Uma análise do pensamento e da linguagem algébrica expressos na produção escrita de alunos da escola básica

João Ricardo Viola dos Santos
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL
Doutorando em Educação Matemática, UNESP
jr.violasantos@gmail.com

Regina Luzia Corio de Buriasco
Professora, UEL
reginaburiasco@hasner.com.br

Resumo
O presente artigo apresenta um estudo da produção escrita de alunos da 4ª e 8ª séries[1] do Ensino Fundamental e da 3ª série[2] do Ensino Médio, na questão comum da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA-2002, a respeito do pensamento e da linguagem algébrica nela expressos. Algumas caracterizações do pensamento algébrico são discutidas e uma delas é apresentada para a análise da produção escrita encontrada. Em grande parte das produções há a presença do pensamento algébrico, e muitos alunos que utilizaram linguagem algébrica, resolveram a questão da maneira considerada correta. A análise da produção escrita se apresenta como alternativa para investigar os conhecimentos algébricos de alunos da Escola Básica.

Palavras-chave: Educação Algébrica; Pensamento Algébrico; Linguagem Algébrica; Produção Escrita; Avaliação da aprendizagem em Matemática.

An analysis of algebraic thinking and language express in students written works of basic school

Abstract
The present study analyzes Basic Education students' written work (4th year Elementary School students, 8th year Middle School students and 3rd year High School students) on a common question taken from the AVA-2002 (Paraná State Large-Scale Assessment-2002) Open-ended Questions Test, to investigate their use of algebraic thinking and language. Characterizations of algebraic thinking are discussed, and one was selected for the analysis of the written works. Results showed that many students made use of algebraic thinking, and many students, who used algebraic language, answered the question correctly. The analysis of students' written work is one alternative to investigate Basic Education students' knowledge of Algebra.

Keywords: Algebraic Education; Algebraic Thinking; Algebraic Language; Written Work; Assessment Process.

[1] A nomenclatura atual de algum modo corresponde a 5º a 9º anos da Educação Básica.
[2] A nomenclatura atual de algum modo corresponde a 12º ano da Educação Básica.

Introdução

O processo de desenvolvimento da álgebra como um instrumento matemático oriundo do estabelecimento de padrões e regularidades na resolução de problemas em processos de generalizações, desenvolvidos a partir da geometria e da aritmética, é ainda pouco trabalhado nas aulas de matemática da Educação Básica. Para muitos alunos, a álgebra escolar representa um divisor de águas entre ter ou não sucesso em matemática. Geralmente eles a vêem apenas como um conjunto de regras para manipulação de letras, não distinguindo quando estas são usadas como variáveis ou incógnitas, e, sobretudo, com pouquíssimo entendimento das idéias matemáticas envolvidas tanto em questões estruturais quanto procedimentais.

A álgebra tratada como um corpo axiomático estritamente simbólico mostra-se ao aluno como um *monstro monstruoso* (LINS, 2004), que aparece apenas nas aulas de matemática e que não segue as *regras da rua* (LINS e GIMENEZ, 1997). Esse tratamento descaracteriza seu potencial de se constituir como um conhecimento matemático a favor dos alunos, em suas vidas, e como uma ferramenta matemática dentro da própria matemática. Como afirma Rojano,

> provavelmente um dos erros mais antigos cometidos no ensino de álgebra é o de tentar comunicar aos estudantes, desde seu primeiro contato com o assunto, as qualidades e virtudes do domínio da sua sintaxe relativas à sua utilidade em modelar e resolver problemas (ROJANO, 1996, p. 55, tradução nossa).

Aulas que tratam de problemas que exigem estabelecimento de padrões matemáticos e, em casos particulares, do reconhecimento de regularidades nos conjuntos numéricos ou em figuras geométricas, de algum processo de generalização utilizando alguma linguagem algébrica[3] ainda são algo a ser instaurado nas práticas dos professores da Educação Básica. Por conseguinte, a perspectiva de propiciar ao aluno uma visão das idéias matemáticas que estão presentes, tanto na álgebra quanto na aritmética e na geometria, também não é freqüente nas práticas de professores da Educação Básica. Geralmente é apenas em meados da sexta série do Ensino Fundamental que aparecem as primeiras menções à álgebra escolar, em uma perspectiva estritamente mecânica, isoladas de outros conhecimentos matemáticos, aparentemente sem relação alguma com eles.

[3] Estamos entendendo por linguagem algébrica uma linguagem constituída por meio de uma notação simbólica na qual os símbolos representam generalizações de invariâncias, padrões, regularidades.

O presente trabalho tem por objetivo analisar a produção escrita de alunos, da 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, na questão comum da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA-2002[4], a respeito do pensamento e da linguagem algébrica expressos nessa produção.

