ciências Exatas (<http://www.rc.unesp.br/igce>).

⁴ Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, campus de Rio Claro.

⁵ Neste texto me refiro, em alguns momentos, aos participantes do curso de “Tendências em Educação Matemática” como alunos-professores por serem alunos de um curso de extensão, mas também professores de matemática.

⁶ Disponível: <http://math.exeter.edu/rparris>

propriedades geométricas. O papel deste *software* durante o desenvolvimento das atividades matemáticas foi relevante, já que com o auxílio deste recurso foi possível proporcionar situações de investigação, descobertas, experimentação matemática, entre outras.

No total 12 professores participaram do curso e a turma era bastante heterogênea, pois havia uma diversidade muito grande tanto no aspecto cultural, uma vez que vários estados foram representados, como no que concerne à experiência profissional de cada um. Para a realização do curso foi utilizado o ambiente TeEduc⁷, o qual vem sendo muito utilizado em pesquisas sobre Educação a Distância *Online* (EaDonline) (GRACIAS, 2003; LOPES, 2004). Este ambiente possui atualmente mais de vinte ferramentas disponíveis, mas durante o curso foram utilizadas com mais frequência o *chat*, o fórum e o portfólio.

Diante do exposto, apresentei, nesta seção, o cenário onde foram propostas atividades de geometria espacial. Particularidades de como se deu a produção matemática neste contexto podem ser encontradas, em detalhes, em Santos (2006), já que a ênfase deste artigo é o processo de elaboração das atividades matemáticas e alguns aspectos da discussão matemática *online*.

As Inquietações e a Proposta

Ao revisar a literatura acerca da EaDonline pude perceber que pesquisas têm sido realizadas para investigar como a Internet tem transformado o cenário educacional, seja na Educação Matemática, seja na Educação de forma geral (KENSKI, 2003; GRACIAS, 2003, entre outras). Esse também tem sido tema de diversas pesquisas do GPIMEM, grupo que participo, ao longo de mais de oito anos⁸. Uma das pesquisas pioneiras desse grupo sobre essa temática é a pesquisa de Gracias (2003). Essa autora analisou as interações entre os participantes de um curso de extensão a distância, durante as discussões que ocorriam sobre as diversas tendências em Educação Matemática, no qual pesquisou a reorganização do pensamento desses sujeitos naquele contexto.

Avançando nesses estudos, Borba (2004) passou a se questionar como os problemas matemáticos poderiam ser discutidos neste curso à distância. Como seria desenvolver e discutir atividades de matemática em um ambiente *online*? E como

⁷ Disponível em: <http://teleduc.nied.unicamp.br/teleduc>

⁸ Para conhecer uma síntese dessas pesquisas consulte Borba, Malheiros e Zulatto (2007).

seria desenvolvê-las com um software específico e discutir sobre a investigação realizada? Será que a produção matemática passaria por novas transformações, além daquelas já estudadas em ambientes presenciais utilizando *softwares*?

Motivada por essas indagações me propus a analisar a produção matemática de alunos-professores em um curso a distância online, com o intuito de fomentar as discussões já abordadas por outros pesquisadores (BORBA, 2004; BORBA; VILLARREAL, 2005) e apresentar algumas respostas a essas questões. Deste modo, investiguei como a produção matemática ocorreu em um ambiente virtual de aprendizagem, analisando a discussão sobre as conjecturas formuladas por alunos-professores durante as construções geométricas realizadas com o Wingeom.

Desenvolver atividades de geometria espacial à distância e discutir via Internet sobre as investigações realizadas, parecia-me algo extremamente desafiador, já que acredito que a geometria é um ramo da Matemática que exige certa capacidade visual para ser desenvolvida. Acredito, também, que possibilitar aos estudantes construir e visualizar propriedades geométricas pode auxiliar na compreensão de aspectos dedutivos em geometria espacial. Mas como fazer isso usando um chat? Como visualizar em um *chat*? Os desafios me impulsionavam ainda mais e minha conjectura era de que a matemática seria produzida de alguma forma, de acordo com os recursos disponíveis e, em minha análise, concluí que ela é qualitativamente diferente daquilo que usualmente tem sido feito.

A crescente evolução das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), principalmente com o acelerado uso da *Internet*, tem provocado inúmeras mudanças no âmbito educacional, exigindo a produção de novos conhecimentos. Gracias (2003, p. 33) acredita que a “EaD não pode ser entendida apenas como consequência da evolução das tecnologias; ela deve ser considerada também como uma possibilidade de superação de alguns desafios educacionais contemporâneos”. Nesse aspecto, Kenski (2003, p. 68) acredita que o fato de se utilizar a *Internet* na Educação não significa que o espaço educacional presencial será suprimido, pelo contrário, ela o ampliará.

Pesquisas visando a investigação de como utilizar um *software* de geometria em aulas presenciais de matemática, em diferentes aspectos, são importantes e, também, se torna igualmente importante investigar essa mesma problemática em aulas de matemática à distância, baseadas na *Internet*. Com base em um curso de extensão à distância para professores de matemática, em Santos (2006) apresentei algumas possibilidades e obstáculos vivenciados no fazer matemática neste contexto, após os participantes terem realizado as construções geométricas com o Wingeom. Já neste artigo, valorizo o momento anterior à

produção matemática dos alunos-professores, pois este foi condicionante para que ela se consolidasse como de fato ocorreu.

