
Resolução de problemas em matemática: Uma abordagem no processo educativo

Vânia Maria Santos-Wagner

Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da UFES (PPGE/CE/UFES) e professora aposentada do Instituto de Matemática da UFRJ
santos-wagner@t-online.de
santoswagner.vm@gmail.com
swagner@ce.ufes.br

Resumo

O presente artigo aborda algumas idéias sobre a resolução de problemas e seu uso em aulas de matemática. Pretende-se com este texto oferecer um material de apoio ao professor e aos demais interessados em leituras e reflexões iniciais sobre este tema. Além das referências citadas no artigo, outras referências sobre resolução de problemas e artigos já publicados no Boletim Gepem aparecem no final do trabalho.

Palavras-Chave: Resolução de problemas; processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática.

Problem solving: An approach at the school mathematics process

Abstract

The present article approaches some ideas about problem solving and its use in mathematics classroom. With this text one hopes to offer a material that gives support for the classroom teacher and to the others interested in initial readings and reflections about this theme. Besides the references cited in the article, other references about problem solving and articles already published at Boletim Gepem appear at the end of this work.

Keywords: problem solving; process of teaching-learning-assessment of mathematics.

Introdução

No mundo atual muito se fala sobre o papel da educação e das novas tecnologias para o desenvolvimento de cada nação e da cidadania de cada povo. Fala-se também que educação e tecnologia são cruciais na formação pessoal e profissional de cada cidadão, pois é urgente e necessário que, em todos os países, os seres humanos possam viver plenamente tendo direitos garantidos para a vida, saúde, educação, moradia, trabalho, lazer. Torna-se urgente que aprendamos a cuidar e manter o nosso planeta terra em condições mínimas para que as populações atuais e futuras possam viver e conviver com todas as suas diferenças e semelhanças. Ou seja, urge minimizar e harmonizar os problemas e conflitos ecológicos, econômicos, políticos, sociais e religiosos de todos os povos. Na mídia e no mundo acadêmico aparecem sempre informações de que uma boa formação educacional aumentam as chances de um cidadão arrumar emprego, de ser bem sucedido pessoal e profissionalmente e de desenvolver-se plenamente como um cidadão crítico, responsável e que procure o melhor para si e para a comunidade onde vive. Se olharmos em qualquer jornal ou revista publicado nos últimos anos no Brasil e em diferentes lugares no mundo e em documentos oficiais encontraremos afirmativas e argumentos semelhantes aos que coloquei (e.g., Gomoluch, Hillefeld & Holtkamp, 2004; Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN], Brasil, MEC/SEF, 1998; Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio [PCNEM], Brasil, MEC, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999; jornais e revistas: e.g., Folha de São Paulo, Jornal do Brasil, Jornal O Globo, Revista Veja, Revista Isto é, etc; New York Times; Washington Post; Die Zeit [Jornal O tempo]; Frankfurter Allgemein Zeitung [Jornal Geral de Frankfurt]; Spiegel [Revista Espelho], Focus [Revista Focus]).

Em meu entender está implícito em todos os argumentos e pensamentos que enunciei acima a idéia de que qualquer cidadão deve estar apto a identificar, resolver e formular problemas em ambientes escolares e não escolares. Nos últimos quinze anos tenho compartilhado algumas das idéias que fui desenvolvendo sobre resolução de problemas em oficinas para professores, em seminários e em palestras para futuros professores e professores regentes (Santos, 1993, 1995; 1996; Santos-Wagner, 2001, 2004). As experiências com resolução de problemas desenvolvidas em sala de aula têm me mostrado o potencial desta abordagem instrucional para auxiliar os processos de ensinar, aprender e avaliar a matemática escolar. Estas experiências ocorreram com alunos desde o ensino fundamental até o ensino superior, e com futuros professores e professores regentes desde a década de 80 do século XX.

Um outro motivador para redigir este trabalho foi ter consultado os exemplares do Boletim GEPEM e ter constatado que temos um número reduzido de artigos tratando do mesmo e por acreditar que ainda precisamos discutir um pouco mais sobre este assunto em periódicos de educação matemática. Em especial a análise cuidadosa apresentada por Oliveira, Bairral e Reis (2006) no Boletim Gepem n. 48 confirmou meu intuito em organizar melhor várias idéias e pensamentos sobre o tema que tenho compartilhado com futuros professores e professores de matemática. Portanto, o presente artigo aborda algumas idéias sobre a resolução de problemas e seu uso em sala de aula de matemática. Pretende-se assim oferecer um material de apoio ao professor em sala de aula e aos demais interessados em leituras e reflexões iniciais sobre este tema. Além das referências bibliográficas usadas no texto, finaliza-se o trabalho incluindo outras referências sobre o assunto, destacando os artigos já publicados em números anteriores do Boletim GEPEM.

Este texto começa com alguns questionamentos que tenho feito com bastante frequência sobre educação, ensino formal, ensino informal e o processo educativo de matemática. As concepções, crenças e conhecimentos que tenho adquirido ao longo de minha formação pessoal e profissional sobre educação, escola, ensino, aprendizagem, avaliação, conhecimento, matemática, matemática escolar, currículo, professor, aluno, dentre outros, têm influenciado fortemente o meu trabalho profissional. E de fato estas crenças, concepções e conhecimentos influem implicitamente e diretamente sobre as minhas ações, decisões e interpretações sobre o que ocorre no ambiente escolar nos momentos de interação professor/aluno e aluno/aluno e durante o processo educativo de matemática. Fazendo um retrospecto de cerca de 34 anos de magistério percebo como estou sempre aprendendo a pensar e refletir de modo mais consciente sobre o que faço antes, durante e após o término das aulas. Portanto, para orientar as reflexões que pretendo desenvolver e para que o leitor possa acompanhar mais de perto os meus pensamentos sugiro que focalizemos inicialmente em perguntas do tipo:

- a. O que significa educar alguém? O que significa educar para a vida? Como o ensino formal auxilia ou pode auxiliar o processo educativo de cada cidadão? Como o ensino informal e outras formas de instrução podem auxiliar o processo educativo de cada cidadão? Dentro do processo educativo de matemática escolar, o que significa educar para a vida ou o que pode significar educar para a vida com os conhecimentos matemáticos escolares?
- b. Como ensinar matemática usando atividades de resolução de

problemas pode ajudar a preparar um cidadão crítico, reflexivo, autônomo, e feliz em um mundo onde ocorrem mudanças rápidas e constantes?

c. Como aprender matemática escolar usando problemas e atividades de resolução de problemas pode ajudar a desenvolver um cidadão crítico, autônomo, feliz num mundo em constantes mudanças?

d. Como apreciar, julgar, avaliar se os procedimentos de ensino e de aprendizagem de matemática escolar usando atividades de resolução de problemas foram eficazes? Que critérios e procedimentos usar para apreciar se ocorreu um ensino eficiente e eficaz de matemática escolar? Como definir ensino eficiente e eficaz? Que critérios e procedimentos usar para apreciar se ocorreu aprendizagem de matemática, ou seja, para verificar se os alunos aprenderam, compreenderam e construíram conceitos, procedimentos e habilidades matemáticas?

Precisamos de muitos argumentos e evidências do que pode ser considerado como educar e o que pode ser educar para a vida. Muitas pesquisas podem e devem ser conduzidas para procurar responder a cada um dos quatro blocos de indagações que coloquei. A partir de minhas experiências pessoais e profissionais em culturas bem diferentes, como a brasileira, a americana e a alemã, posso contribuir para esta discussão quando procuro focalizar meu olhar em matemática escolar. Sendo assim, busco neste texto tratar em algum detalhe da pergunta proposta no item (b), deixando o desejo de que futuramente outros leitores dialoguem comigo e com outros colegas sobre estes vários questionamentos, após refletirmos e procurarmos pensar em como responder a cada um deles.

