Dimensión histórico-epistemológica de la integral impropia como guía para nuevas prácticas de enseñanza[1]

Alejandro S. González-Martín
Professor, Universidade de Montréal
a.gonzalez–martin@umontreal.ca

Resumo
Este artigo apresenta os fundamentos da construção de uma seqüência didática para o conceito de integral imprópria. A seqüência está embasada nos resultados da análise das dimensões cognitiva, didática e epistemológica do conceito. Resultados da análise epistemológica serão mostrados, especificamente, a importância do uso do registro gráfico e do estudo de casos particulares na gênese da integral imprópria. Concluindo serão ilustrados alguns exemplos de atividades.

Palavras-chave: Integral imprópria, engenharia didática, registro gráfico, análise epistemológica.

Historical-epistemological dimension of the improper integral as a guide for new teaching practises

Abstract
This paper shows the foundations of the construction of a teaching sequence for the concept of improper integral. Our sequence is based on the results of our analyses of the cognitive, didactical and epistemological dimensions of the concept. This paper focuses on the results of our epistemological analysis, showing the importance of the use of the graphic register and the study of particular cases in the genesis of the calculations of improper integrals. We finish giving some examples of our activities.

Keywords: Improper integral, didactic engineering, graphic register, epistemological analysis.

[1] Este artículo retoma y amplía elementos mostrados en los tres trabajos siguientes:
González–Martín, A. S. & Sá, C. (2008). La dimensión epistemológica de la integral impropia en el diseño de secuencias de enseñanza, 4th Congreso sobre Historia y Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas (HTEM4), Río de Janeiro (Brasil), [CD–ROM], ISBN: 978–85–61545–02–4.
González–Martín, A. S. & Sá, C. (2007). Use of epistemology to teach the concept of improper integral, *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 5th European Summer University* (ESU–5) (Barbin, E., Stehlikova, N. & Tzanakis, C., eds.), Vydavatelsky Press, Praga (República Checa), pp. 211–223.
González–Martín, A. S. & Camacho, M. (2005b). La integral impropia. Una ingeniería didáctica para su enseñanza, en *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza* (Hitt, F. & Cortés, C. eds.), Morevallado Editores, México, pp. 265–283.

Introducción

Para definir la integral de Riemann de una función dada en un intervalo [*a*, *b*], se necesita que este intervalo de integración sea cerrado y acotado y que la función a integrar esté acotada dentro del intervalo. Cuando una de estas dos condiciones no se cumple, se define la integral impropia como la generalización de la integral de Riemann. En este artículo haremos referencia solamente a las *integrales impropias de primer tipo*, que son las integrales de funciones acotadas dentro de un intervalo infinito.

Este concepto, de múltiples aplicaciones (cálculo de probabilidades, normas funcionales, cálculo de distancias, resolución de ecuaciones diferenciales a través de la transformada de Laplace, transformadas de Fourier,…), ofrece gran resistencia a los estudiantes universitarios. Nuestra investigación (González-Martín, 2002) ya ha mostrado cómo los estudiantes aprenden este concepto sin darle significado y restringido a cálculos algebraicos y a la aplicación de criterios de convergencia. Para hacer frente a esta situación, decidimos crear una secuencia de enseñanza que tratara de ayudar a los estudiantes a dar un significado a este concepto y a aprenderlo combinando informaciones algebraicas y gráficas.

En este artículo daremos brevemente algunos detalles sobre los análisis de tres dimensiones del concepto integral impropia: didáctica, cognitiva y epistemológica. Usaremos los resultados de estos análisis para describir los fundamentos básicos de la secuencia de enseñanza que construimos para mejorar la comprensión de la integral impropia en nuestros estudiantes y describiremos algunas actividades desarrolladas. Algunas observaciones serán discutidas al final.

Marco teórico

Nuestra secuencia de enseñanza juega también el rol de instrumento de investigación; por ello, se decidió utilizar una *ingeniería didáctica* (Artigue, 1992), metodología de investigación que permite guiar las experimentaciones en clase. El diseño de una ingeniería didáctica se basa en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1988) y en la importancia dada a las variaciones del contrato didáctico usual. Según Brousseau, hay que evitar dar *"recetas"* que permitan al alumno llegar a la *"solución"*, ya que éstas tienden a descargarlo *de la responsabilidad fundamental de control de su trabajo intelectual, bloqueando por lo tanto la devolución del problema, lo que hace a menudo fracasar la actividad*. El estudiante debe construir el significado de las nociones a aprender a partir de un conjunto de problemas en donde tales nociones funcionen de manera más o menos local.

En consecuencia, el profesor, en vez de proporcionar directamente al estudiante el conocimiento, debe proponerle una **situación** (variando así el *contrato* habitual) diseñada de forma tal que este conocimiento es necesario para la solución óptima y el alumno aprenderá adaptándose a un ***medio***[2], no falto de dificultades y desequilibrios. Si se adapta a la situación y llega a la *solución*, estará proporcionando evidencia de haberse apropiado del saber en cuestión, es decir, puede interpretarse que ha aprendido.

La *ingeniería didáctica* desarrolla, antes de construir la secuencia de enseñanza, análisis previos de tres dimensiones, clásicamente consideradas y que interactúan, del objeto matemático en estudio: epistemológica, didáctica y cognitiva. Estas tres dimensiones son paralelas a la clasificación de los obstáculos en Didáctica dada por Brousseau en 1976[3]:

- La dimensión epistemológica está asociada a las características del conocimiento en juego[4].
- La dimensión cognitiva, asociada a las características de las personas que recibirán la enseñanza.
- La dimensión didáctica, asociada a las características de funcionamiento del sistema educativo.

Otra de nuestras principales elecciones a la hora de diseñar nuestras actividades fue el uso del registro gráfico para mejorar la comprensión de nuestros estudiantes de la integración impropia. Esta elección fue motivada por los resultados encontrados en la Historia. Sin embargo, algunas investigaciones han indicado las reticencias que los estudiantes pueden tener para utilizar el registro gráfico cuando tienen que resolver problemas o explicar lo que hacen. En particular, estas reticencias parecen mayores en el nivel universitario. Por un lado, la falta de práctica en los niveles anteriores hace difícil para los estudiantes el uso de este registro de forma natural; por otro lado, en la Enseñanza Superior este registro suele estar normalmente tachado de "no ser muy matemático". Sin embargo, su uso puede ayudar a evitar numerosos y largos cálculos o puede incluso ser utilizado como un registro de "control" y de "predicción" para el trabajo puramente algebraico.

Mundy (1987) ya señaló que los estudiantes normalmente sólo tienen una comprensión mecánica de los conceptos básicos del Cálculo porque no han alcanzado una comprensión visual de las nociones básicas subyacentes; en

---

2 Término utilizado para traducir el término francés *milieu*.
3 Véase, por ejemplo, Brousseau (1983).
4 Para más información sobre el uso de la epistemología en Didáctica de la Matemática, véase Artigue (1995b).

particular, afirmó que los estudiantes no tienen una comprensión visual de las integrales de funciones positivas pensadas en términos de áreas bajo una curva. Esto confirma los resultados de Orton (1983) y de Hitt (2003) sobre la dominancia de un pensamiento meramente algebraico en los estudiantes, e incluso en los profesores, cuando tienen que resolver cuestiones relativas a la integración.