A Educação Algébrica nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental

Autores (CARPENTER, FRANKE e LEVI 2003; SCHLIEMANN, BRIZUELLA 2004; BLANTON e KAPUT 2005; LINS e KAPUT 2004; CARRAHER, *et all*, 2006) têm sugerido a integração da aritmética com a álgebra já nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Suas pesquisas têm apontado que crianças desde os 9, 10 anos de idade, podem desenvolver o pensamento algébrico, utilizar símbolos para generalizar relações aritméticas ou padrões geométricos, bem como a noção algébrica para representar alguma relação. A idéia de tratar o conhecimento aritmético separado do algébrico, com o primeiro antecedendo o segundo, priva os alunos de utilizarem algumas formas de pensar sobre a matemática na resolução de problemas. Existem propriedades, estruturas e relações que são comuns tanto para a álgebra quanto para a aritmética e que podem ser desenvolvidas de forma integrada. Como bem enfatizam Lins e Kaput (2004) colocando uma pergunta e sua resposta: "Por que Álgebra [já nas primeiras séries]? Simplesmente porque nossos alunos merecem a chance para desenvolver ao máximo seu potencial (p. 64)", e, sendo assim, devemos desde muito cedo propiciar essa oportunidade.

Carpenter, Franke e Levi (2003), propondo a integração da aritmética com a álgebra nas séries iniciais do Ensino Fundamental, afirmam que os alunos podem "aprender aritmética de maneira produtiva de modo que esse conhecimento sirva de base para o aprendizado da álgebra (p. 137)". Assim, indicam algumas ações que podem ajudar os alunos dessas séries no desenvolvimento do raciocínio algébrico, dentre elas: envolver os alunos em discussões sobre o uso apropriado do sinal de igual, tanto no campo aritmético quanto no algébrico; encorajá-los a utilizar o pensamento relacional no trato de diferentes expressões numéricas; ajudá-los na construção de conjecturas matemáticas, suas representações simbólicas, e na justificação e prova de algumas delas, na construções de igualdades de múltiplas operações e nas relações de implicações tanto da aritmética quanto da álgebra (CARPENTER, FRANKE e LEVI, 2003). Para esses autores essas são as *grandes idéias* que estão na constituição tanto do conhecimento aritmético quanto do

---

4 AVA é o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar da Rede Estadual do Paraná.

algébrico. A questão principal se situa na forma como essa integração é realizada por meio de alguma abordagem da Educação Algébrica.

Os alunos trazem conhecimentos matemáticos antes de entrar na escola, e com eles fazem generalizações no seu processo de desenvolvimento cognitivo (BURIASCO, 1988). Valorizar o conhecimento que os alunos têm de fora da escola, assim como apresentar outros em uma negociação de significados produzidos, pode oportunizar aprendizagens para os alunos. Nesse processo o ponto chave parece estar na idéia da *legitimação* (LINS, 2001) das produções de significados de alunos e professores. A questão é sempre tentar explicitar o que os alunos estão entendendo sobre as notações, símbolos e entes matemáticos, para que se possa, se possível, “falar a mesma língua”[5], respeitando-a e valorizando-a, estabelecendo um espaço comunicativo. Assim, para a introdução do pensamento e da linguagem algébrica, inter-relacionadas com o conhecimento aritmético e também, com o geométrico, é necessário valorizar as maneiras com as quais os alunos representam suas expressões e engendram suas generalizações.

Brizuela e Shilemman (2004) introduziram notações algébricas no trabalho com alunos de 10 anos de idade por meio de 'caminhos espontâneos', utilizados para representar problemas verbais. Nesse estudo longitudinal, um terço dos 70 alunos participantes utilizou uma expressão algébrica para representar o problema. A valorização dos conhecimentos que os alunos trazem das suas realidades, e dos modos que eles próprios constroem para representar suas idéias matemáticas pode ser um dos pontos de partida para a introdução da álgebra nas séries iniciais.

Também Blantom e Kaput (2005) consideram que a integração do raciocínio algébrico desde as primeiras séries oferece uma alternativa para o desenvolvimento conceitual de uma mais profunda e mais complexa matemática, envolvendo as experiências dos alunos.

O estudo de Carraher *et all* (2006) com crianças das séries iniciais, indica que elas podem lidar com conceitos e usar notações algébricas para representar problemas abertos que envolvem o uso das estruturas aditivas. Tomando as operações como funções e os processos de generalização como o “coração” do raciocínio algébrico, seus estudos apresentam alguns exemplos para uma caracterização do ensino e da aprendizagem da Educação Algébrica já nas primeiras séries.

Na perspectiva desses autores, “a aritmética tem um caráter inerentemente algébrico no que diz respeito a casos gerais e estruturas que podem ser sucintamente apreendidas com a notação algébrica (CARRAHER; *et all*, 2006, p. 89, tradução nossa)”.

