Demonstrações em Geometria: alunos de licenciatura, ambiente informatizado e reflexões para a formação do professor de Matemática

Emerson Rolkouski
Professor, Centro Politécnico da UFPR
rolkouski@uol.com.br

Resumo
Este artigo visa a descrever o processo de construção de demonstrações em geometria mediante a utilização do software educacional Cabri-géomètre. Este software permite ao usuário a construção e manipulação de objetos geométricos via mouse. Esta pesquisa foi desenvolvida com alunos do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná. O trabalho foi operacionalizado em uma sessão individual da seguinte forma: primeiramente fez-se uma familiarização com os recursos do software e, em seguida, apresentou-se uma questão com vistas a obter a elaboração de uma conjetura e uma demonstração escrita. Na entrevista foi deixada livre a possibilidade do uso do software. Os dados coletados foram analisados qualitativamente, buscando uma maior compreensão da aprendizagem de demonstrações de teoremas, como processo. Para fundamentar esta análise percorreu-se um referencial teórico de informática na Educação Matemática e, com maior detalhamento, do ensino e aprendizagem de demonstrações em matemática. De acordo com o referencial teórico adotado, acreditamos que a conclusão desta pesquisa pode auxiliar a busca por metodologias alternativas para o ensino de demonstrações em matemática, possibilitando uma melhor experiência de aprendizagem do futuro professor, como aluno de graduação.

Palavras-chave: Demonstrações, informática, geometria.

Proofs in geometry: student teachers, environment with informatics, and reflections for mathematics teacher education

Abstract
This paper aims to describe the demonstrations geometric building process through the use of the educational software Cabri-géomètre. This software allows the user to build and manipulate geometrical objects with the mouse. This research was developed with third grade students of Maths from the Federal University of Paraná. The study was held in an individual session as follows: firstly some recognition of the software resources, then a question aiming to get the development of a conjuncture and a written demonstration was presented. The software might be used during the interview. The data collected was analysed qualitatively, looking for a higher comprehension of learning demonstration theorems as a process. To structure this analysis, a theoretical reference was followed in relation to informatics in Maths, and in details, the teaching and learning demonstrations in Maths. According to the theoretical reference adopted we believe that the conclusion of this research can help the search for alternative methodologies to the teaching of demonstrations in Maths, allowing a better experience of learning of the future teacher, as a graduation student.

Keywords: Demonstrations, informatics, Geometry.

Introdução

> Ao oferecer o presente curso partimos de que a tarefa essencial do ensino da Geometria na escola consiste em ensinar ao aluno a raciocinar logicamente, argumentar suas afirmações e demonstrá-las. Muito poucos dos egressos da escola serão matemáticos e muito menos geômetras. Também haverá os que não utilizem nenhuma vez em sua atividade prática o teorema de Pitágoras. Porém, dificilmente se achará um só que não deva raciocinar, analisar ou demonstrar. (POGORÉLOV,1974, p. 9)

Que ensino de Geometria é esse que tem como objetivo ensinar o aluno a raciocinar logicamente, argumentar suas afirmações e demonstrá-las? O texto em epígrafe remete a uma época, faz a apresentação de uma proposta de “curso” e em meio a tudo isso o “ensino” era pensado de uma maneira que sequer cogitava algumas das possibilidades que hoje se tornaram reais nos currículos e na sociedade: fractais no ensino médio, probabilidades nas séries iniciais, escolas públicas com equipamentos de informática etc.

Apesar das intenções de Pogorélov e do esforço de algumas instituições formadoras de professores de Matemática, o ensino pautado na 'apresentação' de teoremas e suas demonstrações ainda é regra dentro de muitas universidades. Entendemos aqui 'apresentação' em sua literalidade: o teorema é escrito no quadro, copiado pelos alunos, e assim estão 'apresentados'.

Este artigo se propõe a discutir algumas noções e funções das demonstrações e observar o caminho percorrido por alunos de Licenciatura em Matemática na construção de demonstrações em Geometria, em ambiente informatizado. Desse modo, torna-se possível promover ou ampliar o debate acerca do “aprender a demonstrar” em contraposição ao “aprender demonstrações”; situando a importância deste debate na Educação Matemática.

O que é uma demonstração?

Manuais de metodologia científica nos ensinam que devemos esclarecer os conceitos que iremos estudar. Ao seguir tal sugestão ganha-se no quesito cientificidade, mesmo que seja comum encontrarmos oscilações de significado durante os trabalhos. Por outro lado, e esse parece ser o caso do conceito de demonstração, a própria busca por um significado preciso poderia ser o único objetivo de todo um trabalho, mas não será o objetivo deste artigo.

O que pretendemos mostrar nesta seção é a quantidade e complexidade de abordagens possíveis ao conceito de demonstração.