Em momentos de interação com futuros professores e professores regentes percebo que se torna necessário focalizar em algumas indagações mais direcionadas para a matemática escolar. E se pretendemos pensar em como ensinar matemática usando atividades de resolução de problemas, dentro de um contexto de mundo em constante mudanças e desafios, ainda precisamos focalizar um pouco mais nosso olhar. Pensando neste tipo de diálogo com o leitor acredito que precisamos clarear para todos alguns termos usados normalmente em livros didáticos e em documentos oficiais como os PCN (1998) e PCNEM (1999), mas que nem sempre trazem as idéias e significados explícitos nem bem claros para todos. Neste sentido prossigo com uma lista de questionamentos iniciais que pretendo abordar um pouco neste texto e provavelmente dialogar com outros colegas em textos futuros.

Questionamentos iniciais:

- 1) O que é um problema?
- 2) O que é uma atividade de resolução de problemas?
- 3) Que tipos de classificação podemos utilizar para o que chamamos de problemas em matemática escolar?
- 4) Como um professor pode conduzir uma aula de resolução de problemas?
- 5) Como um professor pode aprender a fazer perguntas que ajudem os alunos/as alunas a raciocinar e a resolver problemas com mais confiança, mais prazer e menor ansiedade e pânico? Como um professor de matemática pode aprender a formular perguntas em sala de aula e deixar os alunos/as alunas motivados(as) a pensar e trabalhar nas atividades sem dizer se o que os alunos/as alunas estão fazendo e/ou pensando está certo ou errado e sem apresentar direto a resposta?
- 6) Como um professor pode elaborar e/ou selecionar em livros, em apostilas, em artigos, em sites da Internet, e em materiais de cursos de capacitação e em outros locais boas atividades de resolução de problemas? Como definir e caracterizar uma atividade de resolução de problemas como sendo uma boa tarefa escolar? Como apreciar, julgar e avaliar se as atividades de resolução de problemas alcançaram os objetivos planejados no processo educativo e serviram para o processo de aprendizagem dos alunos? Como elaborar critérios de avaliação que permitam avaliar os procedimentos de ensino implementados pelo professor? Como elaborar critérios de avaliação que permitam avaliar o que os alunos aprenderam e o que os alunos ainda precisam aprender que possam ser implementados por professor e alunos? Que instrumentos e métodos usar nos procedimentos de avaliação da aprendizagem de matemática escolar? Que instrumentos e métodos usar nos procedimentos de avaliação do ensino de matemática? Quais instrumentos e métodos avaliativos uma grande parte dos professores e alunos acreditam e aceitam como sendo os adequados para apreciar e avaliar no processo educativo?
- 7) Como planejar em que etapas do processo educativo introduzir e explorar atividades de resolução de problemas? Quando solicitar que os alunos criem, recriem, modifiquem e proponham novas atividades

de resolução de problemas? Como avaliar as atividades de resolução de problemas? Que critérios utilizar e como divulgar para os alunos os critérios que serão utilizados?

Voltando ao nosso ponto de partida na introdução do artigo, como podemos educar alguém para a vida através do ensino de matemática escolar. Precisamos, portanto, ter bem claro para nós, professores:

♦ Como concebemos e definimos um cidadão crítico, autônomo? O que nos dizem os dicionários sobre estas palavras: cidadão, crítico, autônomo, cidadania, autonomia? Como concebemos e definimos educação, escola, ensino, aprendizagem, avaliação, matemática escolar? Que experiências tivemos no ambiente escolar sobre cada um destes termos? Ou seja, como fomos compreendendo e construindo significados para todos estes termos enquanto alunos e posteriormente enquanto professores? Quais teóricos nos dizem algo sobre estas palavras e seus significados? E o que dizem estes teóricos? O que entendemos pelo uso corrente destes termos na mídia, em nosso cotidiano e no ambiente escolar?

As respostas que eu venho construindo para estes termos estão diretamente relacionadas aos momentos vividos anteriormente. Momentos que vivenciei enquanto aluna de uma escola pública no Brasil nos anos 60, 70 e 80 do século XX e pelas experiências, leituras e reflexões que venho fazendo desde o início de minha atuação no magistério aos 17 anos em uma escola pública no bairro de Bangu em 1972. Foi iniciando a atuar no magistério na Escola Municipal Pracinha João da Silva que muitos destes questionamentos foram despertados em minha mente. As leituras sobre educadores brasileiros como Anísio Teixeira e Paulo Freire entre outros e a de educadores como Michael Apple têm me auxiliado ao longo de meus anos de trabalho como professora a ir compreendendo melhor os dilemas e desafios que cada um de nós experimenta quando procura compartilhar algum conhecimento com os nossos alunos.

♦ O que significa ser alfabetizado matematicamente ou ser literato em matemática ou possuir literacia matemática?

Ser alfabetizado matematicamente ou ser literato em matemática envolve:

- Saber quantificar, medir, operar, coletar, construir, ler, interpretar, questionar os dados e/ou gráficos que existem no mundo.
- Saber formular conjecturas, testar hipóteses e soluções, argumentar matematicamente. Enfim preparar-se para ser um resolvidor de problemas na vida, preparando-se para enfrentar os desafios e as incertezas do futuro. Na verdade a escola precisa preparar um cidadão para a vida atual e para as incertezas e mudanças constantes e aceleradas dos tempos futuros.

Portanto, é preciso que o aluno saia da escola tendo aprendido a matemática escolar e espera-se que este aprendizado permita que o indivíduo possa desenvolver habilidades e competências variadas, pois o mundo em que vivemos está em constantes mudanças e os alunos precisam aprender para além dos muros escolares. Ou seja, devemos trabalhar os conteúdos de matemática escolar esperando que os alunos aprendam tanto o conhecimento matemático quanto aprendam a apreciar e valorizar este conhecimento e que enfim cada aluno ao longo de seus estudos de matemática possa:

- > Confiar em sua capacidade e em seu potencial de aprender matemática;
- > Saber resolver problemas rotineiros e não-rotineiros;
- > Relacionar conceitos e conhecimentos;
- > Transferir conhecimento para novas situações;
- > Aprender a comunicar-se matematicamente;
- > Aprender a raciocinar matematicamente;
- > Fazer estimativas e cálculos mentais;
- > Utilizar novas tecnologias;
- > Saber trabalhar individualmente e em grupo em situações matemáticas;
- > Saber explorar e trabalhar com situações matemáticas já definidas assim como com situações em que não se apresentem claramente as questões a explorar;
- > Saber formular e criar situações matemáticas e problemas, que sejam interessantes e desafiadores;
- > Saber investigar situações matemáticas mais amplas e apresentadas às vezes como investigações matemáticas abertas;
- > Apreciar e valorizar a matemática e crer na utilidade deste conhecimento para a vida;
- > Preparar-se para aceitar ambigüidades e enfrentar situações problemáticas abertas como as que existem na vida real;
- > Saber buscar informações em livros, revistas, e sites na Internet, saber usar e criar critérios para julgamento da qualidade das informações, e saber utilizar as informações encontradas.