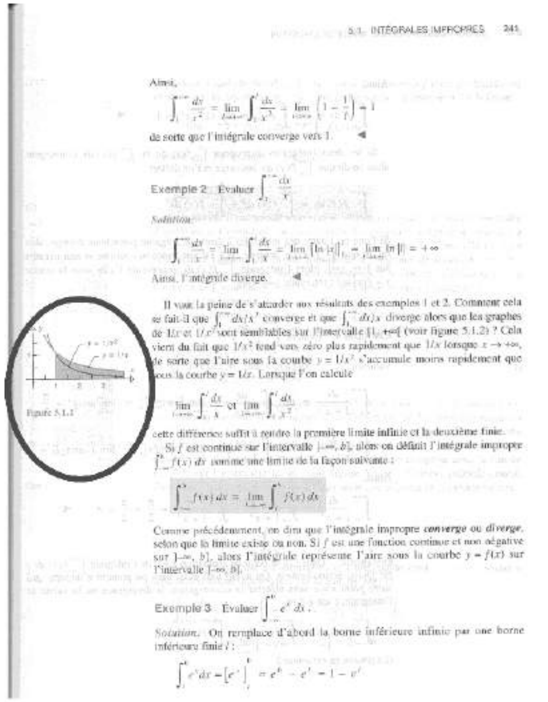
El trabajo de otros autores (como Swan, 1988, o Vinner, 1989) refuerza la hipótesis de que los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar más algebraicamente que visualmente, incluso cuando se les empuja hacia un pensamiento visual. Estos autores consideran que muchas de las dificultades en el Cálculo podrían ser evitadas si se enseñara a los estudiantes a interiorizar las connotaciones visuales de los conceptos del Cálculo.

Entre nuestros propios resultados (véase, por ejemplo, González–Martín & Camacho, 2004a), que concuerdan con los resultados enunciados anteriormente, observamos que las preguntas no algorítmicas planteadas en el registro algebraico producen grandes dificultades en los estudiantes (que no utilizan este registro regularmente), o un alto índice de respuestas en blanco. Muchos estudiantes ni siquiera reconocen el registro gráfico como un registro para el trabajo matemático. Es por ello que nuestro trabajo toma en cuenta, esencialmente, la teoría de Duval (1993, 1995) de los registros de representación semiótica y la importancia del trabajo matemático coordinando al menos dos registros (en nuestro caso, el registro algebraico y el registro gráfico) para conseguir una buena comprensión de los objetos matemáticos.

Dimensión didáctica de la integral impropia

En muchos países, los programas oficiales, en cuanto a la integral impropia, permanecen muy teóricos o dan pocas especificaciones sobre cómo enseñarlas. En particular, el programa oficial del curso donde se enseñan las integrales impropias en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna (España), en donde realizamos nuestra experimentación, proviene del año 1971. Este programa ha evolucionado desde entonces, pero se dan pocas especificaciones sobre cómo enseñar las integrales impropias. De hecho, en algunos de los programas de los últimos años aparece la expresión *"entrenamiento en el cálculo de primitivas"* (véase González–Martín, 2006a). Se podría pensar que es normal que, con este tipo de orientaciones, muchas prácticas docentes se reduzcan a la mera enseñanza de algoritmos.

Nuestro análisis de libros de texto universitarios (González–Martín, 2006a) nos permitió ver que las integrales impropias son normalmente presentadas de una forma algorítmica. Generalmente, el énfasis se coloca en el aprendizaje de criterios de convergencia y sólo se utiliza el registro algebraico. Las únicas gráficas normalmente mostradas son las correspondientes a las funciones $1/x$ y $1/x^2$ para ilustrar el comportamiento de sus integrales en el intervalo $[1,+\infty)$ (véase la figura 1, tomada de Anton, 1996).


5.1. INTÉGRALES IMPROPRES 341

Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{l\to+\infty} \int_1^l \frac{dx}{x^2} = \lim_{l\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{l}\right) = 1$$

de sorte que l'intégrale converge vers 1. ◄

Exemple 2 Évaluer $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

Solution.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{l\to+\infty} \int_1^l \frac{dx}{x} = \lim_{l\to+\infty} \left[\ln |x|\right]_1^l = \lim_{l\to+\infty} \ln l = +\infty$$

Ainsi, l'intégrale diverge. ◄

Il vaut la peine de s'attarder aux résultats des exemples 1 et 2. Comment cela se fait-il que $\int_1^{+\infty} dx/x^2$ converge et que $\int_1^{+\infty} dx/x$ diverge alors que les graphes de $1/x$ et $1/x^2$ sont semblables sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (voir figure 5.1.2) ? Cela vient du fait que $1/x^2$ tend vers zéro plus rapidement que $1/x$ lorsque $x \to +\infty$, de sorte que l'aire sous la courbe $y = 1/x^2$ s'accumule moins rapidement que sous la courbe $y = 1/x$. Lorsque l'on calcule

$$\lim_{l\to+\infty} \int_1^l \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{l\to+\infty} \int_1^l \frac{dx}{x^2}$$

cette différence suffit à rendre la première limite infinie et la deuxième finie.

Si f est continue sur l'intervalle $]-\infty, b]$, alors on définit l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ comme une limite de la façon suivante :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{l\to-\infty} \int_l^b f(x)\,dx$$

Comme précédemment, on dira que l'intégrale impropre ***converge*** ou ***diverge***, selon que la limite existe ou non. Si f est une fonction continue et non négative sur $]-\infty, b]$, alors l'intégrale représente l'aire sous la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, b]$.

Exemple 3 Évaluer $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$.

Solution. On remplace d'abord la borne inférieure infinie par une borne inférieure finie l :

$$\int_l^0 e^x dx = \left[e^x\right]_l^0 = e^0 - e^l = 1 - e^l$$

Figure 5.1.2

Figura 1

Parece que muchos de los primeros programas oficiales fueron inspirados por la Reforma de las Matemáticas Modernas (véase Artigue, 1995a), en donde se estableció un paradigma que aún es efectivo en la enseñanza de las integrales impropias en la universidad, con un carácter algebraico y algorítmico (lo que lleva a un nivel de exigencia mínimo, tanto para el profesor como para el estudiante). Este paradigma, lejos de las ideas geométricas e intuitivas, oculta los métodos históricos utilizados para calcular áreas infinitas, como veremos más adelante.

La siguiente sección muestra algunas de las consecuencias de este tipo de enseñanza para los estudiantes.

Dimensión cognitiva de la integral impropia

Después de haber analizado los programas oficiales y los manuales de texto, teníamos la impresión de que este tipo de enseñanza algorítmica tendría un efecto en las concepciones de los estudiantes sobre la integración impropia. Además, también queríamos saber qué tipo de concepciones y dificultades parecen independientes de la enseñanza recibida.