No excerto abaixo tem-se o diálogo fictício entre um aluno do curso de filosofia e um matemático ideal:

> ALUNO – Então o que é realmente uma demonstração?
> M. I. – Bem, é um raciocínio que convence alguém que entenda do assunto.
> ALUNO – Alguém que entenda do assunto? Então a definição de demonstração é subjectiva; depende de certas pessoas. Antes de poder decidir se algo é uma demonstração sou obrigado a decidir quem são os peritos. Que tem isso a ver com demonstrar coisas?
> M. I. – Não, não há nada de subjectivo nisso. Toda a gente sabe o que é uma demonstração. Leia alguns livros, freqüente umas aulas com um matemático competente e vai perceber.
> ALUNO – Tem a certeza?
> M. I. – Talvez não lhe suceda se não tiver nenhuma aptidão para isto. Também pode acontecer.
> ALUNO – Então o professor decide o que é uma demonstração, e, se eu não aprender a decidir desta maneira, o professor decide que não tenho aptidão.
> M. I. – Quem poderá decidir se não eu? (DAVIS; HERSH, 1995, p.53)

O diálogo retrata, de forma irônica, a subjetividade envolvida no conceito de demonstração, e apenas esboça as questões complexas que podem decorrer das dificuldades de diálogo.

O conceito de demonstração, contrariamente ao que professores de matemática poderiam supor; é necessário e diverso, variando conforme os contextos e as ciências em que venha a ser requisitado. É possível afirmar que bem ou mal, todos temos um significado para o que venha a ser uma demonstração (RENÕN, 1990).

Em geral, uma pessoa que não é matemático, olha para a matemática como uma disciplina não-problemática, entendendo-a como um conjunto de métodos seguros e infalíveis (PUTNAM, 1988). Nesse sentido, restringir o conceito de demonstração ao campo da matemática deveria garantir uma objetividade incontestável à resposta da pergunta: "O que é uma demonstração?" Porém, lendo o diálogo acima (DAVIS; HERSH, 1995), pode-se observar que a "objetividade" está mais próxima da utopia que da realidade.

Decorre do exposto, que um educador matemático deve tentar compreender estas questões referentes à subjetividade da concepção do ato de demonstrar;

concepções que são construídas ao longo da vida escolar dos indivíduos. Por exemplo, uma demonstração realizada por um licenciando que faz o Curso de Matemática em uma instituição na qual grande parte dos professores dedica-se à matemática pura, provavelmente irá diferir em muito da mesma demonstração realizada por um aluno que realizou sua graduação em uma instituição cujos professores dedicam-se à matemática aplicada ou à Educação Matemática. Conforme o local, as demonstrações poderão ser mais "rígidas", ou "formais", ou poderiam ser aceitos argumentos ou simples "pistas" sugeridas pelos alunos na tentativa de conseguir "convencer" o professor quanto à veracidade de suas demonstrações. Encontra-se em Lakatos (1978) uma noção de demonstração mais flexível que a usual em livros de matemática. O livro "Provas e Refutações" toma um problema como ponto de partida para a prática matemática, e procura –numa dialética entre conjeturas e contra-exemplos – , chegar a uma conclusão em que todos os passos sejam coerentes e verificados de acordo com uma teoria subjacente adotada.

O significado para o conceito de demonstração está, em geral, associado à justificativa que se dá para a sua importância em diferentes contextos. Para nós, é de particular interesse a inter-relação entre os modos de ver a demonstração no trabalho do matemático, na formação de professores e na escola básica.

Para Hanna e Jahnke (1996), pesquisadoras em Educação Matemática, os objetivos de uma demonstração são:

– verificação: que confere o estatuto de verdade de uma sentença;
– explicação: que esclarece porquê a sentença é verdadeira;
– sistematização: que promove a organização dos vários resultados dentro de um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas;
– descoberta: que resulta na criação de novos resultados;
– comunicação: que interfere na transmissão de conhecimento matemático.

Do ponto de vista de um Matemático:

> A demonstração cumpre simultaneamente vários objectivos. Ao ser exposta ao escrutínio e à análise crítica de uma nova platéia, a demonstração passa por um processo constante de revalidação. A exposição incessante esclarece erros, ambigüidades e equívocos. A demonstração traz consigo a respeitabilidade. A demonstração é a garantia de autoridade.

> Na melhor das hipóteses, a demonstração aumenta o entendimento ao revelar o âmago da questão. A demonstração sugere nova matemática. O principiante aproxima-se da criação de nova matemática ao estudar demonstrações. a demonstração é energia matemática, a corrente eléctrica que dá vida aos enunciados estáticos dos teoremas.(DAVIS; HERSH, p.150, 1995).

Desta maneira podemos perceber diferentes papéis para a demonstração: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação, autoridade, entendimento; o que torna razoável indagar quais deles seriam mais pertinentes à Educação Matemática e quais nos trariam, inclusive, empecilhos.

Garnica (1995) faz considerações importantes em relação ao papel que a demonstração pode assumir na formação de professores. Estas considerações dizem respeito a duas leituras possíveis para o ensino das demonstrações nas licenciaturas em matemática: a técnica e a crítica. Os que trabalham segundo a leitura técnica, debruçam-se sobre o aspecto sintático da demonstração, ou seja, sobre a forma e o encadeamento lógico das premissas. Partem da idéia de que o objetivo da demonstração é validar o conhecimento e assegurá-lo. Para tanto, os critérios utilizados são a forma e o rigor advindos da lógica. Descontextualizam-na, portanto, de qualquer campo que não seja o da produção de conhecimento matemático.

As afirmações anteriores levam a concluir que por esta via técnica o ensino da demonstração pouco tem a contribuir para a formação do professor de matemática. As demonstrações não seriam mais do que uma verdade dogmática, caracterizada pela repetição de um processo incompreensível e que passa ao futuro professor uma forte sensação de insegurança e incapacidade de argumentação a respeito das propriedades e dos métodos matemáticos.