Estas respostas e expectativas foram construídas ao longo de meu trabalho no magistério e de muitas leituras e reflexões sobre toda a problemática envolvida no processo educativo de matemática (e.g., Associação de Professores de

Matemática, [APM] 1988; Charles; Lester, 1982, National Council of Supervisors of Mathematics, [NCSM] 1977, National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM] 1989, 2000; PCN, 1998, 1999; Polya, 1945/1973; Santos; Rezende, 1996; Santos, 1997; Schroeder; Lester, 1989). A este conhecimento profissional, que se originou na experiência desde os anos 70 em Bangu, eu também acrescentei os conhecimentos oriundos de outras aprendizagens. Aqui destaco a aprendizagem proporcionada pela participação em projetos em educação matemática desenvolvidos com os colegas do Projeto Fundão do Instituto de Matemática da UFRJ desde os anos 80 e que culminou com a pesquisa de doutorado em educação matemática com foco em resolução de problemas (Santos, 1993). Os trabalhos no Brasil dos professores Ary Quintella, Manoel Jairo Bezerra, Raimundo Nonato Tavares e nos Estados Unidos dos professores Frank Lester, John LeBlanc e Diana Lambdin muito me influenciaram, estimularam e ainda estimulam o trabalho com matemática escolar usando as atividades de resolução de problemas.

Respondendo aos outros questionamentos iniciais:

O que é um problema? Um problema é algo que queremos ou precisamos resolver e que nos apresenta uma dificuldade inicial. Geralmente é uma situação em que a princípio o indivíduo não possui a estratégia para resolvê-lo. Quando o indivíduo já sabe como resolver a situação e já dispõe de estratégias para solucionar a dificuldade, esta deixou de ser um problema. Na vida cotidiana todos nós nos deparamos com uma série de dificuldades que são os nossos problemas a resolver.

Em matemática muitas vezes utilizamos as palavras problema ou situação problema ou atividade de resolução de problemas para identificar as situações didáticas que apresentamos aos nossos alunos para resolver ao final de algum estudo. Portanto nem sempre neste caso estas atividades apresentam problemas ou dificuldades para os alunos, assim como nem sempre eles sentem o desejo de resolvê-las. Às vezes apresentamos problemas para despertar a curiosidade e motivação dos alunos para podermos a partir desta situação introduzir e explorar conteúdos matemáticos. Às vezes utilizamos problemas para praticar estratégias de resolução e para chamar a atenção dos alunos de procedimentos matemáticos. E em outros momentos podemos usar a atividade de resolução de problemas como um meio para explorarmos um novo conceito matemático.

O que é uma atividade de resolução de problemas? Por exemplo, George Polya (1945/1973) em seu livro "How to solve it: a new aspect of mathematical

method", que é considerado como a obra pioneira para todos interessados na arte de resolver problemas, nos leva a pensar em quatro fases para trabalhar com nossos alunos em resolução de problemas. Segundo ele as quatro fases envolvem compreensão do problema, desenvolvimento de um plano de ação, execução deste plano, e checagem da eficácia deste plano. Em 1944, Polya iniciou o prefácio da primeira impressão deste livro dizendo que:

Uma grande descoberta resolve um grande problema mas existe um grão de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; mas se este desafia a sua curiosidade e traz em cena as suas faculdades inventivas (criativas), e se você o resolve por seus próprios meios, você pode experimentar ou sentir a experiência de tensão e se satisfazer com o triunfo da descoberta. [...] Logo, um professor de matemática tem uma grande oportunidade. Se ele preenche o seu tempo repetindo com seus alunos operações rotineiras ele mata o interesse deles, atrapalha o desenvolvimento intelectual deles e usa inapropriadamente o seu tempo. Mas se ele desafia a curiosidade de seus alunos colocando para eles problemas proporcionais ao conhecimento deles, e os auxilia a resolver estes problemas com perguntas estimulantes, ele pode dar a eles um gosto para, e algum meio de, pensamento independente (Polya, 1945/1973, p. v).

Aqui, além de concordar e implementar as idéias centrais apresentadas por Polya, também passo a incorporar o aprendizado vivenciado ao longo de quatro anos e meio durante meus estudos de doutorado com os professores Frank Lester e John Leblanc. Portanto, utilizo as definições e concepções de atividade de resolução de problemas destes dois professores. Desde o início da década de 80 do século XX estes dois educadores matemáticos implementaram oficinas e projetos de pesquisa com professores em escolas americanas. Aprendi com eles na prática e na teoria que em uma atividade de resolução de problemas torna-se necessário:

- ? Compreender a situação através de leitura, interpretação, dramatização, etc.
- ? Não ter a princípio a solução pronta, nem saber de início uma fórmula pronta para usar ou os procedimentos necessários para solucionar o problema.
- ? Querer resolver a situação proposta.
- ? Identificar o que precisa ser resolvido (ou solucionado), que informações utilizar e que de fato sejam relevantes para solucionar o problema.
- ? Planejar e implementar uma ou mais ações para encontrar a solução.

- ? Verificar durante todo o processo se de fato está ou não resolvendo a situação problema dada.
- ? Interpretar os resultados encontrados e verificar a razoabilidade dos mesmos. Ou seja, interpretar os resultados e checar se estes são razoáveis dentro do contexto da situação dada.
- ? Efetuar sempre questionamentos que ajudem a compreender a situação como um todo e que monitorem os raciocínios utilizados e a solução encontrada.

No século XX, vários autores antes e depois da década de 80 procuraram caracterizar e definir uma atividade de resolução de problemas com algumas das características citadas acima ou com todas estas. Em minha experiência profissional com alunos da escola fundamental percebi que a etapa inicial que envolve a compreensão da situação é crucial para que os alunos procurem resolver a tarefa proposta e sintam-se motivados para isto. Em alguns casos torna-se necessário ler cuidadosamente a situação problema, procurar interpretar a situação apresentada, compreender o que de fato está sendo solicitado, compreender que dados utilizar e por que razão usar os mesmos. Realizar com os alunos uma dramatização da situação problema e/ou fazer com eles um desenho representando o que foi lido na atividade proposta e/ou fazer com eles comentários orais sobre o que é solicitado na tarefa auxilia bastante para que alguns alunos compreendam a tarefa apresentada. Aqui novamente Polya (1945/1973) nos chama a atenção para a importância de sabermos enquanto professores como ajudar, auxiliar o aluno neste tipo de atividade quando afirma:

Uma das tarefas mais importante de um professor é ajudar aos seus alunos. Esta tarefa não é bem fácil; ela requer tempo, prática, devoção, e princípios adequados. O aluno deve adquirir tanta experiência em trabalho independente quanto possível. Mas se ele é deixado sozinho com seu problema sem nenhuma ajuda ou com ajuda insuficiente, ele pode fazer nenhum progresso. Se o professor ajuda demais, nada é deixado para o aluno. O professor deve ajudar, mas nem tanto nem tão pouco, de modo que o aluno tenha uma *parte razoável do trabalho*. [...] O melhor é, entretanto, ajudar o aluno naturalmente. O professor deve se colocar no lugar do aluno, ele deve ver o caso do aluno, ele deve tentar entender o que se passa na mente do aluno, e colocar uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido para o próprio aluno* (p. 1). (Os grifos foram feitos pelo autor.)

Em 1992, Alan Schoenfeld diz que resolução de problemas tornou-se o tema central de algumas publicações americanas nos anos 80. O autor destaca três publicações desta década. O livro "Agenda for action" [Agenda para ação] (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1980), que enfatizava que resolução de problemas deveria ser o foco do currículo de matemática escolar. E as publicações "Everybody Counts" [Todo mundo conta] (National Research Council, 1989) e "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics" [Normas de currículo e avaliação escolar] (NCTM, 1989), que continuaram enfatizando a resolução de problemas. Schoenfeld questiona que, a partir dessas publicações, se pode pensar que todos aceitaram a idéia de que o objetivo primordial da instrução em matemática deveria ser o de levar os alunos a serem resolvedores de problemas competentes. No entanto, este objetivo torna-se complexo e não claro, pois percebe-se que o termo "resolução de problemas" tem múltiplas interpretações. Igualmente sem clareza é o papel que a resolução de problemas pode ter e pode desempenhar num contexto mais geral da matemática escolar, uma vez que fosse devidamente caracterizado o que se entende por resolução de problemas. Quais são os objetivos da instrução matemática e como resolução de problemas contempla tais objetivos?