5 Lins e Gimenez (1997) exemplificam como justificações diferentes podem ser produzidas para a mesma equação na sala de aula da Professora Tânia e seu esperto aluno, Robertinho.

A introdução de uma Educação Algébrica para alunos das primeiras séries do Ensino Fundamental pode ter um impacto significativo sobre o currículo das últimas séries, por ao menos duas razões, como bem colocam Lins e Kaput (2004):

> a primeira, é que tópicos que os estudantes tradicionalmente encontrariam nas últimas séries já teriam sido estudados. Isso não significa que esses tópicos teriam sido totalmente explorados, mas sim que nas últimas séries poderiam ser feitos estudos adicionais a eles em lugar de uma introdução. Isso pode requerer grandes mudanças no currículo. A segunda, é que é razoável supor que a exposição de jovens estudantes à álgebra, ainda que a somente alguns aspectos dela, é certeza de mudar, em muitos sentidos, seu pensamento sobre outros tópicos (p. 63, tradução nossa).

Não podemos ficar com a ilusão de que alunos das séries iniciais não são capazes de aprender conteúdos matemáticos que tradicionalmente são oportunizados apenas em séries mais avançadas. A álgebra não deveria ser introduzida apenas na sexta série se, como mostram as pesquisas, alunos de 10 anos já conseguem resolver equações lineares. Entretanto começar o estudo de álgebra mais 'cedo' tem como conseqüência alguma reformulação do currículo da Escola Básica, que infelizmente, privilegia conteúdos obsoletos, repetitivos em detrimento de explorar as idéias matemáticas que permeiam as diversas áreas – álgebra, aritmética, geometria, entre outras. Assim, implantar a Educação Algébrica já nas primeiras séries do Ensino Fundamental é também uma questão de cunho político.

Uma caracterização para o pensamento algébrico

Ancorado em uma tradição pedagógica que implica uma linguagem algébrica para sua existência, as manifestações do pensamento algébrico são pouco discutidas nas salas de aula. Essa maneira específica de organizar, modelar, pensar e assim constituir contextos, é geralmente esquecida como conteúdo matemático a ser trabalhado pela grande maioria dos professores. Não menos importante que qualquer discussão sobre outro conteúdo matemático, as manifestações do pensamento algébrico e suas caracterizações, bem como detalhamentos de quais atividades podem oferecer oportunidades para o seu desenvolvimento, devem estar presentes nas pautas de pesquisa e, também, na prática em sala de aula.

Apresentaremos a seguir algumas caracterizações do pensamento algébrico presentes na literatura consultada e, a partir disso, constituiremos uma, que consideramos apropriada para nossa análise da produção escrita dos alunos.

Lins (1992) apresenta uma caracterização para o pensamento algébrico, e, para ele, pensar algebricamente é,

(i) pensar aritmeticamente, e
(ii) pensar internamente, e
(iii) pensar analiticamente (LINS, 1992, p. 12, nossa tradução).

De imediato essa caracterização de Lins nos diz que para os alunos pensarem algebricamente não é necessário terem alguma notação simbólica, literal ou não. Para esse autor, o pensamento algébrico é um modo, entre outros, de *produzir significado* para a álgebra (LINS, 1994). Ao afirmar que pensar algebricamente é *pensar aritmeticamente*, ele nos remete "à idéia de modelar com os números" (LINS, 1992, p.12). *Pensar aritmeticamente* significa que os objetos com os quais lidamos são exclusivamente os números, operações aritméticas e uma relação de igualdade (LINS, 1994). Parece então, com isso, que é no bojo da linguagem aritmética que o pensamento algébrico emerge em suas primeiras características.

Em relação a *pensar internamente*, Lins (1992) deixa claro que ao se pensar algebricamente está se tomando por referência as propriedades das operações. Significa que as propriedades destes objetos, que sustentam a ação dos alunos, não fazem referência a nada, fora do domínio desses objetos (LINS, 1994). Com isso se coloca a existência de modelos não-aritméticos como outros modos de produzir significado (LINS, 1992).

Quanto a segunda característica do pensamento algébrico proposta por Lins(1992) temos que "[...]o *internalismo* /.../ é, precisamente, dirigido à possibilidade, de distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações aritméticas, e não pela manipulação de modelos não-aritméticos" (p.14, tradução nossa).

Já a última característica do pensamento algébrico, *pensar analiticamente* serve para caracterizá-lo "como um método de procura das verdades e que no pensamento algébrico o desconhecido é tratado como conhecido (LINS, 1992, p.16)". Significa que os números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos; "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados" (LINS, 1994).