Investigações em Matemática e Tecnologias Informáticas

Existe uma ampla discussão na academia e no contexto escolar, com opiniões nem sempre convergentes, sobre a possibilidade de softwares contribuírem para que estudantes a partir da experimentação em geometria, neste caso, elaborem justificativas matemáticas e façam a ligação entre a exploração indutiva e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Apesar de ainda existir uma polêmica com relação a este tema, acredito que com estes softwares é possível investigar diferentes variações de uma construção geométrica e, conseqüentemente, inferir propriedades, chegar a generalizações e verificar teoremas.

Devido à natureza indutiva dos softwares de geometria dinâmica (SGD), novas possibilidades experimentais podem ser exploradas, uma vez que com esta tecnologia a elaboração de conjecturas e suas respectivas justificativas podem ser favorecidas. Desse modo, é possível estabelecer uma importante discussão acerca das possibilidades da inclusão de SGD no contexto educacional em seus diferentes níveis.

Acredito que os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou um problema matemático. No que se refere ao uso dos SGD, diferentes estratégias são utilizadas em complemento ao uso do lápis e papel.

Zulatto (2002) diz que “Justificar’, do ponto de vista teórico matemático, está extremamente ligado à abordagem dedutiva” (p. 92). E ela acrescenta, ainda, que “os softwares auxiliam também na realização de atividades investigativas, proporcionando um ambiente onde os alunos podem levantar conjecturas e testá-las” (p. 93).

Diante disso, as possibilidades de investigação e experimentação propiciada pelos SGD podem levar estudantes a desenvolverem suas idéias a ponto de criarem conjecturas e validá-las de modo experimental. Nesse sentido, acredito que as potencialidades dessas tecnologias informáticas permitem que os estudantes se questionem e busquem justificar aquilo que vêem. E, dessa busca pode emergir a necessidade de uma demonstração matemática. Se de um lado, ainda não posso afirmar que ao utilizar, propriamente, o Wingeom os alunos-professores, nesta pesquisa, demonstraram matematicamente, por outro lado não restam dúvidas que ao elaborarem suas demonstrações elas foram condicionadas por este SGD, uma

vez que ele foi ator durante todo o processo de investigação matemática que antecedeu à demonstração.

No que se refere à investigação matemática, Zulatto (2002) afirma que ela é apontada como uma das principais potencialidades dos SGD, de acordo com professores que os utilizam em suas aulas de matemática. Mas o que é investigar? De acordo com o dicionário de língua portuguesa, investigar significa seguir vestígios, indagar, pesquisar, inquirir. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), investigar não significa resolver problemas difíceis, mas sim lidar com questões abertas, para as quais não se tem ainda uma resposta ou uma única resposta e, em uma investigação, sempre que possível, buscar argumentos cada vez mais fundamentados. Este autor acrescenta, ainda, que investigar em matemática

assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA., 2003, p. 10).

Diante disso, vejo como investigação o ato de explorar de diferentes formas e experimentar, por exemplo, diferentes variações de uma construção geométrica, além de questionar a intuição, de modo a instigar a busca de argumentos para validar determinadas conjecturas formuladas durante a investigação. Com esta perspectiva, acredito que quando um resultado é “validado” com base em um processo investigativo, ele passa a fazer mais sentido aos estudantes e, assim, aumenta a possibilidade de outros conceitos matemáticos serem produzidos.

Sob esta ótica, o termo *investigação* carrega consigo as possibilidades de exploração e experimentação. Para Borba e Villarreal (2005), uma abordagem experimental em Educação Matemática significa fazer uso de procedimentos de tentativas e processos educativos que possibilitem a criação de conjecturas, a descoberta de resultados matemáticos desconhecidos, a possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados e a chance de proporcionar novos experimentos. A combinação de seres-humanos-com-mídias, proposta por Borba e Villarreal (2005), está em sinergia com a proposta de atividades abertas e investigativas.

Além disso, quando se trata de elaborar atividades, não se pode deixar de considerar o papel que a Internet vem ocupando em diferentes contextos. Não dá para negar que quando falamos em investigar e realizar um processo de busca, isso

pode estar associado à busca na Internet. Isso não seria investigar? O fato é que muitas vezes esse tipo de investigação leva à busca de respostas prontas e disponíveis na rede ou, em outros casos, as respostas podem ser obtidas por meio de uma comunidade de relacionamento, como Orkut⁹, na qual os estudantes poderão fazer suas perguntas e milhares de pessoas terão acesso e poderão responder por elas. Nesse segundo caso, a meu ver, o problema não está em buscar ajuda no Orkut, visto que isso pode se tornar uma atividade colaborativa, constituindo então um ambiente de troca. Porém, muitas vezes, pode-se não obter um debate em torno da questão a ser investigada, buscando apenas repostas prontas e acabadas.