Este autor também chama a atenção do leitor de que estas questões são bem complexas para serem respondidas, porque os objetivos da instrução matemática dependem de como alguém concebe o que é a matemática e o que significa entender, compreender a matemática. Tais conceitualizações e concepções variam bastante. Schoenfeld (1992) destaca que, de um lado do pêndulo, se percebe o conhecimento matemático como um corpo de fatos e procedimentos lidando com quantidades, grandezas e formas, e as relações e conexões entre elas. Neste caso saber, conhecer matemática é percebido como dominando com maestria tais fatos e procedimentos. Do outro lado do pêndulo, matemática é concebida como "uma ciência de regularidades", quase uma disciplina empírica próxima das ciências na sua ênfase em procurar padrões e regularidades com base na evidência empírica.

Antes de Schoenfeld (1992), também outros autores, como Stanic & Kilpatrick (1988), nos chamaram a atenção para a necessidade de olharmos e discutirmos um pouco sobre as definições, usos, concepções e contradições associadas aos termos problemas e resolução de problemas. Stanic e Kilpatrick (1988) revendo historicamente, ao longo dos tempos, o papel desempenhado por resolução de problemas no currículo matemático nos fornecem o seguinte resumo:

Problemas têm ocupado um papel central no currículo de matemática escolar desde a antigüidade; mas a resolução de problemas não.

Apenas recentemente os educadores matemáticos aceitaram a idéia de que o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas merece atenção especial. Com este foco em resolução de problemas veio confusão. O termo *resolução de problemas* tornou-se um slogan que engloba visões diferentes do que educação é, do que escolaridade é, do que matemática é, e de porque se deve ensinar matemática em geral e em particular resolução de problemas (Stanic & Kilpatrick, 1988, p. 1). (O grifo foi feito pelo autor.)

Quase vinte anos se passaram desde que Stanic e Kilpatrick fizeram tal consideração e podemos dizer que ainda persiste, em muitos países ao redor do mundo e não apenas nos Estados Unidos, a problemática de que muitos ainda considerem o termo resolução de problemas diretamente associado com a matemática e o seu ensino. E tal tipo de identificação superficial existe e pode ser observado na prática de muitos professores de matemática e professores que ensinam matemática desde os primeiros anos escolares. Por isto continuo considerando apropriado e necessário pensarmos e refletirmos sobre os entendimentos que cada um de nós, enquanto professores, temos dos termos problema e resolução de problemas e de como classificar e usar os problemas em sala de aula.

Que tipos de classificação de problemas matemáticos podemos utilizar? Antes de respondermos diretamente a esta pergunta colocamos uma definição de problema. Segundo Randall Charles e Frank Lester (1982, p. 5), *um problema é uma tarefa para a qual: a pessoa quer ou precisa encontrar a solução, a pessoa não tem nenhum procedimento pronto para encontrar a solução e a pessoa deve procurar encontrar a solução*. Vejam no quadro abaixo as classificações usadas por estes autores.

Exercícios de fixação	$\begin{array}{r} 346 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$
Problema de simples tradução	João tem 7 peixes em seu aquário. Tobias tem 4 peixes em seu aquário. Quantos peixes João tem a mais do que Tobias?
Problema de tradução complexa	Bolas de ping-pong são embaladas em pacotes com 3 bolas, Uma cartela tem 24 pacotes. O dono da loja de esportes, Sr. Marcelo, encomendou 1800 bolas de ping-pong. Quantas cartelas ele precisa encomendar?

Problema de processo	Um torneio de xadrez envolve 15 membros. Se cada membro jogar uma partida com um outro membro, quantas partidas serão jogadas?
Problema aplicado	Qual a quantidade de papel (de todos os tipos) que sua escola usa (gasta) em um mês?
Problema desafio	Desenhe 4 segmentos de reta que passem por todos os 9 pontos na figura 1. Cada segmento deve ser conectado a extremidade de pelo menos um outro segmento de reta.  Figura 1

Quadro 1- Exemplos apresentados por Charles e Lester (1982, p. 6-7)

Quais são os propósitos de cada um dos seis tipos de problemas identificados por estes autores? Eles nos dizem que:

1. Exercícios de fixação fornecem aos alunos prática em usar algoritmos.
2. Problemas simples fornecem aos alunos experiência em traduzir problemas reais simples e estes problemas envolvem só um tipo de cálculo.
3. Problemas complexos fornecem aos alunos experiência em resolver situações problema que traduzem problemas reais e envolvem dois ou mais cálculos.
4. Problemas de processo exibem aos alunos os processos que são inerentes em resolução de problemas e no pensamento envolvido na compreensão dos problemas. Estes problemas servem para desenvolver nos alunos estratégias gerais de entendimento, planejamento e resolução de problemas assim como avaliação de tentativas para encontrar a solução.
5. Problemas de aplicação fornecem aos alunos a oportunidade de usar uma variedade de habilidades matemáticas, procedimentos, conceitos e fatos para resolver problemas reais. Levam o aluno a perceber a utilidade e a importância da matemática no cotidiano.
6. Problemas desafio fornecem ao aluno a oportunidade de engajar-se potencialmente em atividades de recreação matemática. Estes problemas chamam a atenção para a importância de utilizar

abordagens flexíveis e de perceber o problema através de várias perspectivas. Ou seja, a importância de ter um pensamento flexível e olhar o problema por vários ângulos (Charles; Lester, 1982, p. 10).

De acordo com esta definição e concepção de problema, o indivíduo ao qual se propõe o problema precisa considerar a situação de fato um problema. Portanto, segundo Charles e Lester, essas seis situações são apenas problemas em potencial em sala de aula. À medida que os seus alunos comecem a trabalhar com situações deste tipo e que já saibam e dominem as estratégias e procedimentos de solução estas tarefas deixam de ser consideradas como problemas e passam a ser tratadas pelos alunos apenas como tarefas para exercitar e memorizar procedimentos. Ou seja, uma atividade ou tarefa de matemática escolar pode iniciar sendo de fato um problema para os alunos quando estes desconhecem a mesma e os modos de como resolvê-la. Mas, depois que os alunos compreendem a situação e aprendem os conceitos e procedimentos necessários para resolvê-la, percebemos que as tarefas escolares futuras, semelhantes a esta situação inicial, passam a funcionar como exercícios de fixação. Outros exemplos possíveis que podemos pensar para alguns destes diferentes tipos de problemas:

Exercícios de fixação	$423 + 357$ 54×26 $248 : 8$ Calcular $(a - b)(a + b) =$ Calcular $a(ab^2 + 2a^2b) =$
Problema de simples tradução	Marcelo tinha 13 carros de madeira e sua mãe lhe deu outros 5 carros. Com quantos carros ele ficou? Juliana arrumou em cada prateleira da estante 14 livros. A estante tem 7 prateleiras. Quantos livros ela pôde colocar na estante?
Problema de tradução complexa	Ovos podem ser embalados em caixas com 10 ovos ou em caixas com 12 ovos. Para a festa de final de ano a cantina vai precisar de 1200 ovos. Quantas caixas com 10 ovos podem ser compradas? E quantas caixas com 12 ovos poderiam ser compradas? E se o pessoal da cantina quisesse comprar caixas com 10 ovos e caixas com 12 ovos, quantas caixas de cada tipo poderiam ser compradas? Neste caso existiria apenas uma solução?
Problema de aplicação	Qual o consumo de energia elétrica de sua escola em um mês?