Por ello, quisimos dar un retrato más preciso del aprendizaje de los estudiantes sobre la integración impropia y, motivados por la falta de comprensión de los conceptos que podíamos notar en nuestros propios estudiantes, decidimos emprender el análisis de la dimensión cognitiva de la integral impropia, además de querer identificar algunas dificultades, obstáculos y errores que aparecen durante su aprendizaje (González-Martín, 2002). Para hacer esto, utilizamos problemas no rutinarios y no algorítmicos (véase González-Martín & Camacho, 2004a) para analizar la comprensión de los estudiantes, utilizando el marco teórico de los registros de representación semiótica (Duval, 1993, 1995). Uno de nuestros principales objetivos para esta dimensión era analizar en qué registro de representación prefieren trabajar los estudiantes, además de observar si los estudiantes hacen alguna interpretación gráfica de los resultados que obtienen.

Se creó un cuestionario que fue administrado, al final del semestre, a 31 estudiantes de primer año de la Facultad de Matemáticas, todos ellos inscritos en el curso donde se presenta la integración impropia. Después de analizar los cuestionarios, seleccionamos seis estudiantes basándonos en sus resultados globales al cuestionario y en algunas respuestas particulares que habían dado. El análisis combinado de los cuestionarios y de las entrevistas nos permitió afirmar lo siguiente[5]:

- Para comprender el concepto de integral impropia, aparecen muchas dificultades debidas a faltas de comprensión de otros conceptos, tales como límite, convergencia, integral de Riemann…
- Muchos estudiantes muestran una falta de coordinación entre los registros algebraico y gráfico; algunos incluso no reconocen el registro gráfico como un registro matemático válido.
- Muchos estudiantes, debido a la forma en que se enseña normalmente la integral de Riemann, desarrollan la concepción errónea de que la integral siempre es un área y, por tanto, siempre debe tener un valor positivo.
- Muchos estudiantes desarrollan concepciones puramente operativas de la integral, concibiéndola simplemente como un cálculo, un procedimiento.
- Muchos estudiantes sólo utilizan modelos estáticos para pensar en los procesos límite, lo que puede producir dificultades para

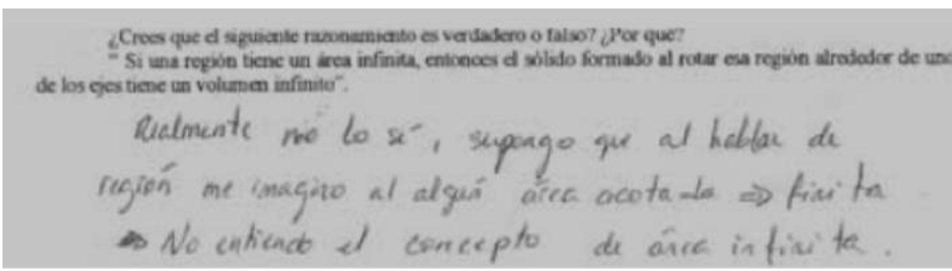
[5] Se puede encontrar información más detallada sobre el análisis de datos y las conclusiones obtenidas en González-Martín (2002) y en González-Martín & Camacho (2004a).

comprender el significado de la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y, en consecuencia, para comprender el significado del $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$.

− Algunos estudiantes no interpretan correctamente ciertos criterios de convergencia, o los utilizan en casos equivocados.
− Algunos errores con el uso del álgebra.

También identificamos los dos obstáculos siguientes, inherentes al concepto de integral impropia:

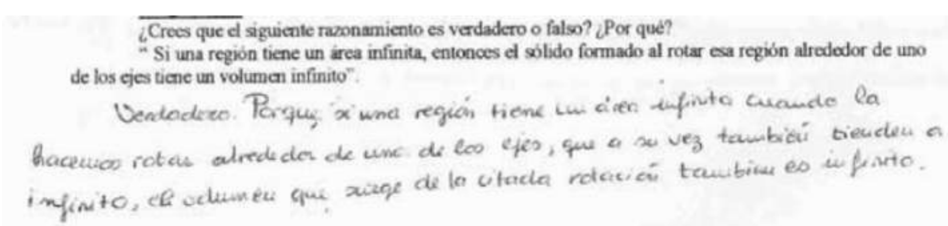
− *El obstáculo de ligación a la compacidad*: la tendencia a creer que una figura geométrica encerrará un área finita (o un volumen finito) si, y sólo si, la figura es cerrada y acotada (figura 2).


¿Crees que el siguiente razonamiento es verdadero o falso? ¿Por qué?
" Si una región tiene un área infinita, entonces el sólido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito".

Realmente no lo sé, supongo que al hablar de región me imagino al algú área acotada ⇒ finita ⇒ No entiendo el concepto de área infinita.

Figura 2

− *El obstáculo de homogeneización de dimensiones*: la tendencia a creer que si una figura encierra un área infinita (o si tiene una longitud infinita), entonces el volumen generado por rotación "heredará" esta propiedad y también será infinito (o que el área bajo la curva "heredará" la propiedad y también será infinita) (figura 3).


¿Crees que el siguiente razonamiento es verdadero o falso? ¿Por qué?
" Si una región tiene un área infinita, entonces el sólido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito".

Verdadero. Porque si una región tiene un área infinita cuando la hacemos rotar alrededor de uno de los ejes, que a su vez también tienden a infinito, el volumen que surge de la citada rotación también es infinito.

Figura 3

Algunas de estas dificultades y errores nos parecieron profundamente ligados al mismo concepto de integral impropia. En este punto, un análisis de la dimensión epistemológica se hacía necesario. También queríamos observar qué registros habían sido favorecidos por los matemáticos, en particular antes del establecimiento de una teoría de las integrales impropias.

Dimensión epistemológica de la integral impropia

A lo largo de la breve exposición histórica que mostramos a continuación, se puede ver que (como sucede normalmente en la historia de la matemática) las ideas operacionales precedieron históricamente a los conceptos estructurales. Este hecho nos debería llevar a preguntarnos si sucede de igual modo con nuestros estudiantes.

Las configuraciones no acotadas de Oresme

Los dos primeros ejemplos históricos que mostramos son muy esclarecedores, provenientes de Nicolas Oresme (1325–1382). Estos ejemplos aparecen en los capítulos III, 8 y III, 11 del *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* de Oresme (ca. 1370), uno de los textos más antiguos en el que se muestran porciones no acotadas del plano con un área finita.

Consideremos dos cuadrados iguales, de lado unitario, teniendo así entre los dos cuadrados un área total de 2 unidades cuadradas. Dividamos entonces uno de los dos cuadrados como se indica. Se divide en dos rectángulos iguales, luego se toma el rectángulo de la derecha y se vuelve a dividir en dos rectángulos iguales; tomamos nuevamente el de la derecha y se divide en dos rectángulos iguales, y así infinitas veces (véase la figura 4–a).