Há uma leitura crítica que se contrapõe a esta leitura técnica do ensino de demonstrações, ela expõe o viés da técnica a público, clareando seus métodos de ação. Assim, o ensino de demonstrações, de acordo com a concepção mencionada, pretende introduzir as demonstrações por meio de questões que levantem abordagens filosóficas e históricas (GARNICA, 1996).

Nessa trajetória de explicitação dos fundamentos por que passa a demonstração, cabe ao futuro professor conhecer os relativismos que cercam a introdução da demonstração no discurso matemático, "... onde a investigação – tomada numa acepção mais ampla que a simples procura de resultados novos e não só enfadonha repetição, mas 'reprodução'–criação, é uma das grandes responsáveis por essa procura consciente do 'saber sobre o que se fala'. ” (GARNICA, 1996, p. 19)

É de se notar que a leitura crítica é a que proporciona a discussão do processo de descoberta, valorizando-o, em detrimento de uma visão de produto final, a qual o desconsidera, que é característica da leitura técnica.

Finalmente resta considerar o papel da demonstração para o aluno do Ensino Fundamental e Médio.

Muito do estabelecido nos parágrafos acima tem sido debatido entre especialistas da Educação Matemática, levando-os a questionar a introdução das demonstrações nos níveis Fundamental e Médio.

É possível que um movimento contrário à inclusão das demonstrações nos currículos se deva, em parte, à maneira como era o ensino de matemática, particularmente no que se refere às demonstrações, em décadas anteriores. Tal afirmação pode ser esclarecida pela seguinte citação de Gouvêa (1998, p. 37):

> [...] naquela época, tanto professores como alunos não a dispensavam (a demonstração), mas a respeitavam, a valorizavam. Afirmaram (os professores consultados) também que a demonstração de teoremas era ensinada com rigor e cabia aos alunos, muitas vezes, a obrigação de memorizá-la sem entender o seu significado. Decoravam mais por respeito à autoridade do professor e por temor de notas baixas.

Tais posições levaram os educadores matemáticos a dar maior valor aos termos 'conjecturas' e 'argumentações' que, necessariamente, às 'demonstrações', afirmação que pode ser verificada ao se analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: (grifo do autor)

> Esse domínio (de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático) passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, que são elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL/MEC, 1999, p. 54) .

Nesta citação, e na maior parte do já mencionado documento, não se encontram, explicitamente, os termos 'demonstrar' ou 'provar', no entanto algumas considerações são relevantes quando do uso de outras noções tais como: argumentar, argumentação lógica, instrumentos de verificação de contradições e formalização do conhecimento matemático[1].

Reconhecendo o caráter específico do que se entende por parâmetros, há indícios tanto da leitura técnica do ensino da demonstração, que a vê como necessária à "formalização do conhecimento matemático", como afirmações que remetem à leitura crítica, ou seja, o das resoluções de situações-problema, questionando, discutindo e debatendo.

Esta consideração, porém, é insuficiente para encontrar uma resposta para a dúvida inicial, ou seja, o papel da demonstração para o aluno.

Nesta busca, podemos considerar que a epígrafe desse artigo (POGORÉLOV, 1974), em razão dos diversos trabalhos em que é mencionado (GOUVÊA, 1998, entre outros), parece ser o mais expressivo em relação à necessidade e à importância que tem o ensino da demonstração em todos os níveis.

Nas linhas da mencionada epígrafe encontram-se duas marcantes afirmações: em primeiro lugar que a tarefa essencial do ensino da Geometria consiste em ensinar o aluno a raciocinar logicamente; em segundo, que este raciocínio lógico será útil ao aluno em situações diferentes da geometria.

A primeira afirmação nos remete ao conhecido jargão: "a matemática desenvolve o raciocínio lógico". De acordo com o texto citado, o desenvolvimento do raciocínio lógico é tarefa essencial, mas não é intrínseca ao ensino da Geometria. O desenvolvimento do raciocínio lógico pode se dar em qualquer área. Nenhum conteúdo ou conceito é responsável em sua essência pelos benefícios que pode trazer. O processo ensino-aprendizagem traz uma grande parte destas contribuições. Assim, não é a matemática que pode nos levar ao "desenvolvimento do raciocínio lógico", mas certamente todas as variáveis que interferem no processo em questão.

Considerando a segunda afirmação, é questionável que garantindo o desenvolvimento do raciocínio lógico em Geometria o indivíduo estará apto a desenvolver bons argumentos em Direito, Engenharia, ou em outras áreas. Este processo de transferência, acriticamente simples, torna poético o discurso, porém, é verdadeiro?

---

[1] O termo argumentação parece ser o mais presente, tanto nas propostas curriculares como nos discursos de quem se propõe a encontrar motivos para a permanência das demonstrações no ensino. O termo argumentação encontra guarida principalmente no campo da filosofia. "Uma teoria da argumentação tem como objeto o estudo das técnicas discursivas que visam a provocar ou a aumentar a adesão das mentes às teses que se apresentam, ao seu assentimento. Ela examinará também as condições que permitem a uma argumentação começar a se desenvolver, assim como os efeitos produzidos por esta." (itálico no original) (PERELMAN, 1997, p. 207). Em um primeiro significado, argumento é qualquer razão, prova, demonstração, indício, motivo, que seja apto a captar o assentimento e a induzir à persuasão ou à convicção (BOSI, 1970). Com base nestas linhas pode-se concluir que o termo argumentação é preferível ao termo demonstração por se apresentar em princípio como uma noção mais ampla e, portanto mais pertinente ao campo da Educação Matemática.