Quadro 2- Outros exemplos que proponho usando a classificação de Charles e Lester

Além de nos questionarmos sobre o que é um problema e sobre como classificá-los, precisamos saber também que processos mentais os nossos alunos utilizam quando apresentamos tais tarefas em salas de aula de matemática e também em situações semelhantes a estas que surgem em atividades rotineiras ou não fora do ambiente escolar. Afinal, quais são os processos mentais envolvidos em atividades bem sucedidas de resolução de problemas?

Segundo os autores já citados neste texto e a minha experiência como professora posso comentar que uma atividade de resolução de problemas envolve o processo de coordenar experiência anterior, conhecimento e intuição numa tentativa de encontrar um método para resolver a situação cuja solução é desconhecida. Portanto, existem alguns fatores que interferem diretamente no processo de resolução de problemas e nós, professores, precisamos estar atentos a todos estes fatores em nossas propostas pedagógicas quando exploramos situações didáticas como os problemas acima classificados.

- Fatores que envolvem o processo de resolução de problemas:
- Fatores de experiência tanto do contexto como pessoais;
- Fatores afetivos tais como interesse, motivação, pressão, ansiedade e outros;
- Fatores cognitivos tais como prontidão de leitura, de raciocínio, habilidades computacionais e assim por diante.

A maior parte de nossos alunos precisa ter bastante experiência em resolver problemas rotineiros e não-rotineiros em sala de aula. Os alunos precisam adquirir várias estratégias que os auxiliem na hora de resolver problemas. Estratégias que precisam ser exploradas, trabalhadas e aprendidas pelos alunos em aulas:

<i>Estratégias gerais</i>	<i>Estratégias de apoio</i>
Procurar um padrão, regularidade; generalizar	Rer o problema
Usar dedução (ou indução)	Procurar palavras e frases chave no problema
Trabalhar de trás para frente	Escrever informação relevante
Adivinhar (dar palpites) e testar	Fazer uma lista, tabela ou quadro organizado

Resolver um problema semelhante mais simples	Fazer desenhos, gráficos
Escrever uma equação (fórmula)	Experimentar dados e/ou dramatizar a situação
Usar números simples	

Quadro 3- Estratégias de resolução de problemas

Como um professor pode conduzir uma aula de resolução de problemas?

Schroeder e Lester (1989) nos chamam a atenção de que existem três abordagens de instrução em resolução de problemas. No artigo intitulado “Desenvolvendo compreensão em matemática através de resolução de problemas”, estes autores discutem estas três abordagens de ensino, a saber:

- ensino sobre resolução de problemas;
- ensino para a resolução de problemas; e
- ensino através de resolução de problemas ou ensino por meio de resolução de problemas.

Schroeder e Lester (1989) comentam que os professores e os livros didáticos geralmente adotam as duas primeiras abordagens de ensino. No entanto, a abordagem de ensino através da resolução de problemas é mais consistente com as recomendações do National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (NCTM, 1989) de que:

- Os conceitos matemáticos e habilidades (técnicas, procedimentos) sejam aprendidos no contexto de resolução de problemas;
- O desenvolvimento de processos de raciocínio mais complexos são estimulados através de experiências em resolução de problemas.
- A instrução em matemática ocorre num ambiente que proporcione uma atitude investigadora de resolução de problemas (p. 34).

Mas afinal o que é ensino sobre resolução de problemas?

Aqui o professor preocupa-se em exemplificar e exercitar com os alunos as estratégias de resolução de problemas e as quatro fases para resolução de Polya. Ou

seja, o professor apresenta durante o processo educativo problemas ou tarefas em que mostra a utilidade e eficiência de algumas heurísticas e estratégias do tipo: a) trabalhar com problemas mais simples; b) usar números mais simples; c) procurar regularidades; d) fazer desenhos, esquemas ou diagramas para entender e resolver a atividade; e) organizar os dados do problema e construir uma tabela com os mesmos; f) trabalhar de trás para frente; g) dar palpites para resolver a situação, etc. Aqui a preocupação do professor é em explorar com os alunos as estratégias gerais e as estratégias de apoio. A outra preocupação do professor é em explorar e trabalhar com as quatro fases de resolução de problemas segundo Polya, que são: leitura e compreensão do problema; planejamento e implementação de ações para resolver o problema; tentativas de resolução segundo os planos identificados; verificação da solução e análise da solução. Ou seja, o professor procura no ensino em matemática sobre resolução de problemas incentivar os alunos a aprenderem: (i) as várias estratégias de resolução de problemas; (ii) as quatro fases de Polya; e (iii) a discutirem sobre como resolveram os problemas.

O que é ensino para a resolução de problemas?

Neste caso o professor preocupa-se em introduzir e explorar novos conceitos e procedimentos matemáticos. Esta estratégia pedagógica de ensinar para resolver problemas é incorporada mais no final do processo educativo, porque aqui o professor parte do pressuposto de que: *O propósito principal da aprendizagem de matemática é ser capaz de utilizá-la posteriormente em situações escolares e da vida. Os alunos precisam ter oportunidades de aplicar conceitos matemáticos e estruturas estudadas em resolução de problemas* (Santos, 1995, 1996). Ou seja, ao final do processo de ensino o professor propõe aos alunos uma série de atividades denominadas de problemas, onde na verdade uma grande parte são de fato exercícios para praticar e fixar os conceitos e procedimentos explorados e estudados em aulas. Este tem sido um dos métodos mais utilizados pelos professores e a maioria dos livros didáticos vem organizada com os conteúdos a serem explorados incluindo exemplos, pequenos textos explicando os conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos e ao fim dos capítulos aparecem os problemas. Convém lembrar que nos livros o que normalmente chama-se de problemas são em sua maioria exercícios para praticar e fixar os assuntos estudados.

O que é ensino através de resolução de problemas?

Os problemas são valorizados não apenas com o propósito de aprendizagem em matemática, mas como um meio de fazer matemática. O ensino de um tópico começa com uma situação problema que engloba aspectos centrais (chaves) do mesmo e as técnicas e procedimentos matemáticos desenvolvem-se como respostas razoáveis aos problemas propostos. O objetivo da aprendizagem de matemática é transformar certos problemas não-rotineiros em problemas rotineiros. Aqui o professor interessa-se em propor aos alunos problemas e situações que sirvam para motivar e provocar a curiosidade dos alunos em descobrir, aprender e fazer matemática. Na verdade esta estratégia didática repete o que os grandes mestres do passado faziam, pois os diversos conhecimentos matemáticos que os homens sistematizaram ao longo dos tempos partiram de situações problema que intrigaram e provocaram estes indivíduos a buscarem formas e procedimentos para resolver as situações. Aqui é importante que o professor saiba selecionar situações que sejam ricas do ponto de vista matemático em ter durante o processo de solução os conceitos, propriedades e procedimentos que o professor quer introduzir, explorar e posteriormente sistematizar. Nem sempre os professores possuem de início um arsenal de situações problema que sirvam para despertar a curiosidade e introduzir os mais variados conteúdos matemáticos explorados no currículo escolar.

Resumindo podemos dizer que nestas três abordagens de ensino observamos alguns fatos que merecem ser destacados. Por exemplo, na abordagem pedagógica de *ensinar em matemática sobre resolução de problemas* –

- Os professores procuram destacar algumas heurísticas ou estratégias que se utilizam para resolver os problemas. Os alunos procuram aprender algumas destas heurísticas ou estratégias de resolução do tipo:
 - ✓ procurar regularidades;
 - ✓ resolver um problema mais simples;
 - ✓ resolver o problema de trás para frente;
 - ✓ organizar os dados em uma tabela;
 - ✓ fazer um desenho ou um diagrama.
- Os alunos resolvem e discutem sobre como os problemas são resolvidos. Os professores enfatizam estas estratégias para o auxílio e compreensão das atividades de resolução de problemas.