Essa caracterização apresentada por Lins (1992, 1994) nos remete a algumas implicações. A primeira é que o pensamento algébrico não necessita somente acontecer em um contexto de notação simbólica, sendo literal ou não; a segunda é que, nos contextos do pensamento algébrico, os números podem ser entendidos somente simbolicamente; a terceira implicação é que essa caracterização oferece um quadro teórico que possibilita um entendimento das soluções dos alunos; e uma outra implicação diz respeito a um olhar para o pensamento algébrico como mais um modo de pensamento, tão importante quanto o pensamento geométrico, combinatório (LINS, 1992).

Concernente a essa caracterização, se apresenta uma valorização da aritmética para o desenvolvimento do pensamento algébrico e que o pensar algebricamente é apenas uma, entre outras formas de pensar. Acreditamos que investigar essa maneira de pensar é de suma importância para caracterizar a atividade matemática dos alunos.

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), em sua caracterização do pensamento algébrico, apontam como elementos dele a "[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste a outros que não variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença de processos de generalização" (p. 87).

Esses mesmos autores definem três fases para o desenvolvimento do pensamento algébrico: a *pré-algébrica*, em que a aluno usa casualmente um elemento considerado algébrico, mas ainda não o concebe como um número generalizado; a fase de *transição*, na qual o aluno concebe a existência de um número qualquer, fazendo algumas generalizações usando ou não símbolos, e, a do *pensamento algébrico mais desenvolvido*, em que o aluno concebe a existência de grandezas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz de expressar e operar com elas (FIORENTINI, *et all*, 2005). Para esses autores, o desenvolvimento do pensamento algébrico está ligado à apropriação da linguagem algébrica, entretanto ela não determina o desenvolvimento, apenas potencializa.

Essas características do desenvolvimento gradativo do pensamento algébrico podem se tornar visíveis com a utilização de várias atividades em vários momentos dos alunos na escola. Visto que o nosso material para estudo é a produção escrita de alunos em uma mesma questão, em três séries distintas, poderemos encontrar apenas algumas marcas desse tipo de conhecimento.

Em seus estudos, Bell (1996) indica como aspectos identificáveis do pensamento algébrico

- a resolução de complexos problemas aritméticos;
- a codificação e o uso de métodos sistemáticos gerais para diferentes tipos de problemas;
- a descoberta e a prova de generalizações numéricas ou

geométricas;

- o reconhecimento e a utilização de propriedades gerais do sistema numérico e suas operações;
- o reconhecimento, nomeação, e o uso de funções padrões, por exemplo, y = kx2;
- a utilização de uma linguagem simbólica manipulada para ajudar na realização de uma tarefa.

Percebemos alguma convergência entre essas três caracterizações apresentadas para o pensamento algébrico, em razão das primeiras características do pensamento algébrico estar ligadas ao campo da aritmética. Esse é um ponto importante, pois, como estamos defendendo uma Educação Algébrica desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, caracterizar o pensamento algébrico no campo da aritmética nos permite pensar no seu desenvolvimento desde muito cedo nas crianças. É possível ver um alto nível de desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, sem que tenha sido utilizada uma linguagem usualmente "dita" algébrica.

Lins e Kaput (2004) apontam duas características chaves para o pensamento algébrico: "ele envolve usualmente, como tentativa isolada, raciocínio baseado nas formas de generalizações sintaticamente estruturadas, incluindo ações sintática e semanticamente guiadas" (p. 48, tradução nossa).

Lins e Gimenez (1996) definem a atividade algébrica e não o pensamento algébrico. Para eles, essa atividade consiste "no processo de produção de significado para álgebra", sendo a álgebra, para eles, um "conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade" (p. 137). Em relação a esse processo de produção de significados, para esses autores o pensamento algébrico é uma maneira, entre outras, de produzir significado para a álgebra.

Também Blantom e Kaput (2005) e Carraher *et all* (2006) não caracterizam o pensamento algébrico, mas o raciocínio algébrico. Blantom e Kaput (2005), tomam o raciocínio algébrico como um processo no qual os alunos generalizam idéias matemáticas de um conjunto particular de casos, estabelecem generalizações mediante o discurso de argumentação, e, expressam-nas, ampliando as maneiras formais de fazê-lo. Para Carraher *et all* (2006), o raciocínio algébrico pode tomar várias formas, incluindo:

> a) o uso da aritmética como um domínio pra expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); b) generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); c) modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações, e; generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações (CARRAHER *et all*, 2006, p. nossa tradução).

Esses autores estão mais ligados ao desenvolvimento da atividade algébrica como um todo, ou seja, as ações realizadas pelos alunos em relação ao aprendizado da álgebra e o seu uso nas diversas situações, uma vez que enfatizam todo o processo da atividade algébrica, desde as primeiras características do pensamento algébrico até a utilização de uma linguagem simbólica para estabelecer algumas generalizações.