O ensino das demonstrações deve trazer mais do que a prova, deverá trazer fundamentalmente o convencimento pelo entendimento. Assim, ao ser levado a demonstrar teoremas, o aluno constrói explicações para si próprio e as reelabora na escrita, processo que deverá levar à compreensão e ao esclarecimento. Nas palavras de Hanna e Jahnke (1996), há provas que provam, e provas que explicam. São estas as pertinentes para a Educação Matemática.

Do que foi exposto, concluo que a demonstração é parte fundamental do trabalho do matemático. Porém, a demonstração traz consigo seus equívocos, sua subjetividade, seu processo de construção. É esta demonstração contextualizada, crítica, que acredito deva ser objeto de estudo nas licenciaturas. O ensino das demonstrações deverá ter como objetivo fundamental o entendimento daquilo que se estuda expondo o processo de descoberta matemática, ressaltando seu caráter de construção e validação social.

As singularidades do "processo" em ambiente informatizado

Embora o tema central deste trabalho seja a construção de demonstrações em geometria não se pode omitir que estar em um ambiente informatizado, que permite a realização de medidas e movimentações, traz mudanças no processo a ser descrito.

Algumas pesquisas (BORBA, 1999, BORBA; PENTEADO, 2001) tem ressaltado que há transformações significativas no modo de pensar dos indivíduos quando estes produzem conhecimento utilizando uma nova mídia, neste caso o computador. Cabe, portanto, traçar uma breve justificativa do porquê de sua utilização neste trabalho, bem como pontuar aspectos relevantes no que se refere à utilização dos "ambientes de geometria dinâmicos" (AGD's) na construção de demonstrações.

Os AGD's se caracterizam por permitirem a exploração do universo geométrico de uma forma muito próxima do que é feito com "lápis e papel", sendo que o maior diferencial está na possibilidade de se arrastar elementos do desenho e fazer medições que variam concomitantemente com as movimentações, além de ser possível a realização de animações.

As figuras construídas em AGD's adquirem um estatuto diferente do dos simples desenhos. A diferença é caracterizada tanto pelas limitações impostas pelo computador, que conduzem o aluno à utilização das propriedades geométricas e não apenas à sua percepção visual como pelo fato de que uma vez construída a figura, essa poder ser arrastada, ampliada, sem que se percam suas propriedades. Esta manipulação possibilita aos alunos que considerem a figura uma representante de uma classe de objetos e não como uma figura particular (JUNQUEIRA, 1993).

Pela movimentação da figura o aluno poderá investigar se uma determinada conjetura é verdadeira ou não, podendo partir para a sua demonstração, garantindo a generalidade. Por outro lado, pode ocorrer que o aluno, motivado pelas medidas, se convença e não sinta a necessidade de provar parte do problema. Quanto a este fato:

> salienta-se [...] que a responsabilidade pelas alterações não pode ser atribuída à ferramenta computacional, só por si. Pelo contrário, é todo o contexto social e cultural da sua utilização, nomeadamente as actividades propostas e actuação do professor, que podem levar os alunos a colocar e resolver problemas de novos modos. (JUNQUEIRA, 1993)

A generalização pela simples movimentação, e a comprovação de conjeturas pelas medidas podem vir a acontecer, cabendo ao professor a mediação necessária para que isto não leve o aluno a desconsiderar a demonstração. A simples observação das medidas pode convencer o sujeito, mas não o faz compreender, retirando das demonstrações, do ponto de vista da Educação Matemática, um aspecto fundamental: o de explicar por que um teorema é verdadeiro (HANNA; JAHNKE, 1996).

Primeiros ensaios

Encontrar um caminho para descrever o processo de construção de demonstrações em geometria em um ambiente informatizado não é uma tarefa simples, pois não há um único caminho. Porém, seja qual for o escolhido, é bem provável que se faça necessária uma questão de geometria na qual se precise de uma demonstração.

Esta questão deve ter algumas qualidades: não necessitar de grande quantidade de propriedades, não necessitar de construções auxiliares complexas, o apoio do computador poder vir a ser útil. Nesta busca alguns livros foram consultados (ALMOULOUD, 1992, GERDES; CHERINDA, 1991) o que nos remeteu à seguinte questão:

Seja um triângulo qualquer ABC. Considere o ponto M como intersecção das bissetrizes de $\hat{B}$ e de $\hat{C}$, e ainda os pontos D e E as intersecções da reta paralela a BC e que passa pelo ponto M com os lados AB e AC.

Parte 1: Determine a relação existente entre o perímetro do triângulo ADE e as medidas dos lados do triângulo ABC.

Parte 2: Demonstre a relação:

Esta opção por uma questão diferente do conhecido "demonstre que", deu-se por acreditar que desta forma o colaborador se obrigaria a utilizar o software para a construção da figura. Além disso, a primeira parte da questão poderia auxiliá-lo na demonstração, além de tornar mais significativa a tarefa. Tais crenças encontram fundamentação em Radford (1994).