Nesse sentido, existe a necessidade de se pensar em atividades que sejam desafiadoras, abertas e que possibilitem investigações matemáticas, no sentido proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). É importante que se crie um ambiente no qual o aluno e o professor possam agir como pesquisadores diante de uma situação, mesmo que de perspectivas diferentes. De um lado, o professor-pesquisador investigará como se dá o processo de ensino e aprendizagem em um dado contexto e, de outro lado, o aluno-pesquisador passará a “andar em torno”, quantas vezes forem necessárias e como achar mais adequado, de um problema (matemático) para buscar possíveis repostas de maneira fundamentada.

Acredito que uma abordagem que privilegia uma postura investigativa pode possibilitar um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo e os levar a uma investigação de conceitos, que podem vir a obter um novo sentido quando estudados de modo a enfatizar questões qualitativas de exploração.

O Processo de Elaboração das Atividades

Ao pensar e elaborar as atividades¹⁰ que seriam discutidas no curso de extensão a distância, por meio da Internet, onde seria utilizado um SGD, busquei elaborar atividades que valorizassem a investigação e que possibilitassem aos alunos criar conjecturas e realizar descobertas.

Com esta perspectiva, inicialmente, a minha dúvida era no que se refere à estrutura: como propor uma atividade que possibilitasse aos participantes realizar investigações? Que tipo de perguntas eu deveria fazer aos alunos-professores? Como seria o enunciado? A opção por utilizar o Wingeom fez com que eu refletisse

⁹ O Orkut é uma rede social filiada ao Google, criada em 2004 com o objetivo de ajudar seus membros a criar novas amizades e manter relacionamentos. (<http://www.orkut.com>)

¹⁰ No curso “Tendências em Educação Matemática” oferecido em 2005, 11 encontros síncronos foram realizados, sendo que 3 deles foram destinados às discussões matemáticas sobre as atividades de geometria espacial e no total foram propostas 16 atividades. Algumas delas apresento neste artigo e as demais estão disponíveis em Santos (2006).

sobre como propor uma atividade considerando o contexto: os recursos disponíveis, os sujeitos envolvidos, bem como as suas limitações, para que desta forma, elas fossem adquirindo um *design* diferenciado, no caso, daquele proposto em livros-texto.

Um das atividades discutidas no curso, teve como inspiração original um “problema” do livro “Introdução à Geometria Espacial”, o qual apresento a seguir:

Por um ponto qualquer da aresta AB de um tetraedro qualquer ABCD é traçado um plano paralelo às arestas AC e BD. Mostre que a secção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo (CARVALHO, 1999, p. 34).

Observei que muitas conjecturas poderiam ser investigadas a partir de uma situação como esta. Porém, no modo como ela é apresentada, neste primeiro momento, o objetivo é “mostrar” algo que já está explícito: **o plano no tetraedro é um paralelogramo**. Neste caso a investigação consiste em elaborar argumentos que validem esta afirmação e, no entanto, meu interesse era que o próprio estudante realizasse essa descoberta ou criasse outras conjecturas a partir de uma dada situação matemática. Eu acreditava que a atividade deveria ser aberta, dar margem a um processo investigativo “flexível” do tipo: o que você pode afirmar sobre...

Além disso, preocupei-me como os participantes do curso realizariam a construção geométrica desta atividade no Wingeom, com tão pouco tempo de familiarização com o *software*, já que nenhum deles o conhecia previamente. Deste modo, busquei elaborar atividades que caracterizo como abertas do ponto de vista da investigação, mas elas tinham um formato que apresentava os passos a serem seguidos para a realização da construção geométrica. Para mim, o principal aspecto a ser considerado, naquele momento, era a investigação matemática e não apenas a construção geométrica, apesar de acreditar que quando o estudante reflete sobre como realizá-la isso deve ser valorizado.

Uma outra situação vivenciada durante esse processo, está relacionada ao fato de, em alguns casos, eu ter uma idéia para a elaboração de uma atividade e o Wingeom não apresentar os recursos necessários para a realização da construção geométrica. Isso aconteceu, por exemplo, quando eu tentei obter a construção geométrica de uma situação semelhante àquela apresentada em Carvalho (1999) discutida anteriormente. Ou seja, construir um plano de corte em um tetraedro regular ABCD que fosse paralelo às arestas AC e BD e que passasse por um ponto E qualquer na aresta AB. Contudo, enviei um *e-mail* relatando essa minha dificuldade para o desenvolvedor do Wingeom, Professor Richard Parris da University of Exeter na Inglaterra, e ele atualizou o *software*, possibilitando essa construção.

Após um longo período de estudo do software ficou mais evidente ainda,

que era necessário traçar um caminho que auxiliasse aos participantes na tarefa de realizar a construção geométrica. Desta forma, o “problema” proposto em Carvalho (1999) foi reelaborado da seguinte maneira:

1. Construa um tetraedro regular ABCD;
2. Marque na aresta AB um ponto E qualquer;
3. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD passando pelo ponto E;
4. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano?