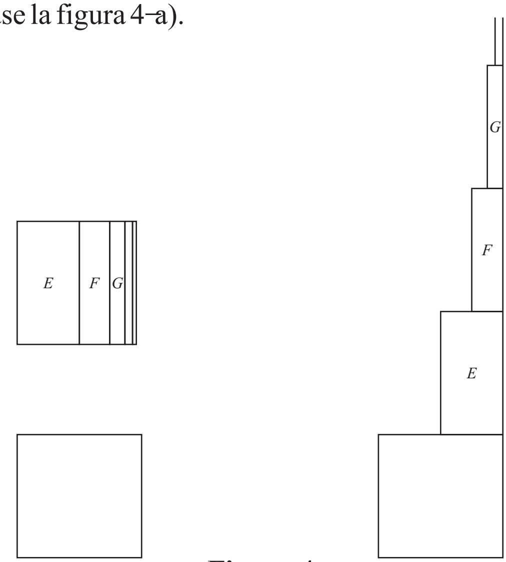


Figura 4

El argumento de Oresme procede con una reordenación de las partes, lo que obviamente no altera el área total de las figuras: se coloca la primera mitad del segundo cuadrado (parte *E*) sobre el primer cuadrado, ajustándolo a su lado derecho; luego, se coloca la cuarta parte del segundo cuadrado (parte *F*) sobre la parte *E*, ajustándola a la derecha; y se continúa procediendo de igual manera (figura 4-b). De este modo, se obtiene una figura plana infinitamente grande, pero cuya área total de 2 unidades cuadradas no ha sido alterada.

El pasaje de la figura 4-a a la figura 4-b podría ayudar a los estudiantes a comprender que la figura no acotada a la derecha debe tener un área finita. Éste es un ejemplo sencillo y elocuente que podría allanar el camino de los estudiantes para aceptar la pertinencia de estudiar las integrales impropias de segundo tipo[6].

Por otro lado, si giramos la figura 4-b con un ángulo de 90º hacia la derecha, los estudiantes también puede ver el área de una figura no acotada (similar a una integral impropia de primer tipo), de la que saben *a priori* que el área encerrada es finita, ayudando esta actividad a superar el obstáculo de *ligación a la compacidad* descrito anteriormente. En esto precisamente consiste el ejemplo dado por Oresme en la sección III, 11, con la que termina el tratado. Este ejemplo también es importante desde un punto de vista didáctico, tanto porque llama la atención del estudiante sobre las integrales impropias de primer tipo, como porque es extremadamente fácil de comprender una vez que la sección III, 8 ha sido comprendida.

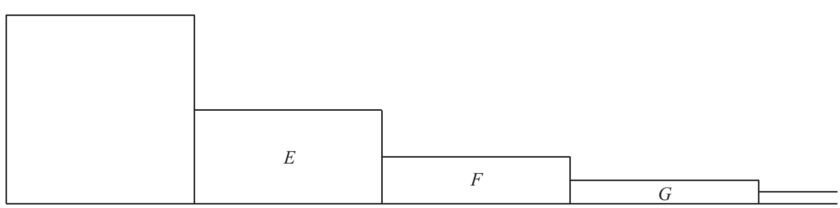


Figura 5

El sólido infinitamente largo de Torricelli

Todos los ejemplos dados por Oresme son bidimensionales. El primer caso tridimensional de lo que llamaríamos actualmente una integral impropia convergente data de alrededor de 1643 y es llamado frecuentemente *La trompeta de*

[6] Por supuesto, es anacrónico llamar a esta figura una *integral impropia*. Además, podría ser correcto argumentar que las líneas de frontera verticales no están contenidas en la gráfica de una función cuyo dominio esté representado en el eje horizontal. Sin embargo, las líneas horizontales constituyen la gráfica de una *función por partes infinita*, cuya integral (impropia) tiene valor 2.

Gabriel. Fue descubierta por Evangelista Torricelli (1608-1647) en su artículo *De Solido Hyperbolico Acuto*. Haciendo girar un segmento de la hipérbola equilátera alrededor de su asíntota (por ejemplo, hágase girar la curva $x.y = constante$, para $y \geq 1$, alrededor del eje OY) se obtiene un sólido de revolución infinitamente largo que, a pesar de no estar acotado, tiene un volumen finito (figura 6). Torricelli probó este hecho de dos maneras: primero, utilizando el *método de los indivisibles*, y posteriormente utilizando el antiguo *método de exhausción*.

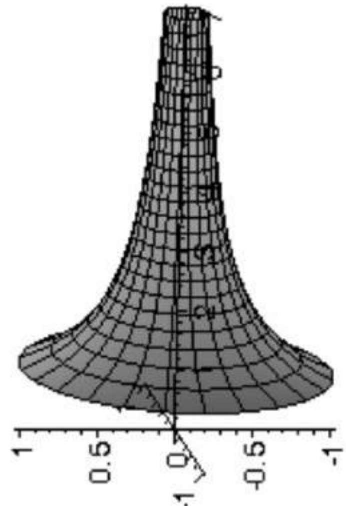


Figura 6

Debido a su carácter contraintuitivo, el sólido de Torricelli tuvo un impacto muy grande en la comunidad científica del siglo XVII[7]. En Inglaterra, por ejemplo, el matemático John Wallis (1616-1703) y el filósofo Thomas Hobbes (1588-1679) estuvieron implicados en una controversia muy duradera sobre algunos tópicos matemáticos, siendo uno de ellos el sólido de Torricelli. Hobbes, que se oponía a la presencia del infinito en matemáticas, no podía aceptar la existencia de un sólido geométrico con características tan sorprendentes como las de tener área superficial infinita, pero encerrando un volumen finito y sin tener centro de gravedad. Wallis, por otro lado, no tenía problema en considerar figuras de este tipo[8]. Hobbes criticó a Wallis, quien respondió:

> – Se puede suponer que una superficie, o un sólido, esté tan constituido como para ser *Infinitamente Largo*, pero Finitamente Grande, (la Respiración Continuamente Decreciendo en mayor proporción que en la que se incrementa la Longitud) y aún no tener *Centro de Gravedad*. Así es el *Solidum Hyperbolicum acatum de Torricellio*; y otros innumerables, descubiertos por Dr. Wallis, Mr. *Fermat*, y otros. Pero determinar esto requiere de más *Geometría y Lógica* de la que Mr. Hobbes es Dueño[9].

7 Mancosu (1996), p. 129.

8 Wallis consideraba figuras no acotadas con área o volumen finito en su libro Arithmetica Infinitorum, publicado en 1655 en Londres.

9 Citado en Mancosu (1996), p. 146. No hacemos aquí una traducción literal, por tratarse de inglés antiguo.

La respuesta de Hobbes fue:

> No recuerdo esto de Torricellio, y creo que Dr. Wallis se equivoca y Monsieur Fermat también. Porque, para comprender esto, no es necesario que un hombre sea un geómetra o un lógico, sino que esté loco[10].

La disputa continuó hasta la muerte de Hobbes.

Controversias históricas como ésta nos muestra cuán difícil puede ser comprender algunos objetos geométricos no acotados. No debería ser una sorpresa, entonces, que en la actualidad nuestros estudiantes de Cálculo tengan problemas para imaginar y para aceptar tales figuras[11].

La trompeta de Gabriel es un ejemplo interesante desde el punto de vista didáctico, aunque la lectura del texto completo de Torricelli podría ser probablemente demasiado difícil para la mayoría de los estudiantes de licenciatura. El profesor interesado en este tema puede referirse a la traducción en inglés de la parte sobre indivisibles en el libro de Struik (1986), páginas 227 a 231, y a la explicación del procedimiento completo de Torricelli en el libro de Mancosu (1996), páginas 131 a 135.