Metodologia

Para a coleta de dados foi realizada uma entrevista individual, em que foi apresentada a questão citada, podendo, o entrevistado, utilizar o software de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II.

Foram entrevistados cinco estudantes da Universidade Federal do Paraná cursando o terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática.

Por estarem no terceiro ano do curso esses alunos, se periodizados, cursaram Desenho Geométrico e estariam cursando Elementos de Geometria. Disciplinas que trabalham diretamente com construções geométricas e demonstrações em geometria, respectivamente. Estes dados explicam o critério utilizado.

O participante sentou-se à frente do computador com o pesquisador ao seu lado. O computador foi instalado em uma mesa com caneta e folhas de rascunho. O vídeo cassete, necessário para a gravação, ficou ao lado da mesa e o microfone acoplado no monitor.

Na entrevista houve uma conversa a respeito da necessidade da gravação e sigilo da pesquisa. Para que os objetivos ficassem claros e o procedimento homogêneo, foi entregue uma folha que continha informações pertinentes. Após esta conversa e leitura da folha de informações foi apresentado o software Cábri-Géomètre e utilizando uma seqüência didática procedeu-se com a familiarização do participante com seu uso.

Após essa familiarização entregou-se uma folha contendo o enunciado do problema e sua primeira parte. Tendo o participante encontrado a relação, foi solicitado que a escrevesse no papel fornecido. Ao final desta escrita solicitou-se verbalmente que demonstrasse a relação encontrada.

Em toda a entrevista foi adotada uma postura de intervenção mínima, exceto quando se tratava de sanar dúvidas quanto à operação do software. As demais intervenções foram realizadas apenas quando notou-se que o participante não conseguiria continuar com qualquer espécie de resolução, errada ou correta. Tal procedimento se justifica por ser este um trabalho descritivo de procedimentos de demonstração. Portanto, desde que a intervenção possibilitasse uma maior riqueza na coleta de dados, esta foi realizada. Também foram realizadas intervenções no sentido de lembrar e reforçar progressos já conquistados pelo aluno participante.

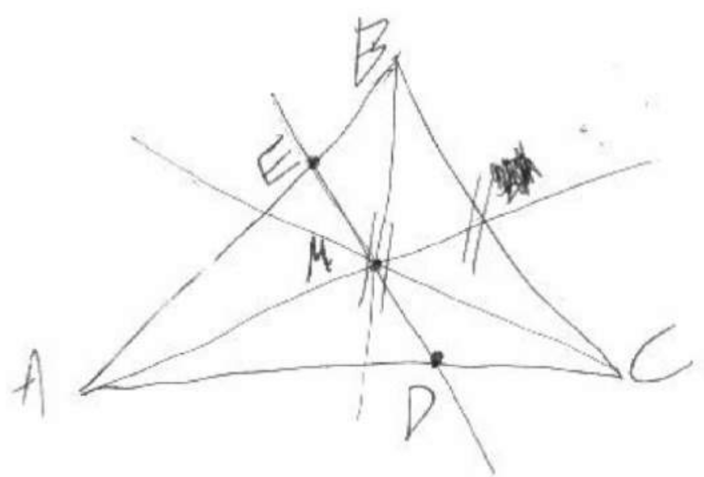
A construção da figura e as movimentações dos objetos geométricos com o auxílio do software realizados pelos participantes, bem como a fala destes e do pesquisador foram gravadas em fitas VHS, possibilitado pelo uso de uma placa de vídeo que permite gravar a imagem do monitor do computador, via cabo, e o áudio, por meio de um microfone externo, eliminando desta maneira a filmadora e o gravador. Além disso, os alunos possuíam à sua disposição caneta e papel para rascunho e escrita das respostas dos problemas propostos.

Apresentação e análise dos dados

Optaremos por uma forma peculiar de apresentar os dados denominada de transcriação. Este termo advém da História Oral, área atual de pesquisa e, basicamente se constitui na utilização das idéias presentes em um ou mais discursos a serem apresentados em um único texto. Dessa maneira, a partir da transcrição dos dados das cinco construímos um único discurso. Considera-se que esta forma de apresentação já se constitui em uma forma de análise, visto estar plasmada na teoria, e, ao fazermos escolhas sobre que idéias serão ressaltadas e quais serão descartadas estarmos, intencionalmente, apresentando nossa compreensão do processo de construção de demonstrações, objeto desse estudo.

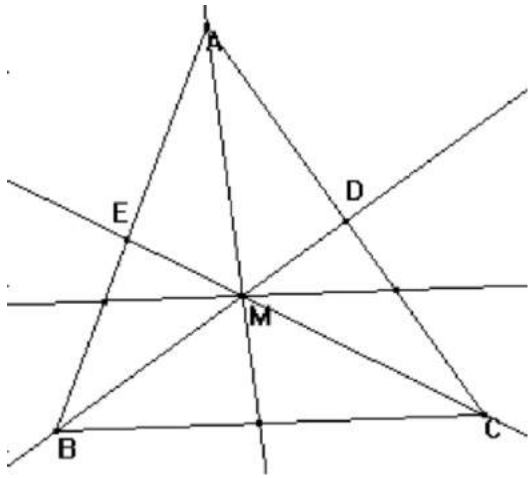
Apreendendo...