Notei que a mudança não havia sido suficiente para garantir a construção no Wingeom. Já era possível imaginá-la, mas ainda levariam tempo para descobrir quais os menus do *software* utilizar. Para a execução do item três, por exemplo, do modelo de atividade apresentada acima, os participantes poderiam não saber como construir este plano paralelo às arestas indicadas, já que o Wingeom permite a construção de planos de corte de diversas maneiras. Diante disso, a pouca familiarização dos alunos-professores com o *software* e as dúvidas de construção com o mesmo poderiam causar certo desânimo e desmotivá-los a realizar todas as atividades.

Assim, após um intenso trabalho na busca de uma atividade que contemplasse as minhas expectativas e refletindo acerca de meus objetivos, a atividade anterior, obteve a seguinte estrutura:

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Usando o menu *Anim/Varição* de # digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique fixar L. Do mesmo modo, digite 1 e clique fixar R;
3. Marque na aresta AB um ponto E de coordenada relativa #;
4. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD através do ponto E usando *Linear/Cortar plano*;
5. Anime a sua construção e observe o que acontece;
6. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano? Justifique sua resposta.

A seguir, na figura 1, é possível observar como uma construção geométrica dessa atividade foi obtida utilizando o Wingeom.

¹¹No enunciado das atividades que foram propostas aos alunos-professores há comandos específicos do Wingeom.

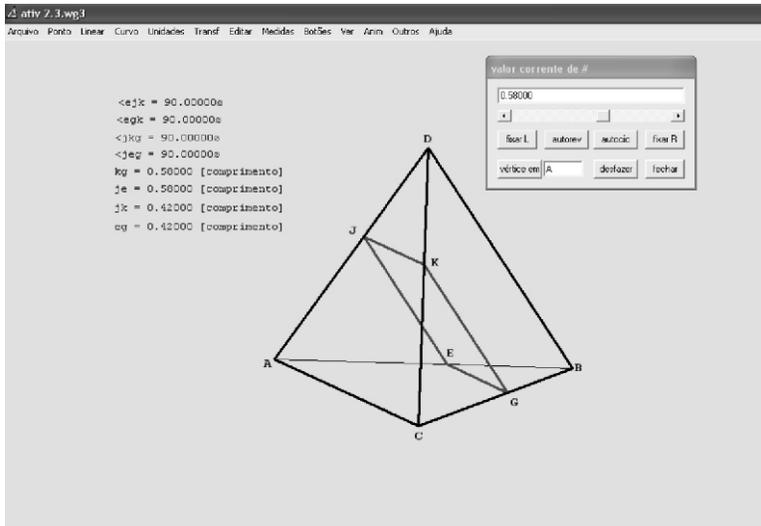


Figura 1

Além de consultar diferentes livros-texto de matemática, também fiz inúmeras buscas na Internet sobre atividades de geometria espacial e pude perceber que a grande maioria das páginas relacionada a esse tema trazia exercícios, fórmulas para cálculos de áreas, volumes de diferentes sólidos geométricos e outras apresentavam a teoria que fundamenta a geometria euclidiana. Mas, após insistentes buscas, algumas idéias puderam ser adaptadas e transformadas em atividades investigativas, de acordo com as expectativas já discutidas nesta seção. Em uma dessas buscas encontrei inspiração para elaborar a seguinte atividade:

1. Insira um cubo de aresta #;
2. Trace a diagonal espacial BH;
3. Trace um segmento perpendicular a BH passando pelo vértice A. Para isso, clique no menu *Linear/Altitudes/às Retas*;
4. Clique em *Ver/Espessura* do segmento e na caixa que se abre digite AI. Em seguida, escolha uma cor e clique adicionar;
5. Usando o menu *Medidas*¹² calcule a relação HI/BI;
6. No menu *Anim/Variacão* de # anime a construção realizada. O que você pode observar?
7. Como determinar o comprimento AI? Qual é o valor do ângulo HAB? O que AI representa no triângulo HAB?

¹²As unidades de medidas como: volume, área, comprimento, altura, largura, etc. são atribuídas pelo software e, assim, os valores numéricos obtidos fazem parte de uma unidade interna do programa que não tem, obrigatoriamente, correlação com as unidades de medidas convencionais.

Há dois pontos que eu irei destacar nessa atividade. Um deles está intimamente relacionado ao processo de elaboração da mesma e outro já se refere à discussão matemática que essa atividade gerou entre os alunos-professores. Sobre o primeiro aspecto, o interessante dessa atividade é que ela me possibilitou refletir acerca de como atividades com questões abertas, que permitem aos participantes do curso uma postura investigativa e crítica, podem levar a criação de novas questões.

Enquanto professores, o Professor Marcelo Borba e eu estudávamos para a aula juntos e desenvolvíamos as atividades que já haviam sido enviadas aos alunos-professores, com o objetivo de discutir nossas conjecturas e elaborar justificativas para socializar com os participantes. Em um desses momentos, quando seguíamos passo a passo o “roteiro” da construção geométrica, ao executarmos o passo 3: Trace um segmento perpendicular a BH passando pelo vértice A. Para isso, clique no menu *Linear/Altitudes/às Retas*; de modo muito intuitivo pensamos por alguns instantes que esse segmento perpendicular à diagonal BH estaria contido na outra diagonal espacial que intercepta BH. Em outras palavras, conjecturamos que o ângulo formado entre duas diagonais espaciais de um cubo é reto, ou seja, de 90° . Isso nos parecia muito intuitivo e em um primeiro momento livre de contestação. Na figura 2 a construção geométrica feita com o Wingeom, dependendo da perspectiva, questionava nosso raciocínio e nos levava a visualizar um ângulo reto entre as diagonais espaciais traçadas.