Ensinar matemática para resolver problemas ou ensinar matemática para a resolução de problemas –

- Os professores acreditam que precisam apresentar e ensinar os conceitos, os procedimentos de resolução e dar diversos exemplos e modelos anteriormente, porque acreditam que o propósito principal da aprendizagem de matemática é ser capaz de utilizá-la em outras situações.
- Os professores ensinam matemática para que os alunos tenham oportunidades de aplicar os conceitos matemáticos e estruturas estudadas em resolução de problemas.

Ensinar matemática através de resolução de problemas –

- Os problemas são valorizados não apenas como o propósito de aprendizagem em matemática, mas como um meio de fazer matemática, onde aproveita-se para repetir o que muitos matemáticos fizeram historicamente ao descobrirem e formalizarem conceitos matemáticos durante os seus procedimentos para solucionar e resolver problemas.
- O ensino de um tópico começa com uma situação problema que engloba aspectos centrais (chaves) do tópico e as técnicas matemáticas desenvolvem-se como respostas razoáveis a problemas razoáveis.
- O objetivo da aprendizagem de matemática é transformar certos problemas não-rotineiros em problemas rotineiros.

Convém ressaltar também que os professores e autores de livros didáticos percebem e concebem a matemática com propósitos e objetivos diferenciados quando enfatizam e/ou utilizam apenas uma ou duas destas abordagens de resolução de problemas. O ideal seria ter tanto os livros didáticos quanto os professores explorando e trabalhando os diversos assuntos de maneira integrada e explorando estas três abordagens didáticas, pois é importante que:

- ? os alunos aprendam as estratégias para resolver os problemas,
- ? os alunos aprendam a trabalhar com as diversas situações procurando seguir as quatro fases sugeridas por Polya,
- ? os alunos aprendam a descobrir, construir e/ou reconstruir os diversos conceitos, propriedades, e procedimentos matemáticos,
- ? os alunos aprendam que se pode aprender a fazer matemática a partir da exploração e resolução de problemas tanto quanto se pode aprender a praticar

conceitos matemáticos aprendidos em situações rotineiras.

O que já aprendemos sobre atividades de resolução de problemas?

Lester (1994) ao fazer um balanço sobre o que ocorreu com a pesquisa em resolução de problemas entre 1970-1994, destaca que um notável progresso tem ocorrido em quatro áreas de investigação, a saber:

- Determinantes de dificuldades de problema
- Distinções entre bons e maus resolvedores de problemas
- Atenção ao ensino (a instrução) de resolução de problemas
- estudo de metacognição em resolução de problemas (p. 663).

Este autor diz também que, apesar de termos mensagens ambíguas na literatura de pesquisa em resolução de problemas, temos cinco resultados que se destacam:

- ? Os estudantes precisam resolver muitos problemas para melhorar a habilidade deles de resolver problemas;
- ? A habilidade de resolver problemas desenvolve-se lentamente sobre um longo período de tempo;
- ? Para que os alunos se beneficiem do ensino (da instrução), eles devem acreditar que seu professor acha que resolução de problemas é importante;
- ? A maioria dos alunos obtém mais benefícios de uma instrução planejada em resolução de problemas;
- ? Ensinar aos alunos sobre as estratégias de resolução de problemas (e.g., as quatro fases de resolução de problemas de Polya [1945/1973]) ajuda muito pouco a melhorar as habilidades dos alunos em resolver problemas de matemática em geral (Lester, 1994, p. 666).

Uma outra questão importante que se coloca a partir deste retrospecto nas pesquisas realizadas: É metacognição a força motriz (força impulsionadora) em atividades de resolução de problemas? Afinal, o que é metacognição? Por que pensarmos em outros termos associados aos problemas?

A definição dada por Flavell (1976), e geralmente citada em muitas investigações, nos diz que:

metacognição refere-se ao conhecimento de alguém sobre seus próprios processos cognitivos ou algo relacionado a eles, e.g., as propriedades relevantes de aprendizagem de informações ou dados. Por exemplo, eu estou envolvido em metacognição . . . se eu percebo que estou tendo mais problemas aprendendo A do que B; se de repente surge a idéia de que eu devo checar C antes de aceitar que isto é uma realidade (ou um fato real); se me ocorre que eu devo fazer um exame minucioso de todas as alternativas em uma tarefa de múltipla escolha antes de decidir qual é a melhor. . . . Metacognição refere-se, entre outras coisas, ao monitoramento ativo e conseqüente regulação e orquestração destes processos em relação aos objetos cognitivos ou dados sobre os quais eles se sustentam (se baseiam), usualmente a serviço de algum objetivo concreto ou meta (Flavell, 1976, p. 232).

A maioria dos pesquisadores tem considerado duas componentes que estão relacionadas entre si ao estudar metacognição:

- O conhecimento do indivíduo sobre seus próprios pensamentos;
- A regulação (gerência) e monitoramento (controle) das atividades de um indivíduo durante a atividade de resolução de problemas.

Schoenfeld (1992) acrescenta uma terceira componente no estudo da metacognição, que ele identifica como sendo a componente que envolve as crenças, concepções, convicções, intuições e “affects” – afetos, parte afetiva, parte emocional. Este autor considera esta componente afetiva e seus efeitos no desempenho, na performance e na execução das tarefas de resolução de problemas.

Precisamos ainda responder a questionamentos do tipo: É metacognição a força impulsionadora de resolução de problemas? Como o trabalho em resolução de problemas pode auxiliar a desenvolver a metacognição em todos estes três aspectos? Apesar de não termos a questão sobre metacognição e resolução de problemas resolvida, Lester (1994) nos informa que existem alguns resultados importantes que são geralmente aceitos. Estes resultados dizem que:

- A atividade de monitoramento efetivo durante resolução de problemas requer o conhecimento não apenas de o que e quando

monitorar, mas também como monitorar. Além disso, ensinar aos estudantes como monitorar o comportamento deles é uma tarefa difícil.

- Ensinar aos estudantes a serem mais conscientes de suas cognições e melhores monitores (controladores) de suas ações em resolução de problemas deve ocorrer no contexto de aprendizagem de conceitos e habilidades matemáticos específicos (a instrução de metacognição genérica é menos efetiva).
- O desenvolvimento de habilidades metacognitivas saudáveis é difícil e requer a desaprendizagem de comportamentos metacognitivos inapropriados que foram desenvolvidos através de experiência anterior. (pp. 666-667).

Em meu trabalho didático e em pesquisas desenvolvidas desde 1988, percebo que é preciso clarear e caracterizar o que envolve a metacognição e que tarefas desenvolvemos quando temos este conhecimento metacognitivo (Santos, 1993, 1997; Santos-Wagner, 1997; Santos-Wagner, 1999). O trabalho com professores em exercício e com futuros professores e meu próprio trabalho enquanto professora e investigadora têm contribuído bastante para clarear o significado e a compreensão deste termo. Nós, professores desenvolvemos uma série de ações durante as fases de planejamento, implementação e análise de aulas ministradas, mas nem sempre aprendemos ou sabemos usar estratégias que nos façam pensar, analisar e refletir sobre os conhecimentos utilizados em cada etapa deste processo pedagógico e sobre os conhecimentos que já adquirimos e/ou os conhecimentos que ainda precisamos adquirir enquanto profissionais da educação. O meu trabalho de pesquisa de doutorado que foi desenvolvido com futuros professores primários em uma disciplina de conteúdos matemáticos no início dos anos 90 do século XX, me levaram a concluir que:

a metacognição envolve o conhecimento do indivíduo sobre seu próprio conhecimento. Isto ocorre quando o indivíduo tem consciência do que já sabe e que de fato já aprendeu e já domina com segurança e facilidade, e quando o indivíduo também está ciente sobre o que ainda não aprendeu e o que sente dificuldades. Ou seja, quando o indivíduo está desenvolvendo a sua metacognição ele tem conhecimento a nível consciente de suas potencialidades e dificuldades. Além disso, o indivíduo sabe usar seu conhecimento de modo eficaz e sabe procurar superar suas dificuldades (Santos, 1997, p. 20).