Jo lê a questão e faz o seguinte desenho na folha:



Depois de um tempo em silêncio relê a questão e pergunta se a relação será entre os perímetros dos triângulos ADE e ABC ou se entre o perímetro de um dos triângulos e os lados de outro. Peço a ele que retome a questão.

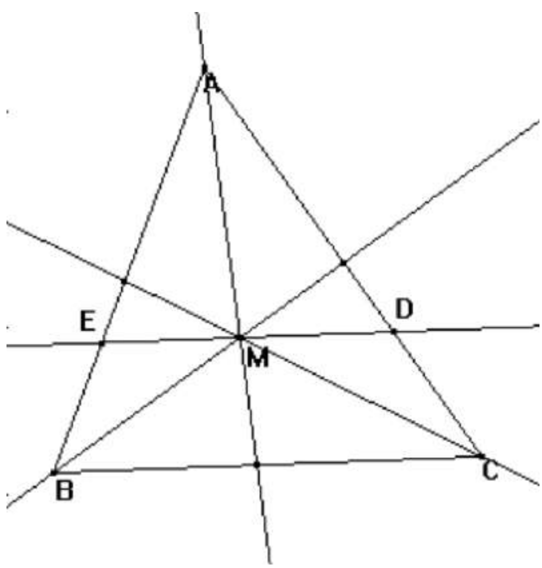
Faz o desenho da figura no computador da seguinte maneira:



Como o desenho do computador está errado em relação aos dados do exercício, motivo-o a perceber. Jo, não compreendendo o engano, procura argumentar:

Jo – É que este triângulo que eu fiz na folha, e este aqui da tela é escaleno. Então aqui na folha era mais provável que fosse dar certo mesmo.

Jo lembra das propriedades do baricentro.



Mede os lados dos triângulos ADE e ABC e calcula os perímetros.

Jo arrasta um dos vértices do triângulo observando as medidas e procura voltar o triângulo à posição inicial.

Retoma sua dúvida perguntando se a relação será entre os perímetros, ou entre perímetro e lados.

Começa a realizar uma série de razões utilizando a calculadora do programa. Calcula PER ADE/AB, PER ADE/AC e PER ADE/BC.

Pergunto a ele se a relação poderia ser com mais de um lado e ele responde afirmativamente. Realiza então as seguintes razões: PER ADE/AB+BC, PER ADE/AC+BC e finalmente PER ADE/AB+AC. A última razão tem como resultado 1.

Chamo sua atenção para os resultados perguntando se eles se manterão. Jo arrasta um dos vértices do triângulo e observa que apenas PER ADE/AB + AC, se mantem.

Pergunto se possui alguma explicação para este resultado e ele responde:

Jo – Eu acho que acabei medindo errado, eu acho que acabei medindo o perímetro por um desses lados aqui.

Depois de um tempo volto sua atenção para a pergunta:

– Quando o resultado de uma divisão é 1?

Depois de algum diálogo, Jo chega à conclusão que numerador e denominador são iguais e fazendo cálculos mentais com as medidas da tela confirma este fato.

Arrasta um dos vértices do triângulo para verificar se a razão se mantém.

Peço a Jo que escreva a relação encontrada, mas ele se concentra em encontrar o motivo que leva essa razão a se manter, tentando redigir uma demonstração.

Conjetura que a relação se mantém pelo fato de ED ser paralela.

Depois de algum tempo Jo escreve:

$$2p\,\Delta ADE = \overline{AB} + \overline{AC}$$

Peço que demonstre e Jo suspira forte. Exclama:

Jo – Eu já estava contente achando que não precisava.

Jo – Tá, eu posso escrever que pode ser AB e AC, e se eu conseguir provar isso, eu pego os outros dois lados.

Procurando um caminho para a demonstração escreve:

ΔABC, M o ponto de intersecção dos bissetrizes do $\hat{B}$ e do $\hat{C}$, D e E os intersecções da reta paralela a BC e que passa pelo ponto M c/ os lados AB e AC

Observa que não está conseguindo realizar a demonstração pois está em uma situação diferente da sala de aula, onde são vistos alguns teoremas e para se resolver os exercícios cobrados nas avaliações utilizam-se apenas os teoremas previamente estudados.

Encontra os ângulos congruentes formados pela bissetriz de B e procura durante alguns minutos relações com a paralela.

Acredita que para demonstrar esta igualdade deverá mostrar que os triângulos DMB e EMC são congruentes.

Pergunto a Jo:

– Se você demonstrar que DE é igual a DB mais EC o exercício estaria finalizado?

Jo responde:

Jo – Para mim não estaria.

Repito a pergunta e após uma pequena pausa:

Jo – Talvez eu voltando sim.

Jo continua acreditando que para demonstrar que a igualdade DE = DB + EC é verdadeira deverá provar que os triângulos DMB e MEC são congruentes.

Embora tenha deformado a figura, e visualmente os triângulos não parecerem congruentes, Jo decide medir os lados e falseia sua hipótese. A frase abaixo deixa claro que Jo não confere um estatuto de verdade às medidas do software:

Jo – Ah, olhando pelas medidas assim, não, né? Mas eu acho que se eu tivesse um martelinho e pudesse quebrar os vértices B e C, eu quebraria e juntaria estas duas pontinhas e daí daria certo.