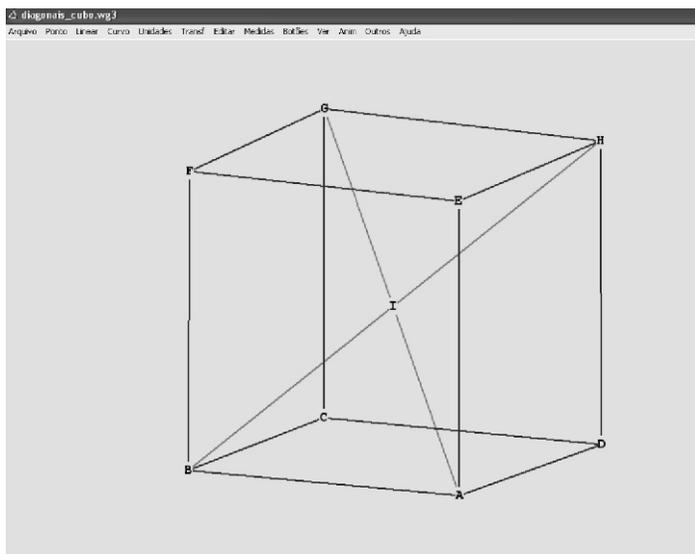


Figura 2

Porém, ao seguirmos o que estava sendo solicitado na atividade e traçarmos o segmento perpendicular a BH notamos que nossa conjectura não era verdadeira,

conforme ilustrado na figura 3 a seguir.

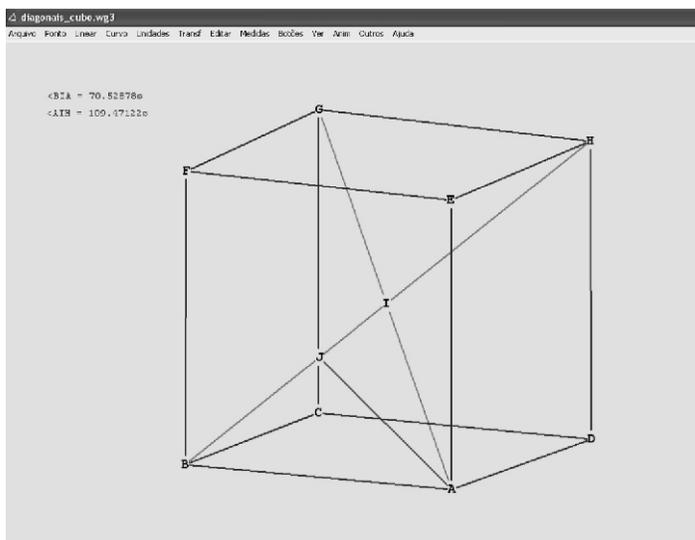


Figura 3

Então, o que era para ser uma atividade se transformou em duas, pois resolvemos propor essa questão no momento do *chat*, sem que fosse enviada previamente, assim como as demais atividades. Deste modo, outra situação matemática a ser investigada no Wingeom e discutida no *chat* foi determinar quanto media o ângulo formado pela intersecção de duas diagonais espaciais de um cubo, a qual gerou muita discussão, já que a primeira resposta, dada por uma aluna do curso, foi de que o ângulo procurado era reto. Houve muita discussão entre os participantes do curso, os quais puderam investigar com o Wingeom e utilizar seus diversos recursos, entre eles o de realizar a medição do ângulo entre as diagonais, fato esse que permitia “comprovar” de maneira rápida a resposta da pergunta lançada no *chat*. Como essa questão não foi enviada previamente, não foi possível elaborar, durante a discussão, uma justificativa formal e estruturada, porém, os alunos-professores além de medirem os ângulos buscaram argumentos que justificavam o que viam, por exemplo, se referindo às duas diagonais espaciais como sendo diagonais de um retângulo ADFG, conforme mostrado na figura 3.

Outra atividade proposta nesse curso foi baseada em uma situação-problema retirada da revista *Mathematics Teacher*¹³ de 2001. Nessa revista era descrita a trajetória que um inseto deveria fazer para sair do ponto médio em uma aresta de um tetraedro e chegar em outro ponto médio na aresta reversa andando

¹³Mathematics Teacher, National Council of Teacher of Mathematics, v. 94, n. 6, September 2001.

sobre a superfície desse tetraedro. A pergunta que se fazia era qual a menor distância que esse inseto deveria percorrer para chegar em seu destino. Tendo essa situação como inspiração, a atividade que foi proposta no curso teve a seguinte estrutura:

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Marque o ponto médio M da aresta AC desse tetraedro;
3. Marque na aresta reversa BD o ponto médio N;
4. Marque um ponto P, de coordenada #, na aresta CD;
5. Trace os segmentos MP e NP;
6. Meça cada um desses segmentos;
7. Meça MP+NP;
8. Movimente o ponto P sobre a aresta CD, usando o menu *Anim/Variação* de #;
9. Qual é a menor medida, pela superfície do tetraedro, de M até N? Justifique.