La cuadratura de Fermat de parábolas e hipérbolas de orden superior

Torricelli también mostró que el área bajo la curva $y = x^n$ comprendida entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ es igual a $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$, para valores naturales de n. Pierre Fermat (1601–1665) probó que la misma relación es válida para cualquier valor racional de n distinto de -1.

Fermat afirmó que su "método entero se basa en una propiedad bien conocida de las progresiones geométricas". Esta propiedad consiste en que, dada una progresión geométrica decreciente, *"la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión es para el menor de ellos como el mayor de ellos es para la suma de todos los términos siguientes"*[12]. Utilizando notación algebraica moderna, esto quiere decir que si tenemos la progresión geométrica decreciente a_1,

---

10 Citado en Mancosu (1996), pp. 146–147. Nuevamente, la traducción no es literal.

11 En la sección 4 se describen los obstáculos de *ligación a la compacidad* y de *homogeneización de dimensiones*, que están directamente relacionados con estas figuras.

12 Struik (1986), pp. 219–220.

$a_2,\ a_3, ..., a_n, ...$, con suma S, entonces se tiene la igualdad siguiente[13]: $\frac{a_1 - a_2}{a_2} = \frac{a_1}{S - a_1}$

Veamos ahora cómo hizo Fermat la cuadratura de la "hipérbola" de orden superior $x^2 . y = constante$, a partir de $x = a$.

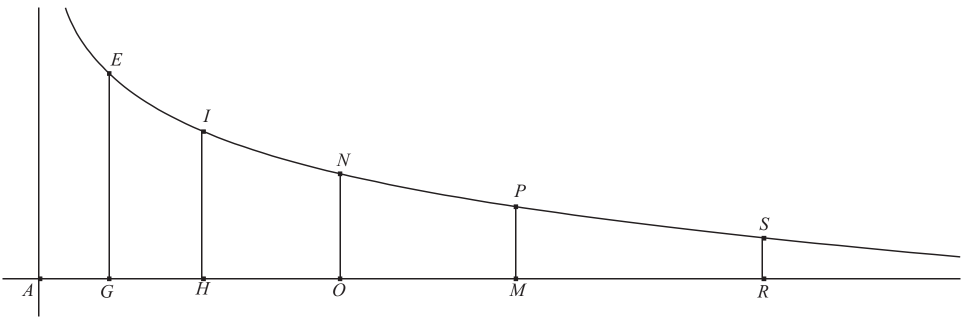


Figura 7

Consideremos una curva tal que, para las abscisas y las ordenadas dispuestas como en la figura 7, satisfaga las siguientes proporcionalidades: $\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI}$, $\frac{AO^2}{AH^2} = \frac{HI}{ON}$,...

Sean ahora las distancias AG, AH, AO, AM, … tomadas en progresión geométrica sobre el eje OX. Así, los puntos G, H, O, … serían los puntos con abscisas a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^n , ..., constituyendo una progresión geométrica creciente de razón r (con $r > 1$). Construimos rectángulos de base $ar^{n+1} - ar^n$ y altura $\frac{1}{(ar^n)^2}$. El área correspondiente de estos rectángulos sería:

$$GE \times GH = \frac{ar - a}{a^2} = \frac{r-1}{a},\ HI \times HO = \frac{ar^2 - ar}{a^2r^2} = \frac{r-1}{a} \cdot \frac{1}{r},\ ON \times OM = \frac{ar^3 - ar^2}{a^2r^4} = \frac{r-1}{a} \cdot \frac{1}{r^2}, ...$$

Así, las áreas de estos rectángulos forman una progresión geométrica decreciente cuyo primer término es $\frac{r-1}{a}$ y cuya razón es $\frac{1}{r}$. Por tanto, si aplicamos la fórmula conocida, la suma $S = \frac{\frac{r-1}{a}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r}{a}$. Mientras más próximo esté r de 1, mejor aproximarán estos rectángulos el área que queremos calcular. Fermat no habló de *límites*, pero lo que él hizo es equivalente a reemplazar r por 1, obteniendo así el valor de $\frac{1}{a}$ para el área buscada.

13 Lo que puede ser probado que es equivalente a la fórmula más usual $S = \frac{a_1}{1-r}$.

Algunas observaciones

En esta sección hemos intentado mostrar que las integrales impropias aparecieron en la escena matemática como una generalización de resultados. De hecho, las técnicas utilizadas al principio son simplemente una generalización de las técnicas utilizadas para calcular áreas.

Los matemáticos que primero trataron de abordar este nuevo concepto estaban más bien interesados en conocer casos particulares y en calcularlos. No existía una teoría general sobre integrales impropias, ni tampoco un estudio *a priori* de la convergencia. Por otro lado, algunos resultados paradójicos produjeron sorpresa, pero la actitud de los matemáticos consistió en aceptarlos como otros elementos de la escena matemática contemporánea (*"Pero determinar esto requiere de más Geometría y Lógica de la que Mr. Hobbes es Dueño"*). Sin embargo, debemos ser conscientes de que estos resultados todavía en la actualidad producen sorpresa y de que pueden incluso generar algunos obstáculos, como describimos en la sección 4.

Es en el siglo XVIII cuando el enfoque cambia y los matemáticos comienzan a interesarse en estudiar las propiedades de las funciones dentro del intervalo de integración. El enfoque geométrico se vuelve en este momento algebraico. Fue en el siglo XIX cuando el enfoque gráfico reapareció, con la integral de Riemann (y más tarde, con la de Lebesgue), pero esta vez revestido del nuevo formalismo desarrollado en los últimos años. En nuestra opinión, este hecho puede haber producido que el enfoque geométrico con el que normalmente se introduce la integral de Riemann en la enseñanza haya quedado completamente oscurecido a los estudiantes debido a la notación.

El diseño de nuestra secuencia de enseñanza

Cuando llegó el momento de diseñar nuestras actividades, dimos gran importancia a las variaciones del contrato didáctico usual y a la construcción de un *medio* adecuado para cada actividad (Brousseau, 1988), de forma que fuera fuente de contradicciones, de dificultades y desequilibrios. El *medio* se diseñó de forma que los estudiantes pudieran utilizar su conocimiento previo para tratar de controlarlo.

Por otro lado, nuestra secuencia también se diseñó para permitir a los estudiantes que trabajaran de una manera lo más autónoma posible y para aceptar la responsabilidad dada. Este contrato didáctico era completamente nuevo para nuestros estudiantes, por lo que empezamos con situaciones cercanas a ellos para provocar una aceptación gradual de este nuevo contrato.

La secuencia de enseñanza que diseñamos intenta regresar al escenario original en el que apareció la integral impropia: el gráfico. Queríamos mejorar la comprensión de nuestros estudiantes volviendo al registro gráfico e interpretando la mayoría de los resultados gráficamente. Además, el enfoque de nuestra secuencia fue también el que apareció en la historia: generalizar algunos resultados ya conocidos para calcular áreas. Y el interés en la convergencia y en la clasificación de resultados no aparece hasta que no se ha hecho un primer acercamiento al nuevo concepto y se han descubierto algunos resultados utilizando las herramientas que los estudiantes ya conocen. Por tanto, el desarrollo de técnicas más específicas será posterior a la obtención de una primera clasificación de resultados.