Indago se ela acha que estas distâncias (EM e EC, DM e DB) realmente são iguais e incentivo-a a medi-las. Jo mede e verifica que são iguais.

escreve:

$AB + AC = \Delta ADE$ (*)

$AB = AD + DM$ e $AC = AE + EM$

substituindo em (*)

$AD + DM + AE + EM = \Delta ADE$

Pergunta:

Jo – Mas não é assim que é uma demonstração, né? Muito fajuta, né?

Jo, procurando outro caminho para realizar a demonstração, fica com a preocupação de utilizar todas as hipóteses.

Pergunto a Jo se está demonstrado e ele responde:

Jo – Ah, para mim sim, mas formalmente eu acho que não. Eu acho que deveria explicar passo a passo.

Depois de alguns minutos peço que escreva a demonstração e Jo responde:

Jo – Para mim não está demonstrado.

Procura encontrar outros fatos que possam ajudá-la e lembra da existência de uma propriedade do trapézio.

Jo – Mas, você sabe que, eu acho que qual que é o bloqueio da gente aqui? É que por exemplo, lá na sala de aula, se você for provar uma coisa com números, você não prova, você tem que provar só com letras, assim. Daí você chega e olha aqui números, por mais que você veja iguais, você não consegue dizer: ah, eles são iguais, você não consegue afirmar por causa disso. Porque você só trabalha com A, B, mais D. Se você falasse assim nem olhe aqui, prove só no papel, daí seria diferente. Daí, isto dá um bloqueio na gente. Eu olho ali, né? Ai, let..., números, tá tudo bem que é 3,15 e 3,15, mas e se eu mudar pro professor, nunca prova com números, né. Por isso que a gente, eu fiquei inseguro, insegura? Eu acho, né. Não que eu saiba fazer, né?

Pergunto a ele se a demonstração terminará caso consiga demonstrar que os triângulos EBM e DMC são isósceles e Jo responde com um longo silêncio.

Pergunta para si mesmo como irá mostrar que os triângulos são isósceles e procura, durante algum tempo, alguma relação entre estes dois triângulos.

Depois de alguns minutos em silêncio pergunto a Jo se os números que aparecem no computador demonstram a ele que a relação é válida, ao que responde afirmativamente.

Pergunto se é válido para qualquer caso e Jo, arrastando os vértices do triângulo confirma.

Insisto perguntando:

– Você acha que com isso está demonstrado?

Jo – Não, faltou o rigor matemático.

– Só por causa do rigor?

Jo – Só por causa do rigor.

Peço que Jo que escreva a relação ao que responde:

Jo – É que o problema é que eu não sei nem por onde começar a demonstrar isso.

Finalmente começa a escrever:

Δ isósc.

$\overline{DE} = \overline{EB} + \overline{DC}$

$\overline{DM} + \overline{EM} = \overline{EM} + \overline{DM}$

$\begin{cases} \overline{EB} \equiv \overline{EM} \\ \overline{DC} \equiv \overline{DM} \end{cases}$

Segundo Jo:

Jo: – Tá demonstrado.

Ignoro que para Jo a demonstração tenha finalizado e insisto para que escreva de uma forma mais completa. Então a escrita final fica da seguinte maneira:

Seja ABC um Δ qualquer. Considere o pt. M como sendo a interseção das bissetrizes de $\hat{B}$ e de $\hat{C}$, e ainda os pts D e E as interseções da reta // BC e que passa pelo pt. M com os lados AB e AC. Tomando-se um Δ ADE, tendo como base o segmento DE, tem-se: $2p\Delta ADE = \overline{AB} + \overline{AC}$ ∴ $\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{AE} = \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{AD} + \overline{DC} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{EB} + \overline{DC}$ (*) Porém, como M é o pt. de encontro das bissetrizes,

temos os Δs isósceles EMB (de base BM) e DMC (de base CM) ⇒ $\overline{EM} \equiv \overline{EB}$ (I) e $\overline{DM} \equiv \overline{DC}$ (II). Ainda, $\overline{DE} = \overline{DM} + \overline{ME}$ (III). Subst. (I), (II) e (III) em (*), tem-se: $\overline{DE} = \overline{EB} + \overline{DC}$ ∴ $\overline{DM} + \overline{ME} = \overline{EM} + \overline{DM}$ (c.q.d.)

—//—

Procurando pesquisar se Jo acredita que realmente não precisa demonstrar que os triângulos DMC e EBM são isósceles, pergunto:

– Esses triângulos são isósceles, conforme você escreveu, por causa da bissetriz, é isso?

Jo – É porque o M não varia, ficando sempre no mesmo lugar, e é justamente ele que dá essa propriedade.

Assim, depois de uma hora e quinze minutos Jo termina sua demonstração.

Considerações

Este artigo teve por objetivo discutir possíveis relações entre noções e funções de demonstrações e o caminho percorrido por alunos de Licenciatura em Matemática na construção de demonstrações em Geometria, em ambiente informatizado.

A amplitude do tema "demonstrações" nos levou a pontuar alguns aspectos que, se não foram suficientes, ao menos possibilitaram chamar a atenção para futuras pesquisas a respeito dos sub-temas que se apresentaram, notadamente a subjetividade do conceito em questão e suas implicações para a Educação Matemática.