Moura e Souza (2005), em um estudo sobre o lógico-histórico da Álgebra simbólica e não simbólica, listam alguns elementos, historicamente construídos, que constituem os nexos conceituais do pensamento algébrico: o conceito de fluência, o de variável e o de campo de variação. Essa caracterização do pensamento algébrico não se assemelha às outras que apresentamos anteriormente. Como as próprias autoras afirmam, ela abarca alguns elementos primários da dinâmica do pensamento humano (MOURA e SOUZA, 2005):

> [...] queremos encontrar regularidades nos movimentos da vida para que possamos elaborar generalizações. Queremos criar fórmulas gerais para tentarmos compreender os diversos movimentos do mundo. Só conseguimos elaborar essas fórmulas quando conseguimos apreender movimentos regulares que se apresentam nos fenômenos da vida (p. 33-34).

Tomando por base as caracterizações apresentadas para o pensamento ou raciocínio algébrico, e para a atividade algébrica, constituímos uma que nos permitiu reconhecer na produção escrita dos alunos, que é o objeto deste estudo, algumas marcas do pensamento algébrico.

Caracterizamos o *pensamento algébrico* pela expressão de um processo que envolva alguma relação entre *estruturas aritméticas* por meio de ações sintáticas, que sigam regras procedimentais e formais, e, semânticas, que atribuam algum sentido lógico para a relação dessas estruturas. Por *estrutura aritmética* estamos entendendo o resultado da construção do procedimento utilizado na realização de uma operação por meio de um enunciado.

Não apresentamos nada de novo, visto que essa caracterização foi construída a partir das apresentadas anteriormente. Entretanto, visto que nossos dados se constituem da produção escrita de alunos de três séries, acreditamos que poderemos, mais facilmente, analisar o pensamento algébrico desses alunos por meio dessa caracterização.

Estratégia Metodológica

A estratégia metodológica adotada, neste trabalho, foi desenvolvida segundo uma perspectiva qualitativa na qual o modo de investigação se pautou em uma abordagem interpretativa baseada numa análise textual discursiva (Moraes, 2003; Moraes e Galiazzi, 2006). De acordo com Moraes (2003) a análise textual discursiva

> [...] pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma seqüência recursiva de três componentes: desconstrução do *corpus*, **a unitarização**, o estabelecimento de relações entre os elementos unitários, **a categorização**, e o **captar do novo emergente** em que nova compreensão é comunicada e validada (p.192; negrito nosso).

Tivemos a intenção de buscar um conhecimento do particular, com certa profundidade na sua complexidade. Analisamos uma amostra de 147 provas da Prova de Questões Abertas de Matemática, AVA-2002, contendo a produção escrita dos alunos na questão comum às três séries avaliadas – da 4ª série (50 alunos) e 8ª série (53 alunos) do Ensino Fundamental, e, 3ª série (44 alunos) do Ensino Médio.

Nossa análise

Apresentaremos, a seguir, os agrupamentos do pensamento algébrico expresso na produção escrita dos alunos, segundo a caracterização adotada. Por meio desta não é preciso ter uma notação simbólica nas produções escritas para identificarmos algum pensamento algébrico. É claro, que no decorrer do seu desenvolvimento, uma linguagem simbólica potencializa esse modo de pensamento, como é descrito em (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIN, 1993).

A questão estudada

> *Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?*

oferece um contexto para que os alunos estabeleçam algumas relações entre estruturas aritméticas e assim encontrar uma resposta. Para resolvê-la, da maneira considerada correta, é necessário que eles identifiquem a idéia de recorrência por meio das informações da segunda frase do enunciado, relacionem com as da primeira e apresentem uma resposta. Assim, foi possível identificar o pensamento algébrico nas produções escritas dos alunos, na medida em que as inter-relações entre estruturas aritméticas foram expressas, tendo a idéia de recorrência presente. Apresentamos, a seguir, alguns exemplos para ilustrar essas considerações sobre o pensamento algébrico.

Na tabela a seguir temos os agrupamentos concernentes ao pensamento algébrico reconhecido na produção escrita dos alunos das três séries, a partir do que teceremos nossas considerações.

Tabela - Níveis de Pensamento Algébrico encontrado nas provas das três séries.

Série / Níveis	4ª Série E.F.	8ª Série E.F.	3ª Série E.M.	TOTAL
G1 – Expressa uma estrutura aritmética para resolver a questão.	24	11	4	**39**
G2 – Expressa uma relação entre estruturas aritméticas para resolver a questão.	19	17	7	**43**
G3 – Expressa relações entre estruturas aritméticas para resolver a questão, nas quais está presente a idéia de recorrência.	7	17	23	**47**
G4 – Expressa relações entre estruturas aritméticas utilizando alguma linguagem algébrica para resolver a questão.	0	2	1	**3**
G5 – Expressa relações utilizando uma equação para resolver a questão.	0	6	9	**15**

No primeiro grupo, G1, em um total de 39 provas, consideramos que elas não se caracterizam por apresentar pensamento algébrico, ou seja, uma relação entre estruturas aritméticas. Nessas provas os alunos, geralmente, utilizaram o algoritmo da divisão para encontrar o número de telegramas que, acreditam, o carteiro entregou nos 5 dias. Do contexto do enunciado da questão, o aluno identifica uma estrutura - o algoritmo da divisão - e por meio dela, apresenta uma resposta.