Na figura 4, é possível notar que, se considerar o ponto P como sendo o inseto que se desloca de M até N, a investigação consiste em identificar em que ponto da aresta CD ele teria que passar, para percorrer o menor caminho.

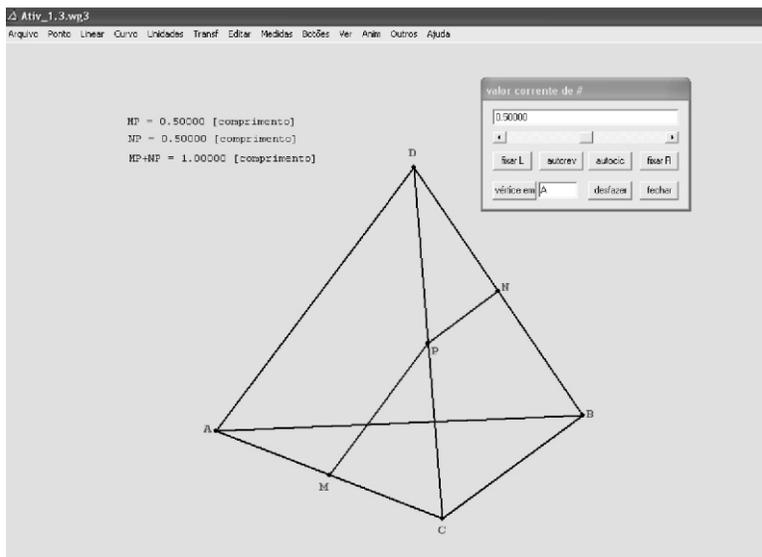


Figura 4

Com o passar do tempo, os alunos-professores já demonstravam mais desenvoltura para utilizar o Wingeom e as atividades também puderam ser moldadas a partir do desempenho que eles apresentavam. Na atividade a seguir é

possível notar que, em alguns passos da construção, não são indicados quais são os menus que devem ser utilizados para realizar a construção geométrica.

1. Insira um cilindro qualquer, usando *Unidades/Superfície/Cilindro*;
2. Adicione duas esferas de mesmo raio, tangentes entre si, de tal maneira que essas tangenciem as bases do cilindro e a superfície lateral. Onde deverá ser o centro de cada uma dessas esferas? Quais serão os raios? Use o menu *Curvo/Esfera/Raio-centro* para implementar as medidas determinadas por você;
3. Verifique a diferença entre o volume do cilindro e o volume das duas esferas;
4. O que você pode afirmar a partir dessa construção? Justifique.

Observei que os participantes apresentavam avanços com relação ao uso do Wingeom e apresentavam uma atitude crítica tanto na maneira que as atividades eram propostas, quanto com relação ao uso que faziam dele. Assim, eu podia questioná-los também no que se refere à construção geométrica utilizando os recursos do *software* como, por exemplo, quando lanço as questões do item dois desta atividade: **Onde deverá ser o centro de cada uma dessas esferas? Quais serão os raios?** Essas questões mais abertas com relação também à construção, fazia com que os alunos-professores apresentassem construções geométricas, de uma mesma atividade, de modos distintos como mostram as figuras 5 e 6 a seguir e, assim, debates sobre como cada um pensou a construção geométrica pôde ser propiciado.

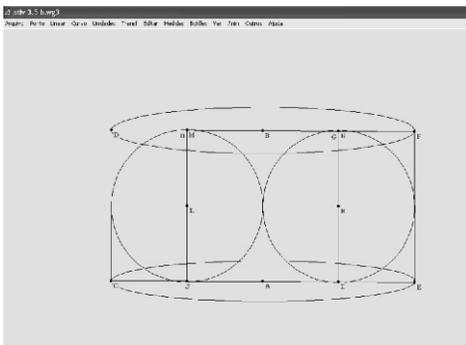


Figura 5

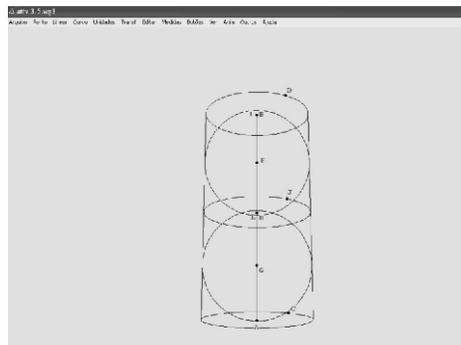


Figura 6

O que pude perceber é que a opção por utilizar o Wingeom, e por se tratar de um curso a distância, fez com que eu refletisse sobre como propor uma atividade considerando o contexto e visando contemplar as minhas expectativas, sempre

apoiada nas minhas concepções teóricas acerca da temática. De modo geral, utilizar tecnologias informáticas, em um ambiente de ensino e aprendizagem, requer a sensibilidade do professor e/ou pesquisador para optar por estratégias pedagógicas que permitam explorar as potencialidades desses recursos, tornando-os didáticos. A estratégia pedagógica deve incluir a elaboração das atividades que serão propostas aos estudantes, bem como a maneira como será conduzida a discussão e socialização dos resultados obtidos nos processos de investigação matemática.