A relação realizada entre o referencial teórico e as entrevistas que aqui foram apresentadas sob uma única "voz", permite concluir que o caminho utilizado pelos alunos para realizar demonstrações está muito distante do caminho trazido pelos livros e reproduzido pela maior parte dos professores. Se este vai linearmente das hipóteses à tese, aquele se processa em um movimento não linear, entre hipótese e tese, em que a última, por vezes, é utilizada para estabelecer conjeturas, e chegar a um melhor caminho para a conclusão da demonstração.

O caminho não linear realizado pelos alunos participantes parece ser mais natural, visto, inclusive, estar mais próximo do trabalho do matemático que se propõe a descobrir novos resultados.

Pela leitura das demonstrações realizadas pelos alunos, aqui transcriadas e transformadas em uma única entrevista, aponta-se como relevante para a compreensão de tais processos a importância dada ao caráter formal da demonstração, em detrimento da lógica interna. Não houve uma preocupação com a demonstração do porquê os triângulos DMC e EBM eram isósceles, no entanto, o rigor era sempre perseguido.

Outra característica interessante é a confusão causada pela inserção de medidas e a possibilidade de arrastar os vértices e observar as regularidades na tela. Por vezes, esse fato ocasionou que se creditasse às medidas um caráter de demonstração, por vezes se manifestou uma espécie de bloqueio pelo rompimento do que usualmente se faz em sala de aula e finalmente, é possível que o caráter dinâmico do ambiente tenha possibilitado a idéia do "martelinho".

Não se acredita que tomar como tema o termo "demonstração" seja a solução dos problemas relativos ao "como demonstrar", porém possivelmente levará ao "por que" e "para que" demonstrar.

Além disso, esta discussão poderá levar o futuro professor a concluir que o conceito de demonstração é essencialmente relativo ao público que se apresenta. Assim, se um dos objetivos primordiais da demonstração na Educação Matemática é o de explicar, isto pode ser viabilizado com diferentes níveis de rigor, de acordo com os diferentes públicos, não havendo pré-requisitos para o ensino da demonstração, a argumentação é uma habilidade que pode ser desenvolvida desde o início da vida escolar.

Em virtude da forma das entrevistas, que possibilitou o registro da parte oral e escrita, pudemos notar que o processo da escrita traz todo um potencial de reelaboração do processo dedutivo, chamando a atenção para a importância do trabalho com esta fase do processo. Acrescenta-se, ainda, que a escrita subentende um leitor, e, portanto, uma outra função da demonstração: o de comunicar resultados.

A utilização do software possibilita ao aluno uma ampliação de suas possibilidades para adentrar no processo de descoberta da matemática, gerando autonomia além de maior significatividade.

O ensino de demonstrações vem merecendo um certo destaque, dada a existência de grupos de trabalho, mesas redondas, palestras e seminários. Por outro lado, pouco se tem feito nas salas de Ensino Fundamental e Médio. O medo e a insegurança que os futuros professores sentem em "demonstrar", relatados também nesse trabalho, é possivelmente, uma das causas desta situação.

É possível que substituir a palavra "medo" pela palavra "prazer" ainda seja uma utopia, porém é o primeiro passo para romper com a barreira que aflige os estudantes de licenciatura, ocasionando o distanciamento do trabalho com demonstrações nos demais níveis de ensino.

Referências

ALMOULOUD, S. DEFI: outil informatique de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la démonstration au collège. **REPÈRES-IREM**, Paris, n. 9, pp. 35-60. octobre 1992.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, pp. 285-295.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOSI, A. **Dicionário de Filosofia**. 1ª Ed. São Paulo. Editora Mestre Jou, 1970.

BRASIL. Ministério da Educação. Secrtaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio:ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

DAVIS, P. , HERSH, R. **Experiência matemática**. 1ª ed. Tradução: F. Miguel Louro-Lisboa: Editora Gradiva, 1995.

GARNICA, A. V. M. Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. **Zetetiké**, São Paulo, v. 4, n. 5, pp. 7–28, 1996.

____________. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática**. Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, 1995. Tese de doutorado.

GERDES, P. , CHERINDA, M. . **Teoremas famosos da geometria**. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GOUVÊA, F. A. T. . **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental**. São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1998. Dissertação de mestrado.

HANNA, G. , JAHNKE, H. N. Proof and proving. **International Handbook of Mathematics Education**. Holanda: Academic Publishers, pp. 877–908, 1996.

JUNQUEIRA, M. Conjecturas e provas informais em Geometria com recurso a ferramentas computacionais. **Quadrante**, Lisboa, v. 2, n. 1, pp.63–78, 1993.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

PERELMAN, C. **Retóricas**. 1ª Ed. Tradução: M. Ermantina Galvão G. Pereira–São Paulo: Editora Martins Fontes, 1997.

POGORÉLOV A. V. . **Geometria Elemental**. Tradução: De Carlos Veja. Moscow, Mir, 1974.

PUTNAM, H. In: **Enciclopédia EINAUDI**. Editora Imprensa Nacional – Lisboa, 1988, pp. 112–128

RADFORD, L. La enseñanza de la demonstración: aspectos teóricos e práticos. **Educación Matemática**, v. 6, n. 3, p. 21—36, 1994.

Submetido em novembro de 2007

Aprovado em abril de 2008