Entretanto essa ação, tanto sintática quanto semântica, origina-se apenas de uma interpretação da primeira frase do problema. Não há registros de uma inter-relação de interpretações e estruturas aritméticas nesse grupo, e por isso não se caracteriza a presença do pensamento algébrico.

Nesse grupo estão também as provas nas quais os alunos operaram arbitrariamente dados da questão, por meio de uma estrutura aritmética. Nessas não conseguimos estabelecer uma ação semântica, a não ser a de operar com dados encontrados no enunciado da questão.

Com o aumento da escolaridade, o número de provas do grupo 1 diminui consideravelmente passando de 24 provas na 4ª série do Ensino Fundamental; para 11 na 8ª série do Ensino Fundamental e 4 na 3ª série do Ensino Médio.

No grupo G2, estão 43 provas nas quais já foi possível caracterizar algum pensamento algébrico. Encontramos nas resoluções dessas provas uma relação entre estruturas aritméticas, por meio de ações sintáticas e semânticas e interpretações de informações contidas nas três frases da questão. Geralmente nessas provas, os alunos construíram uma estrutura aritmética oriunda de informações da primeira frase, utilizaram o resultado do primeiro procedimento para construir outro, oriundo de alguma interpretação da segunda frase, e apresentaram o resultado desse último como resposta da questão. Por exemplo:

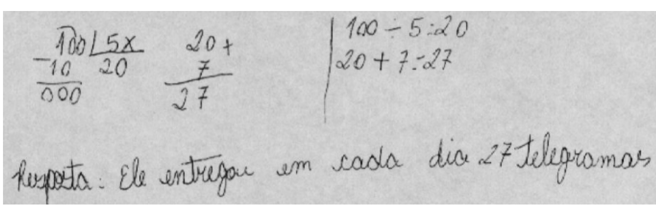


Figura 1 – Resolução presente na prova 4CO4009

Nesse grupo também estão algumas resoluções nas quais o número de telegramas entregues em cada dia foi considerado diferente. Nelas, os alunos expressaram relações entre o número de telegramas de cada dia, por meio de alguma interpretação das informações da segunda frase, como por exemplo:

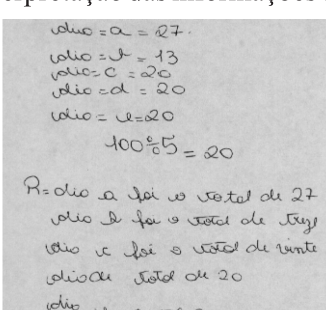


Figura 2 – Resolução presente na prova 8CO3028

Nessas provas é possível notar que o tipo de estrutura aritmética não se caracteriza apenas por um algoritmo de alguma operação, mas sim por um conjunto de relações entre o número de telegramas entregues em cada dia.

No grupo G3 temos 47 provas que contêm algumas relações aritméticas nas quais estão presentes a idéia de recorrência. Em relação ao contexto que nossa questão oferece para o estabelecimento dessas relações, a expressão da idéia de recorrência, caracteriza o pensamento algébrico dos alunos de uma maneira, digamos, mais sofisticada.

O número de provas nesse grupo aumenta com a escolaridade, sendo 7 provas na 4ª série, 17 na 8ª série, e, 23 provas na 3ª série do Ensino Médio. Este é o grupo que tem o maior número de provas.

Na prova 3LO7038 a questão estudada estão registradas várias tentativas para encontrar o número de telegramas entregues em cada dia pelo carteiro. Em todas elas, o aluno registrava sua tentativa e verificava se o total de telegramas resultava em 100. Percebemos, por meio da expressão do seu processo de relação de estruturas aritméticas, que, para esse aluno, o número 7 é uma invariância, que o carteiro entregou 7 a mais a partir do primeiro dia, resultando um total de 100 telegramas nos cinco dias.

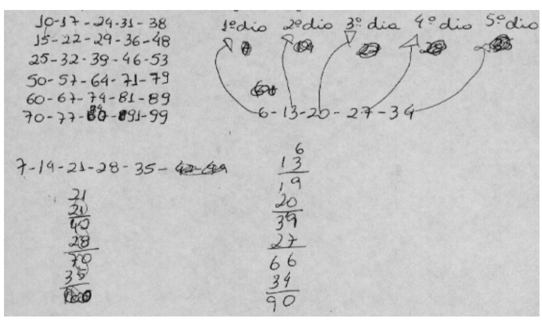


Figura 3 – Resolução presente na prova 3LO7038

Em outra prova desse grupo, 3CO3113, o aluno fez uma interpretação da primeira frase, que resultou na divisão de 100 por 5. Da segunda frase ele retira a informação de que deve aumentar 7 telegramas a cada dia, porém, começando já no primeiro dia. Ele expressa relações entre estruturas aritméticas e também evidencia o número de telegramas que está aumentando a cada dia. Nessa prova, entendemos que o aluno explicita um processo no qual ele encontrou uma invariância.