A Discussão Matemática

Como discutir o desenvolvimento de atividades de geometria espacial em um ambiente virtual? E como discutir, em um *chat*, a investigação matemática realizada com um *software* de geometria dinâmica? Tendo como base o curso Tendências em Educação Matemática, já descrito nesse artigo, alguns indícios foram apontados para tentar responder a essas perguntas.

O *chat*, enquanto mídia, transformou a natureza da comunicação. Ele condicionou a maneira como as pessoas, separadas geograficamente, se comunicaram e produziram conhecimento enquanto discutiam sobre o desenvolvimento das atividades de geometria.

A natureza do curso, via Internet e a distância, também condicionou o modo de propor as atividades com o Wingeom, uma vez que eu, enquanto professora do curso, não estaria presente fisicamente, no decorrer do desenvolvimento das mesmas para esclarecer dúvidas sobre como utilizar este *software* ao realizarem as construções geométricas. Além disso, o fato das discussões serem a distância impossibilitava aos participantes compartilharem suas construções geométricas com os demais colegas, simultaneamente, e explicar a eles tomando-as como apoio. Apesar de cada um dos participantes ter realizado a sua construção seguindo os “roteiros” das atividades propostas, nada garantia que ela era exatamente a mesma para todos e, muitas vezes, quando se busca explicar uma investigação parece haver a necessidade de fazê-lo mostrando a construção geométrica. Diante disso, neste curso, muitos tiveram que imaginar a partir das “falas” dos alunos-professores durante as discussões síncronas.

A maneira como as explicações sobre o desenvolvimento das atividades eram dadas, muitas vezes apareciam impregnadas por um discurso elaborado de maneira criativa para que os participantes pudessem imaginar certas situações. Imaginação parecia ser algo bastante “presente”. Não era possível visualizar - em um sentido físico - as construções de cada um dos alunos-professores, então a

necessidade de imaginação e empatia era algo marcante no momento de discussão sobre o desenvolvimento das atividades.

A partir das características do ambiente comunicacional, se constituiu um coletivo formado pelos alunos-professores e o Wingeom no decorrer do desenvolvimento das atividades e um outro coletivo foi evidenciado, o qual foi formado pelos participantes do curso, o Wingeom e também pelo ambiente TelEduc. Nesse segundo caso, estou me referindo ao momento de produção matemática que ocorria durante as discussões síncronas no *chat*.

Sendo assim, a produção matemática, em particular a discussão, que se deu durante o desenvolvimento das atividades foi também condicionada pelo Wingeom. Durante o desenvolvimento das atividades, este *software* oferecia a cada aluno-professor, individualmente, as possibilidades dinâmicas e experimentais que eram qualitativamente diferentes daquelas oferecidas por outra tecnologia. Neste aspecto, a produção matemática acontecia por meio de coletivos geograficamente distantes, sendo que eles eram formados por cada um dos alunos-professores e o Wingeom. Após a investigação cada um podia organizar suas soluções e disponibilizar aos demais em seu portfólio no ambiente TelEduc, para a posterior discussão.

Acredito que uma reorganização acontecia no momento da discussão no *chat*, bem como era evidenciada a criação de um coletivo que pensava com o Wingeom e socializava, ou seja, pensava em conjunto e reorganizava o pensamento (TIKHOMIROV, 1981). Da mesma forma que ao elaborar as atividades de geometria eu pensava com o Wingeom, o mesmo ocorria com os alunos-professores durante a construção geométrica, sendo que na discussão matemática era muito difícil deixar de pensar com este *software*, uma vez que a investigação havia sido feita com ele.

Sob esta ótica, pude perceber que quando se trata de produção matemática utilizando softwares educacionais, e mais que isso, em um ambiente virtual de aprendizagem, torna-se necessário repensar os modelos de atividades que serão propostas. No contexto aqui apresentado, uma maneira de propor, desenvolver e discutir atividades de matemática está sendo destacada. Como já constatou Lopes (2004), em um ambiente virtual no qual alunos desenvolveram e discutiram atividades sobre transformações geométricas utilizando o *software* Cabri-Géomètre II, aquelas que não se mostraram situações-problemas e desafiadoras não suscitaram discussões.

Nesse sentido, mesmo com alguns avanços no âmbito da Educação Matemática a distância, ainda há necessidade de discutir qual o tipo de pedagogia mais adequada para ambientes virtuais de aprendizagem, no que tange à produção matemática. Pensar sobre como propor atividades, de acordo com as mídias

disponíveis, é um ponto inicial, em qualquer ambiente (presencial ou não). Além disso, observei que, o fato de existirem dois professores liderando o curso também foi importante, uma vez que um curso a distância demanda *feedbacks* mais frequentes aos participantes (*e-mail*, responder e criar fóruns, suporte técnico, entre outros).