No caso dos professores há necessidade de que estes desenvolvam e adquiram este tipo de conhecimento metacognitivo que envolve o conhecer e identificar o que já se sabe e se conhece, gerenciar e monitorar este conhecimento, assim como identificar os conhecimentos que ainda se precisa adquirir em termos de conhecimentos profissionais. No caso dos alunos há necessidade também de que estes desenvolvam e adquiram conhecimento metacognitivo, pois muito poucos indivíduos já possuem e/ou desenvolvem este conhecimento que envolve tanta análise, reflexão e apreciação dos próprios conhecimentos.

Em síntese precisamos considerar estas três componentes centrais no estudo de metacognição, que são o conhecimento do indivíduo sobre seu próprio conhecimento e pensamentos, a gerência e controle das atividades do indivíduo em tarefas de resolução de problemas e outras, e a parte afetiva que envolve as crenças, concepções, reações afetivas, e intuição. E precisamos pensar em desenvolver em nossos alunos este tipo de conhecimento que envolve estes três aspectos. Além disso, nós precisamos nos motivar também enquanto professores para desenvolvermos em nós este conhecimento metacognitivo também quando propomos atividades de ensino sobre resolução de problemas. Porque nós que atuamos como educadores estamos servindo de modelos para nossos alunos com os nossos procedimentos de ensino.

Finalizo este texto expressando aos leitores o meu desejo de iniciar com os mesmos um diálogo e uma reflexão sobre as idéias aqui registradas. Além dos questionamentos já deixados ao longo do texto para discutirmos futuramente, coloco aqui outros que considero pertinentes pensarmos quando consideramos resolução de problemas como sendo uma abordagem educativa viável que possa e deva ser apreciada nos momentos de ensinar, de aprender e de avaliar. E sugiro também que consultem algumas das referências que usei neste texto e/ou as outras que coloquei no final como sugestões. Espero assim poder receber futuramente informações sobre estes e outros questionamentos que sejam relevantes considerar no ensino de matemática quando consideramos a resolução de problemas como uma possível abordagem educativa. Os questionamentos que deixo em aberto para pensarmos são:

- a) Como fazer perguntas que ajudem os alunos/as alunas a raciocinar e resolver problemas com mais confiança?
- b) Como aprender a questionar em sala de aula e deixar os alunos/as alunas motivados a trabalhar nas atividades e pensar sem dar direto a resposta e sem dizer se o que os alunos/as alunas estão fazendo e/ou pensando está certo ou errado?

- c) Como elaborar e/ou selecionar em livros, em apostilas, em artigos, em sites da Internet, e em materiais de cursos de capacitação (outros) boas atividades de resolução de problemas?
 - d) Como planejar em que etapas do processo educativo introduzir e explorar atividades de resolução de problemas?
 - e) Quando solicitar que os alunos criem, recriem, modifiquem e proponham novas atividades de resolução de problemas?
- Como avaliar as atividades de resolução de problemas? Que critérios utilizar e como divulgar para os alunos os critérios que serão utilizados?

Referências bibliográficas:

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA [APM]. **Renovação do currículo de Matemática**. Lisboa, APM, 1988.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

CHARLES, R.; LESTER, F. **Teaching problem solving**: What, why and how. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1982.

FLAVELL, J. H. **Metacognitive aspects of problem solving**. In: Resnick, L. (ed.). The nature of intelligence. Hillsdale; NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1976, p. 231-236. .

GOMOLUCH, T.; HILLEFELD, M.; HOLTKAMP, R. **Das grosse PISA training für erwachsene und logisches denken intelligent anwenden**. [O grande treinamento PISA para adultos e para o uso inteligente de pensamento lógico] München: Compact Verlag München, 2004.

LESTER, F. Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25, p. 660-675, 1994.

NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS [NCSM]. **Basic mathematical skills**. Position Paper from NCSM, 1977. Disponível na internet em <http://ncsmonline.org/docs/PositionPapers/NCSMPositionPaper01_1977.pdf>. Acesso em 14 dez. 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Agenda for action**. Reston, VA: Author, 1980.

_____. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 1989.

_____. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 2000.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Everybody Counts**: A report to the nation on the future of mathematics education. Washington, D.C.: National Academy Press, 1989.

OLIVEIRA, R.; BAIRRAL, M. A.; REIS, R. M. M. Um estudo sobre a educação matemática publicada nos 30 anos do **Boletim GEPEM**, Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 48, p.23-83, jan./jun. 2006.

POLYA, G. **How to solve it**: A new aspect of mathematical method. Second Edition, Second Printing, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1973 (First Printing, 1945, Second Edition, 1957).

SANTOS, V. M. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions**. 1993. 451f. Tese (PhD em Educação: Educação Matemática). School of Education, Indiana University, Bloomington, Indiana. Publicada por Associação de Professores de Matemática, Lisboa.

_____. **A pesquisa em resolução de problemas e metacognição**. Palestra apresentada no seminário de mestrado em educação matemática no Instituto de Matemática da UFRJ em 26/09/1995.

_____. **Resolução de problemas**: Uma abordagem no ensino de matemática de

1º e 2º graus. Oficina para professores realizada na Universidade Federal Fluminense, 1996.

_____. (org.). **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: Métodos alternativos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

SANTOS, V.; REZENDE, J. (coord.). **Números, linguagem universal**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

SANTOS-WAGNER, V. **Resolução de problemas e sua abordagem no processo educativo**. Notas de aula de seminário de educação matemática apresentado no mestrado em educação no Programa de Pós-Graduação do Centro de Educação da UFES, 2001.

_____. **Reflexões sobre problemas e resolução de problemas**. Palestra apresentada na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro em 28/01/2004.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: Grouws, D. A. (ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992, p. 334-370.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: Trafton, P. R. (ed.), **New directions for elementary school mathematics**: 1989 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1989, p. 31-42.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (ed.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Research Agenda for Mathematics Education, Volume 3. Reston, Virginia: NCTM, 1988, p. 1-22.

Artigos do Boletim GEPEM sobre o tema de resolução de problemas –

AVERBUCH, A.; GOTTLIEB, F. C. Caminhos alternativos na resolução de um problema relativo às progressões aritméticas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 22, Ano XIII, 1º sem. 1988, p. 41-44.

CASTRO, M. R. Educação algébrica e a resolução de problemas: A proposta de interatividade do Salto para o Futuro. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 42, fev/jul. 2003, p. 11-26.

COELHO, H. B. N. Agora até problemas de Português temos que resolver? História de uma aula de Matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 50, jan./jun. 2007, p. 87-103.

DINIZ, M. I. de S. V. Resolução de problemas de matemática elementar. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 22, Ano XIII, 1º sem. 1988, p. 15-20.

EQUIPE ELEMENTAR DO IREM DE GRENOBLE. Em nossas classes: Qual é a idade do Comandante?. Tradução do artigo publicado no Boletim n. 323, abr./1980, da Association des Professeurs de Mathematiques de L' Enseignement, Paris, França. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 10, dez./1980, p. 47-61.

HART, K. Métodos usados pelos alunos para resolver problemas de matemática. Tradução de Radiwal Alves Pereira. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 19, Ano XI, 2º sem. 1986, p. 38-42.

MARTÍNEZ PADRÓN, O. J.; GONZÁLEZ, F. E. Problemática de la formulación de problemas de matemática: un caso con docentes que enseñan matemática en la educación básica Venezolana. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 50, jan./jun. 2007, p. 43-61.