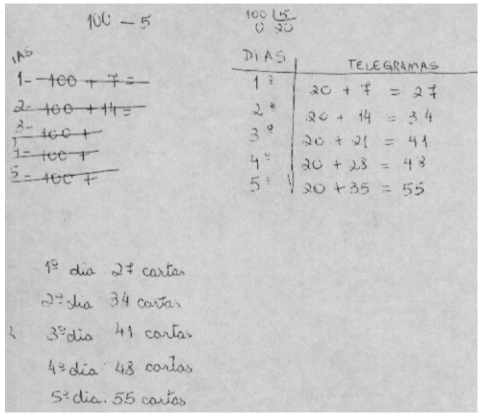


Figura 4 – Resolução presente na prova 3CO3113

A resolução presente na prova 3CO1023 desse mesmo grupo, expressa e coloca em evidência o número de telegramas que aumenta a partir do primeiro dia. Apesar de não utilizar uma linguagem simbólica, percebemos que o número 7 se comporta como uma regularidade, ou seja, algo que é comum para todos os dias, a partir do primeiro.

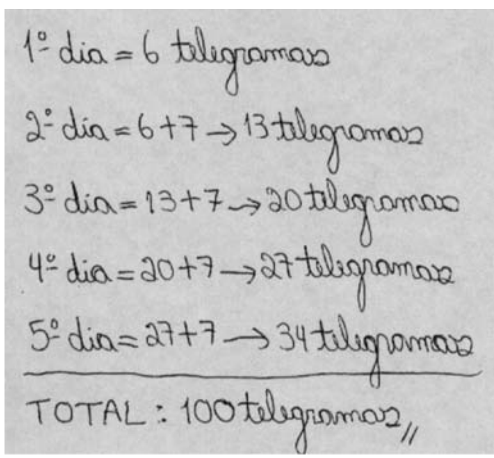


Figura 5 – Resolução presente na prova 3CO1023

Um último exemplo, aqui apresentado, para caracterizar o grupo G3 é a prova 8LO4124, na qual o aluno resolve a questão por meio de uma estratégia aritmética direcionada[6]. Por meio de ações sintáticas e semânticas, encontra o número de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia. Divide 100 por 5 e subtrai 14 desse resultado encontrando o número 6.

[6] Estamos chamando de estratégia aritmética direcionada, neste trabalho, aquela na qual o aluno parece saber quais procedimentos deve utilizar para obter a resposta da questão. Esses procedimentos são utilizados de uma maneira encadeada, sistemática e lógica, possivelmente por meio de um raciocínio abdutivo, considerado aqui como aquele que envolve um "chute", mas com algum conhecimento de causa.

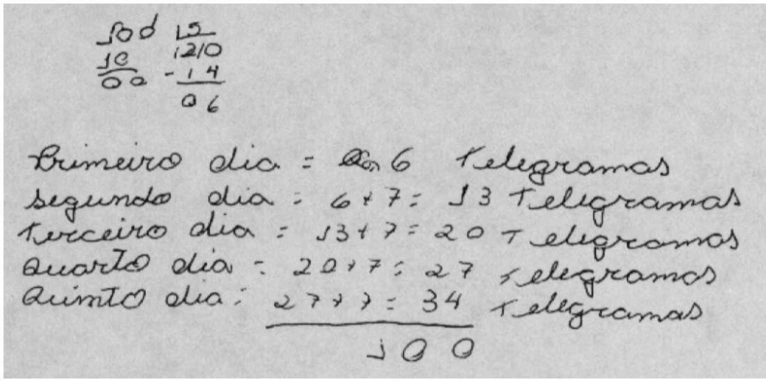


Figura 6 – Resolução presente na prova 8LO4124

No grupo G4 estão apenas 3 provas que apresentam já uma linguagem algébrica. Nesse grupo podemos inferir que o pensamento algébrico já está bem desenvolvido, pois eles já encontram uma regularidade e estabelecem uma generalização com o uso de uma linguagem simbólica para representar essas duas ações. Na prova 8LO8161 percebemos que o aluno utiliza a notação simbólica para auxiliá-lo a encontrar o valor de telegramas que o carteiro entregou em cada dia. O desconhecido para ele é tratado como conhecido, por meio da notação simbólica.