En particular, tenemos en cuenta en nuestra propuesta de enseñanza que:

- La introducción de la integral generalizada a partir del problema de extensión de la definición de Riemann puede reforzar la comprensión de ésta, en particular las condiciones bajo las que se define. Con este enfoque, algunos obstáculos ligados al concepto de integral definida pueden revisarse.
- La presentación de la función integral ($F(x) = \int_a^x f(t)dt$) como elemento central del discurso puede reforzar la visión de la integral como un proceso dinámico.
- El cálculo de límites de la función integral para decidir el carácter de una integral impropia puede hacer que los estudiantes revisen su visión de los procesos límite. De esta forma, se pretende combatir el obstáculo generado por el empleo de una concepción estática de los procesos límite.
- La decisión de abordar la secuencia en paralelo a la secuencia habitual para la enseñanza de las series y la evidencia de sus relaciones a partir del Test Integral puede enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre las series, favoreciendo nuestro esquema de retroalimentación de los conceptos nuevos con los previos.
- El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquecerá el conjunto de experiencias de los estudiantes, haciéndolos más sensibles a los engaños de la intuición y dándole un mayor estatus matemático al registro gráfico.

Por todo lo anterior, nuestra propuesta se basa en presentar la integral impropia destacando su condición de **generalización** de la integral definida, por lo que se pretende ir complementando un conocimiento que los estudiantes deberían tener. Esta elección de comenzar el estudio partiendo de un problema matemático (el de generalización) viene condicionada por el nivel de conocimiento de nuestros alumnos de Primer Curso (no es posible comenzar con un problema de aplicación, puesto que nuestros estudiantes no conocen aún la Teoría de Probabilidades ni aplicaciones físicas de los conceptos estudiados).

El hecho de suprimir una de las condiciones iniciales para definir el nuevo concepto puede ocasionar algún problema a los estudiantes. Sin embargo, el hecho de partir de la misma definición pretende crear una continuidad entre ambas definiciones (aunque más adelante se verá que no se conservan todas las propiedades). Otra de las rupturas evidentes es la diferencia en las condiciones de existencia de una integral propia e impropia (por ejemplo, para el valor absoluto[14]). Además, funciones en las que siempre existe la integral definida (como polinomios) aparecen como imposibles de integrar en un intervalo infinito.

Nuestra ingeniería didáctica se divide en seis bloques:

1. Integral de una función en un intervalo infinito: Introducción y primeras intuiciones,
2. Estudio de la integral impropia de funciones estrictamente positivas,
3. Estudio de las propiedades que se conservan al extender la definición,
4. Relaciones entre integrales impropias y series,
5. Estudio de la integral impropia de funciones que cambian de signo,
6. Ampliación al caso de integrales de funciones no acotadas en el intervalo de integración,

con un total de ocho sesiones en el aula (donde se utilizaron hojas de actividades, debates y discusiones, ejemplos y contraejemplos) y dos en el aula de cómputo.

Metodología

Nuestra secuencia fue desarrollada con estudiantes de primer año de la Licenciatura en Matemáticas y en ella participaron regularmente unos 25 estudiantes. Inspirados por los resultados de nuestra revisión histórica, decidimos articular el registro gráfico con el algebraico y reconstruir el conocimiento a partir de conceptos previamente estudiados (series e integrales definidas), dando a los

[14] Se tiene que, en un intervalo $[a, b]$, si existe la integral de $f(x)$ también existirá la de $|f(x)|$. Sin embargo, si se toma el intervalo $[a,+\infty)$ este resultado es falso.

estudiantes una mayor responsabilidad en su proceso de aprendizaje.

Para introducir gradualmente el uso del registro gráfico, éste fue presentado en primer lugar para interpretar algunos resultados y más tarde para predecir resultados y aplicar un criterio de divergencia. Por otro lado, también mostramos a los estudiantes algunas limitaciones de este registro, lo que hizo necesario el uso del registro algebraico. De este modo, el uso del registro gráfico, con sus potencialidades y limitaciones, junto con el registro algebraico, facilitaría la coordinación entre ambos registros.

Describimos a continuación algunas de las actividades ideadas en el primer bloque para dar una visión de cómo los aspectos teóricos encajan en el diseño de una secuencia.

Primera actividad

En un primer momento, el profesor presenta a los estudiantes un conjunto de integrales y plantea la cuestión de identificar aquéllas que no tienen sentido para ellos. Conviene que este conjunto de integrales sea lo más rico posible, de forma que se pueda utilizar durante toda una clase. Proponemos incluir como integrales de Riemann también integrales con integrando discontinuo y no derivable; aparecerán también integrales con intervalo de integración infinito e incluso una función no integrable. Un grupo conveniente es, por ejemplo, el siguiente[15]:

$$\int_1^{10} \frac{1}{x}dx \quad \int_0^{\pi} e^x dx \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx \quad \int_{-1}^{3} E[x]dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx \quad \int_1^{e} \ln x dx \quad \int_0^{10} (1+5x)^7 dx$$

$$\int_1^{\infty} x^{-1/3}dx \qquad \int_{-1}^{1} (1-|x|)dx \qquad \int_0^1 f(x)dx, \text{ con } f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in [0,1] \cap I \\ 0, \text{ si } x \in [0,1] \cap Q \end{cases}$$

El ***medio*** de esta actividad lo constituye este conjunto de integrales. Con esto, los estudiantes se ven en una situación problemática: identificar qué integrales no pueden ser abordadas por ellos y **por qué**. Este *medio* es incompleto para los estudiantes, en el sentido de que desconocen la solución del problema propuesto y la utilidad de ésta. Sin embargo, los estudiantes disponen de los elementos y conocimientos necesarios para su estudio. La solución de esta primera actividad dará pie, de forma natural, a plantearse la pregunta clave: ¿es posible generalizar la definición que se conoce para que pueda abarcar los nuevos casos? Además, este

[15] La función $E[x]$ es la función *parte entera de* x.

medio originará otra nueva cuestión: ¿qué condiciones son necesarias para definir la integral de Riemann y cuáles no? Destacamos, por otro lado, que este *medio* ha sido enriquecido de forma que incorpora integrales de funciones "patológicas" para los alumnos. Esto es, si los alumnos creen que es necesaria la continuidad para definir la integral de Riemann, en el medio aparece la integral de una función discontinua ($E[x]$) fácilmente calculable geométricamente y que sirve de contraejemplo. Por esta razón se ha incorporado una función discontinua y una no derivable, además de

una no integrable ($E[x]$, $g(x)=1-|x|$ y $f(x)=\begin{cases}1, \text{ si } x\in[0,1]\cap I\\ 0, \text{si } x\in[0,1]\cap Q\end{cases}$,

respectivamente), que se utilizarán para reflexionar si las condiciones dadas son necesarias y/ o suficientes.