Sendo assim, concluo que o processo elaboração-investigação-discussão é condicionado, em cada uma de suas etapas, pelas tecnologias utilizadas de acordo com uma determinada proposta pedagógica adotada pelo pesquisador (ou professor). Apresento neste artigo, uma forma de propor atividades matemáticas e o encaminhamento dado durante um enfoque didático, contudo, as mesmas atividades, bem como outras, podem ser adaptadas a outros contextos educacionais. Em um contexto no qual os estudantes já estejam familiarizados com o Wingeom, por exemplo, talvez um roteiro para a construção geométrica não seja necessário. Diante disso, quero chamar a atenção para que sejam consideradas as particularidades de cada caso ao se propor atividades utilizando tecnologias informáticas, devido às demandas que estas apresentam.

Considerações Finais

Neste artigo discuti a experiência de elaborar atividades investigativas para um curso a distância *online* e como esse processo pode refletir no desenvolvimento e discussão dessas atividades, dependendo da mídia utilizada. Diante disso, me questiono agora: quais são as mudanças que uma abordagem, a qual privilegia o trabalho a partir de atividades investigativas com tecnologias, pode acarretar no ambiente educacional (presencial ou não)? E como a Internet, em particular, pode vir a se tornar uma “aliada” nesta abordagem criando possibilidades para a elaboração de novas atividades com novas situações-problema e não trazendo respostas prontas e sem discussão?

A partir de minha experiência na pesquisa que desenvolvi e, também, acompanhando o desenrolar de outras, em particular as que são desenvolvidas no GPIMEM, tenho notado que um dos momentos cruciais e de grande esforço do pesquisador tem sido o de elaborar atividades para propor a estudantes (alunos ou professores) e, assim, investigar especificidades de uma dada mídia no desenvolvimento dessas atividades. Além dessa preocupação mais metodológica, também existe a tentativa de compreender como se dá a produção matemática em um determinado contexto educacional, como é o caso de Santos (2006).

Neste artigo meu objetivo foi o de destacar o processo de elaboração de atividades, principalmente, e a discussão, em um *chat*, de como elas foram

desenvolvidas. Elaborar atividades, em particular, é um trabalho árduo e, por ser anterior à aplicação, muitas vezes não é relatado nas pesquisas. Porém, essas três fases (elaboração, desenvolvimento e discussão) são fundamentais e estão inter-relacionadas, já que a maneira como as atividades são propostas aos estudantes condicionam o modo pelo qual eles irão desenvolvê-las e, posteriormente, discutí-las.

Assim, as reflexões aqui apresentadas com base em uma experiência, podem auxiliar outros pesquisadores que pretendem propor atividades para serem desenvolvidas com determinadas mídias, uma vez que transformar uma situação, um tema ou um assunto matemático em uma atividade investigativa, levando os estudantes a se sentirem desafiados e a buscarem respostas para as questões propostas não é uma tarefa fácil. Por um lado, é necessário que se tenha o cuidado de não deixar a atividade tão aberta a ponto de não oferecer subsídios para encontrar possíveis respostas e, por outro, não se deve privar o estudante do livre pensar. Nesse aspecto essa flexibilidade com relação à atividade deve ser dosada para que os estudantes não se sintam “perdidos” e sem saber sobre o que investigar. A proposta é que sejam feitos questionamentos que os incentive a buscar argumentos consistentes para respondê-los.

Apesar da gênese deste trabalho apresentar a preocupação com a questão da produção do conhecimento, uma outra vertente, não menos importante, é a de pensar em pesquisas que também estejam voltadas à prática escolar, o que vem sendo fortemente recomendado. Acredito que esse tipo de pesquisa pode ser olhada a partir de uma perspectiva da sala de aula também, já que as atividades que são elaboradas podem ser adaptadas de acordo com o objetivo do professor.

A meu ver, esse estudo, bem como outros que seguem esse mesmo percurso, podem ser vistos como um instrumento, no sentido de oferecer uma base teórico-metodológica para que professores de diferentes níveis de ensino possam inserir a pesquisa em suas aulas.

Referências

BORBA, M. C. As Dimensões da Educação Matemática a Distância. In.: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO, R. B. A. **Educação a Distância Online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA ISOLGRAF, 1999. (Coleção do Professor de Matemática).

GRACIAS, T. A. S. **A Natureza da Reorganização do Pensamento em um Curso a Distância sobre "Tendências em Educação Matemática"**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância**. Campinas: Papirus, 2003.

LOPES, A. **Avaliação em Educação Matemática a Distância**: uma experiência de geometria no ensino médio. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANTOS, S. C. **A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem**: o caso da geometria euclidiana espacial. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

TIKHOMIROV, O. K. The Psychological Consequences of Computerization. In.: WERTSCH, J. V. (Ed.). **The Concept of Activity in Soviet Psychology**. New York: M. E. Sharpe, Inc, 1981. p. 256-278.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica**: suas características e perspectivas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

Submetido em outubro de 2007

Aprovado em março de 2008