NASSER, L. Resolução de problemas – Uma análise dos fatores envolvidos. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 22, Ano XIII, 1º sem. 1988, p. 7-14.

PEREIRA, R. A. Resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 21, Ano XII, 2º sem. 1987, p. 21-26.

_____. Resolução de problemas apresentados no Boletim 21. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 22, Ano XIII; 1º sem. 1988, p. 45-48.

QUEIROZ, A. M. N. P. DE; FAINGUELERT, E. K. Resolução de problemas por alunos de 10 a 12 anos de idade. Resumo da palestra do prof. George Springer. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 3, ago/1977, p. 30-33.

SELVA, A. C. V.; BORBA, R. E. de S. R. O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 47, jul./dez. 2005, p. 51-72.

VARIZO, Z. C. M. A heurística e o ensino de resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, 18, Ano XI, 1º sem. 1986, p. 25-31.

Outras referências bibliográficas sobre o tema de resolução de problemas –

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só) . . . **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 8, p. 7-10, p. 35, 1989.

ABRANTES, P.; BARBA, C.; BATTLE, I. et al. **La resolución de problemas en matemáticas**: teoría y experiencias. Barcelona: Graó, 2002.

BEZERRA, J. **Vamos gostar da matemática**. Rio de Janeiro: PHILOBIBLION Livros de Arte Ltda, 1985.

BOAVIDA, A. M. Resolução de problemas: que rumos para a educação matemática? In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J. F.; PONTES, J. P. (eds.). **Educação matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 105-114.

BORRALHO, A. Resolução de problemas: da teoria à prática, da prática à formação. In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J. F.; PONTES, J. P. (eds.). **Educação matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 115-122.

CARRILLO, J. Conceptions and problem solving: a starting point and a tool for professional development. In: ELLERTON, N. F. (ed.). **Mathematics teacher development**: International perspectives. West Perth, Australia: Meridian Press, 1999, p. 27-46.

CHARLES, R.; LESTER, F.; O'DAFFER, P. **How to evaluate progress in problem solving**. Reston, Virginia: NCTM, 1987.

CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (ed.). **The teaching and assessing of**

mathematical problem solving, Research Agenda for Mathematics Education, Volume 3. Reston, Virginia: NCTM, 1988.

COSTA, L. B. A resolução de problemas: qual o estado das coisas? **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 14, p. 7-8, p. 32, 1990.

CURCIO, F. R. (ed.) Teaching and learning: a problem-solving focus. Reston, Virginia: NCTM, 1987.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES; P.; LEAL; L. C.; PONTE; J. P. (eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM, 1996, p. 25-48.

FERNANDES, D. Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 8, p. 3-6, 1989.

_____. Resolução de problemas: investigação, ensino, avaliação e formação de professores. In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J. F.; PONTES; J. P. (eds.). **Educação matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 45-104.

FERNANDES, D.; LESTER, JR., F.; BORRALHO, A.; VALE, I. (coords.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas**. Aveiro, Portugal: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 1997.

FERREIRA; E.; ROCHA, I. A. A resolução de problemas como elemento integrador das áreas do 1º ciclo. **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 28, p. 9-10, 1993.

FRANK, M. L. Resolução de problemas e concepções acerca da matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 21, p. 21-23, 1992.

GAROFALO, J.; LESTER, F. K., Jr. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), p. 163-176, 1985.

KRULIK, S.; REYS, R. E. (eds.). **Problem solving in school mathematics**: 1980

Yearbook. Reston, Viriginia: NCTM, 1980.

LESTER, F. K., Jr.; GAROFALO, J.; KROLL, D. L. Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: key influences on problem-solving behavior. In: MCLEOD, D. B; ADAMS, V. M. (ed.). **Affect and mathematical problem solving**. A new perspective. New York: Springer-Verlag, 1989, p. 75-88.

LESTER, F.K.; MAKI, D.; LEBLANC, J.; KROLL, D. L. (eds.) **Content component**. Volume II of the final report to the National Science Foundation of the project Preparing elementary teachers to teach mathematics: A problem-solving approach. Bloomington, Indiana: Mathematics Education Development Center, Indiana University, 1992.

MASON, J. Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In: ABRANTES; P.; LEAL; L. C.; PONTE; J. P. (eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM, 1996, p. 73-88.

MCLEOD, D. B; ADAMS, V. M. (ed.). **Affect and mathematical problem solving**. A new perspective. New York: Springer-Verlag, 1989.

MOREIRA; L. A resolução de problemas. **Educação e Matemática**, Lisboa, APM, 1, p. 10-13, 1987.

MORRIS, J. **How to develop problem solving using a calculator**. Reston, Virginia: NCTM, 1981.

NASSER; L.; CHAVES, E.A.; AZEVEDO; I. M.; BRANDÃO, J. L. M.; SILVAM M. S.; SOUZA, M. L.; SANT'ANNA, N. P.; CERQUEIRA, S. Como está o desempenho de nossos alunos em resolução de problemas? **Bolema**, Rio Claro, Unesp, 6, p. 35-44, 1988.

O'DAFFER, P. G. **Problem solving**: Tips for teachers. Reston, Virginia: NCTM, 1988.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. Rio Claro: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez Editora, 2004, p. 213-231.

PAULOS, J. A. **Mas alla de los numeros**: Meditaciones de un matemático. Traducción de Josep Llosa, Barcelona, Tusques Editores (Original publicado em 1991, Beyond Numeracy: Ruminations of a Number Man), 1993.

REEVES, C. A. **Problem-solving techniques helpful in mathematics and science**. Reston, Virginia, NCTM, 1987.

SCHOENFELD A. H. **Mathematical problem solving**. Orlando, FL, Academic Press, 1985.

_____. Cognitive science and mathematics education: An overview. In: Schoenfeld, A. H. (ed.). Cognitive science and mathematics education, New Jersey, Hillsdale, 1987, p. 1-31.

_____. **What's all the fuss about metacognition?** In: Schoenfeld, A. H. (ed.). Cognitive science and mathematics education, Alan. H. Schoenfeld (Ed.), New Jersey, Hillsdale, 1987, p. 189-215.

_____. **Learning to think mathematically**: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: Grouws, D. A. (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York, Macmillan Publishing Company and Reston, VA, NCTM, 1992, p. 334-370.

_____. Porquê roda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES; P.; LEAL; L. C.; PONTE; J. P. (eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM, 1996, p. 61-72.

SILVER, E. A. (Ed.). **Teaching and learning mathematical problem solving**: Multiple research perspectives., Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates 1985.

_____. Acerca da formulação de problemas de Matemática. In: ABRANTES; P.; LEAL; L. C.; PONTE; J. P. (eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa:

APM, 1996, p. 139-164.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. 58a. ed. Rio de Janeiro, Record, 2002.

UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, **La resolución de problemas**, Número 8, Graó, Barcelona: Graó, April 1996.

VAKIL, R. **A mathematical mosaic**: Patterns & Problem Solving. Burlington, Ontario, Brendan Kelly Publishing Inc., 1996.

VARIZO, Z. C. M. O ensino da matemática e a resolução de problemas. **Inter-ação**, Revista da Faculdade de Educação UFG, 17 (1-2), p. 1-21, 1993.

Submetido em dezembro de 2007

Aprovado em março de 2008

¹ Em jornais e revistas semanais brasileiros e internacionais têm aparecido nas últimas décadas sempre notícias que comentam sobre o mau desempenho em matemática dos alunos desde as primeiras séries escolares. É comum lermos notícias frequentes na mídia durante alguns dias e/ou semanas quando saem os resultados dos exames do PISA (Avaliação Internacional de Desempenho dos Alunos) e também quando saem os resultados dos exames do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica).

² Este livro de Polya tem o título em português traduzido para "A arte de resolver problemas".