En este caso, se establece un **contrato didáctico** en el que el profesor se limitará fundamentalmente a dirigir el debate, manteniéndose neutro; se trata de que el estudiante pueda hacer funcionar su saber en situaciones donde el enseñante no esté presente. En esta primera actividad se intenta también dotar al estudiante de cierta autonomía que deberá desarrollar a lo largo de las sesiones. El profesor puede intervenir en caso de que los alumnos no lleguen a un consenso o lleguen a un punto en que no avanzan.

Una vez terminado el debate, cuando es claro que la integral de Riemann precisa de un intervalo compacto y de una función acotada en él, el profesor aclara que, por el momento, se va a restringir al caso de un intervalo de integración infinito. Entonces, pregunta a los estudiantes qué interpretación gráfica se puede hacer de la nueva situación, pues probablemente la visión de una gráfica haga emerger más fácilmente la necesidad de utilizar un límite (figura 8):

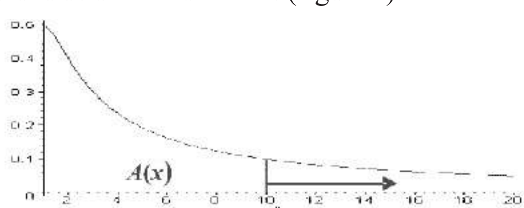


Figura 8

Es el profesor quien debe hacer ver a los alumnos que la definición

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

en caso de conocer una primitiva $F(x)$ del integrando, y querer utilizarla, queda como:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\big(F(b)-F(a)\big)$$

Esta distinción dará lugar al desarrollo de dos tipos de técnicas: el cálculo directo para evaluar la convergencia (en caso de conocer $F(x)$) y el desarrollo de criterios que permitan decidir la convergencia o divergencia sin calcular la integral.

Segunda actividad

Una vez dada una definición para estas integrales (en actividades posteriores se impondrán condiciones al integrando y se analizarán sus propiedades) se plantea el cálculo de dos integrales, para que los estudiantes puedan comenzar a operacionalizar esta nueva definición. En particular, planteamos el cálculo de las integrales siguientes:

$$a)\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1 \qquad b)\int_1^{\infty} x^{-1/3}dx = \infty$$

que son de "fácil" integración; sin embargo, lo importante es lo siguiente: se trata de dos funciones de gráfica muy similar (en particular cuando se dibuja a mano) y, sin embargo, las áreas que encierran son muy distintas. Esta cuestión produce el debate sobre si se puede predecir el comportamiento de una integral. Utilizando el registro gráfico, el profesor pedirá a los estudiantes que reflexionen si se puede predecir **cuándo la integral divergerá**. Es en esta situación que el registro gráfico, si $f(x)$ es positiva, nos permite asegurar que, si a partir de un cierto valor de x en adelante se tiene que $\boldsymbol{f(x) \geq k \geq 0}$**, entonces la integral será divergente**. Esta conclusión, junto con los ejemplos recién calculados, permite a los estudiantes ver las potencialidades del registro gráfico para asegurar la divergencia y su debilidad para predecir la convergencia, lo que justifica el desarrollo de otras herramientas formales.

De este modo, los estudiantes comienzan a desarrollar algunas intuiciones sobre este nuevo concepto antes de comenzar a institucionalizar una teoría sobre la integral impropia, reproduciendo así en cierto modo el proceso histórico.

Con este primer **criterio de divergencia** los alumnos dotarán al registro gráfico de un estatus matemático nuevo para ellos que permitirá construir tablas posteriormente. Por otro lado, a partir de este momento se construirá la teoría combinando los resultados en el registro gráfico con el registro algebraico, lo que permitirá a los alumnos conjeturar y, en algunos casos, predecir resultados, además de ser conscientes de algunas paradojas (figuras de longitud infinita con volumen finito, etc.).

Tercera actividad

Posteriormente, utilizando las herramientas recién aprendidas (la definición de integral impropia y el criterio de divergencia), los estudiantes deben construir entre todos una tabla de convergencia de las integrales impropias de las funciones más usuales, lo que permitirá afianzar los nuevos conceptos. Por otro lado, la construcción de esta tabla permite operacionalizar tanto la nueva definición como el criterio de divergencia obtenido, reforzando el estatus matemático del registro gráfico. Además, el hecho de construir esta tabla entre todos permite la implicación de los estudiantes en la construcción del conocimiento y la devolución de la tarea propuesta (Brousseau, 1988). Por último, esta tabla será utilizada más adelante, al estudiar los criterios de comparación, por lo que los estudiantes se sentirán partícipes del desarrollo teórico de los conceptos. Destacamos en este punto la importancia que tiene que el ***medio*** de la primera actividad sea lo más completo posible, puesto que permite los posteriores debates y actividades.

Mostramos a continuación un ejemplo de tabla de convergencia :

<table>
<tr><th colspan="2">Función
$f(x)$</th><th>Valor de su integral desde $\alpha > 0$ a infinito
$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$</th></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td>Convergente (= 0) *</td></tr>
<tr><td colspan="2">a</td><td>Divergente *</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x^k,\ k > 0$</td><td>Divergente *</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{x^k},\ k > 0$</td><td>$k \leq 1$</td><td>Divergente</td></tr>
<tr><td>$k > 1$</td><td>Convergente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a^{kx},\ a > 1$</td><td>$k \geq 0$</td><td>Divergente *</td></tr>
<tr><td>$k < 0$</td><td>Convergente *</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ln kx,\ k > 0$</td><td>Divergente *</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sin kx$</td><td>Divergente</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\cos kx$</td><td>Divergente</td></tr>
</table>

Observamos que los resultados marcados con un (*) pueden ser obtenidos mediante el razonamiento en el registro gráfico, empleándose así un menor tiempo en el desarrollo de la actividad y afianzándose su estatus de registro de trabajo matemático. Posteriormente, el profesor hará reflexionar a los estudiantes sobre una propiedad común de estas funciones que permite calcular su integral en estos intervalos infinitos, que es la **integrabilidad local**. Esta definición permitirá enunciar posteriormente los criterios de convergencia.

Además, la tabla anterior también nos ayuda a enunciar unas primeras conjeturas sobre el comportamiento parecido de la integral impropia de una función $f(x)$ y el comportamiento de la serie de término general $f(n)$, que llevará más adelante a preguntarse bajo qué condiciones se tiene que la integral se comporta de igual forma que la serie.

Observaciones

El registro gráfico y el uso de la teoría de series también permiten la construcción de contraejemplos útiles para cuestiones que normalmente producen dificultades a los estudiantes. Por ejemplo, se puede construir una función no–negativa, sin límite cuando x tiende a infinito, cuya integral impropia sea convergente. Para hacer esto, basta con construir rectángulos de área 1/*n*2 sobre cada entero n (véase la figura 9).

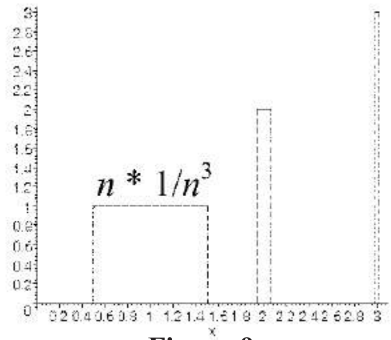


Figura 9

Este tipo de ejemplos ayuda a los estudiantes a ver que es posible tener funciones no acotadas cuya integral impropia es convergente. También, les permite ver que el hecho de tener una integral convergente no fuerza a la función a tender a cero. Con este tipo de ejemplos, fáciles de comprender utilizando la teoría de series, queremos dar a nuestros estudiantes un repertorio de funciones para ayudarlos a enfrentarse al obstáculo de *ligación a la compacidad* (en este caso, un área finita no viene encerrada por una línea cerrada y acotada). Más detalles de nuestras actividades y sobre nuestra secuencia se pueden encontrar en González–Martín (2006a, 2006b) y González–Martín & Camacho (2004b).

Toma de datos, análisis y discusión

El diseño y el desarrollo de nuestra secuencia fueron evaluados de varias formas. Durante su implementación, dimos a los estudiantes algunas hojas de trabajo para resolver en pequeños grupos, respondiendo a nuevas preguntas utilizando los elementos recién introducidos; también les pedimos que entregaran al profesor una tabla con el estudio de la convergencia de la integral de las funciones usuales y la resolución de algunos problemas. La secuencia se evaluó globalmente mediante un test de contenidos. Finalmente, los estudiantes completaron también un test de opinión sobre los aspectos más relevantes de nuestra secuencia.

Las observaciones de clase nos permitieron ver que los estudiantes aceptaron gradualmente el registro gráfico para formular algunas conjeturas a partir del momento en que se ilustró el *criterio de divergencia*. También pedimos a los estudiantes que rellenaran una tabla en donde estudiaran la convergencia de la integral de las funciones más usuales y la mayoría utilizó razonamientos gráficos para concluir la divergencia de ciertas integrales y afirmaron que este registro sirve de ayuda para evitar largos cálculos. Además, el trabajo desarrollado en pequeños grupos fue puesto en común y el profesor dio su aprobación, lo que ayudó a institucionalizar el registro gráfico como un registro matemático. Posteriormente, se puede ver que en las hojas de trabajo dadas a los estudiantes, éstos recurren a menudo al razonamiento gráfico.

También podemos decir que los estudiantes mostraron su satisfacción con el uso del registro gráfico en sus respuestas a nuestro cuestionario de opinión (completado por 24 de los estudiantes que tomaron parte en nuestra secuencia) y expresaron que este registro les había ayudado considerablemente para comprender mejor los conceptos.

Finalmente, añadimos que en el test de contenidos, en el que participaron 26 estudiantes, las preguntas que necesitaban del registro gráfico fueron respondidas por un porcentaje considerable de estudiantes. Más información sobre nuestro análisis de datos se puede encontrar en González-Martín (2006a , 2004b).

Consideraciones finales

A lo largo del presente artículo se han mostrado las bases fundamentales de nuestra secuencia de enseñanza para el concepto de integral impropia y sus motivaciones. Para ilustrar cómo los fundamentos teóricos ayudan al diseño de una secuencia, también hemos mostrado algunas actividades, relativas al tema de la integración impropia, que intentan reforzar el estatus matemático del registro gráfico en los estudiantes universitarios.

La idea de utilizar este registro activamente proviene en primer lugar como una consecuencia de nuestro análisis de la aparición histórica de las integrales impropias y, en segundo lugar, como un intento de mejorar la comprensión de nuestros estudiantes y de ayudarles a enfrentarse a algunas dificultades y obstáculos ligados al concepto de integral impropia. Pudimos ver que el trabajo de construcción de ejemplos y de contraejemplos, junto con la interpretación gráfica de resultados, permite a los estudiantes reconocer este registro y aceptar su uso. También, el conocimiento de nuestros estudiantes sobre las integrales impropias parece ser más resistente.

En trabajos previos hemos identificado algunas dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia; algunos de ellos son específicos de este concepto. Es por ello que pensamos que un diseño metodológico adecuado puede ayudar a los estudiantes a enfrentarse a ellos.

Sin embargo, quedan algunas cuestiones abiertas que necesitarán ser tratadas en posteriores investigaciones. Por ejemplo, el uso regular de nuestra secuencia durante un semestre (y el efecto en la actitud de los estudiantes hacia el registro gráfico) es una cuestión interesante, así como la integración de algunas actividades históricas en nuestra secuencia y el análisis de su influencia en la comprensión de nuestros estudiantes.

Referencias

ANTON, H. **Calcul integral**, Québec (Canada) : Les Éditions Reynald Goulet Inc., 1996.

ARTIGUE, M. Didactic Engineering. In: DOUADY, R. & MERCIER, A. (eds.). **Research in Didactics of Mathematics**, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 41–65, 1992.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. & GÓMEZ, P. (eds.). **Ingeniería didáctica en educación matemática**, Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericano, Mexico, pp. 97–140, 1995a.

ARTIGUE, M. The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. In: POTTIER, Y. M. (ed.). **Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**, University of Western Ontario, pp. 7–22, 1995b.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 4 (2), pp. 141–163, 1983.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique : Le milieu, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 9 (3), pp. 309–336, 1988.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 5, IREM de Strasbourg, pp. 37–65, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**, Neuchatel: Peter Lang, 1995.

GONZÁLEZ–MARTÍN, A. S. **Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia**, Tesina (Maestría), Universidad de La Laguna (España) – sin publicar, 2002.

GONZÁLEZ–MARTÍN, A. S. La **generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje**, Tesis Doctoral, publicada por la Universidad de La Laguna, ISBN: 84–7756–679–8, 2006a.

GONZÁLEZ–MARTÍN, A. S. Some ways to combat the effects of over–generalisation at University level. The case of the improper integral, **Proceedings of the Third International Conference on Teaching Mathematics (ICTM3)** [CD–ROM], ISBN: 0471072709, Istanbul (Turkey), 2006b.

GONZÁLEZ–MARTÍN, A. S. & CAMACHO, M. What is First–Year Mathematics students' actual understanding about improper integration?, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 35 (1), pp. 73–89, 2004a.

GONZÁLEZ–MARTÍN, A. S. & CAMACHO, M. Legitimisation of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral, **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME28)**, Bergen (Norway), vol. 2, pp. 479–486, 2004b.

HITT, F. **Dificultades en el aprendizaje del Cálculo**, XI Encuentro de Profesores de Matemáticas de nivel Medio–Superior, Universidad Michoacana San Nicolás de Hidalgo, Morelia (México), 2003.

MANCOSU, P. **Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century**, Oxford University Press, New York and Oxford, 1996.

MUNDY. Analysis of Errors of First Year Calculus Students, **Theory, Research and Practice in Mathematics Education – Proceedings ICME5**, 1987.

ORTON, A. Students' understanding of integration, **Educational Studies in Mathematics**, 14 (1), pp. 1–18, 1983.

STRUIK, D. J. (ed.). **A Source Book in Mathematics, 1200-1800**, New Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1986.

SWAN, M. On Reading Graphs, **Presentación en ICME6**, Budapest (Hungría), 1988.

VINNER, S. The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students, **Focus: On Learning Problems in Mathematics**, 11, pp. 149–156, 1989.

Submetido em agosto de 2008
Aprovado em novembro de 2008