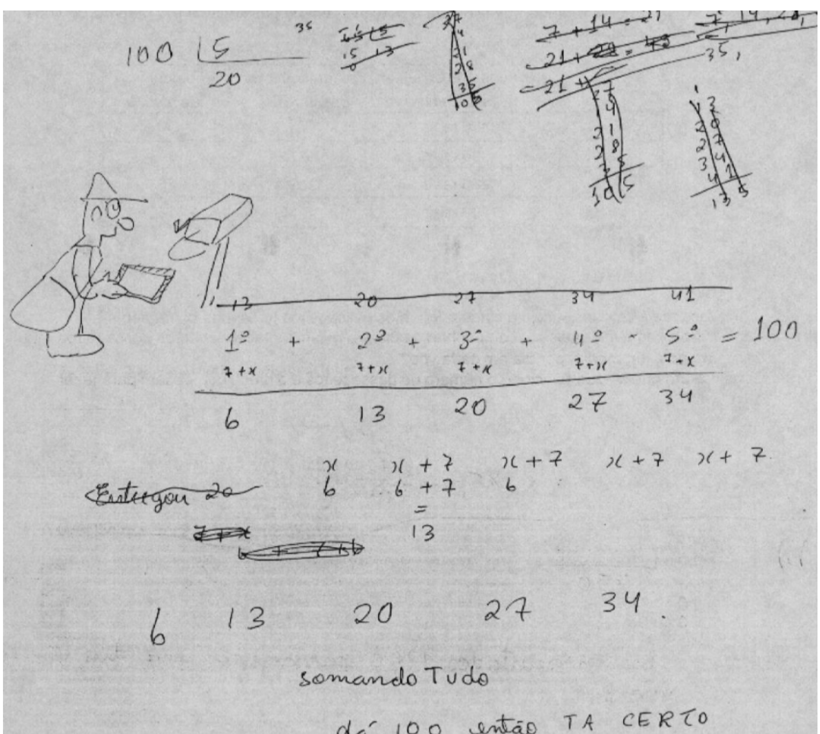
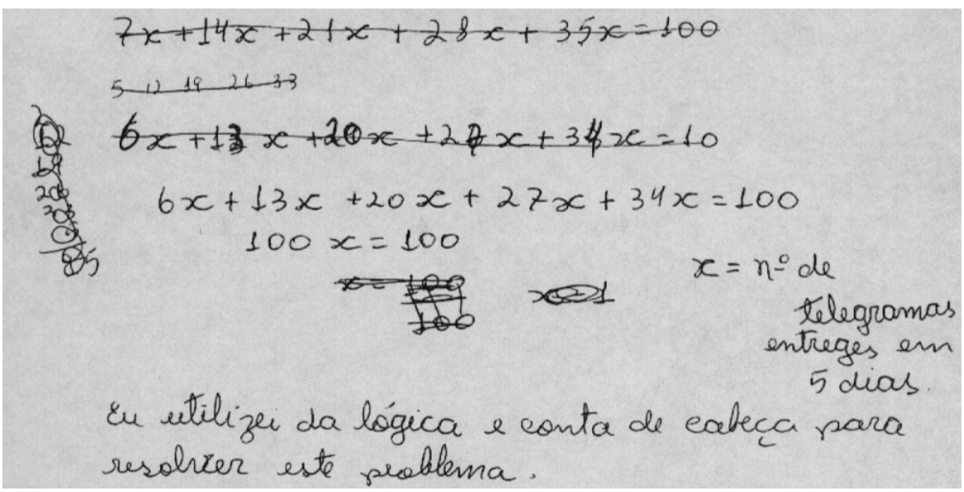


Figura 7 – Resolução presente na prova 8LO8161

Nesse grupo a linguagem algébrica está presente nas relações entre as estruturas aritméticas, ou seja, os alunos usam os símbolos para representar algumas de suas ações na resolução da questão.

Temos uma prova em que o aluno começa a equacionar os dados do problema, de uma maneira aparentemente incorreta, mas pára afirmando: *Não consegui usar a fórmula, fui chutando o n° de cartas pro primeiro dia até acertar p/ dar 100 telegramas.* Notamos, por meio dessa explicação, que para esse aluno a equação se mostra como uma 'fórmula' que pode ser aplicada em alguns casos. Provavelmente, ele domine questões operacionais da resolução de equações, entretanto encontra dificuldade em usar esse conhecimento para traduzir o enunciado do problema para linguagem matemática simbólica, ou seja, seu domínio sobre a resolução de uma equação não chega a permitir o seu uso enquanto ferramenta para resolver um problema que a envolva.



$\cancel{7x+14x+21x+28x+35x=100}$

$\cancel{5 \quad 12 \quad 19 \quad 26 \quad 33}$

$\cancel{6x+13x+20x+27x+34x=10}$

$6x+13x+20x+27x+34x=100$

$100x=100$

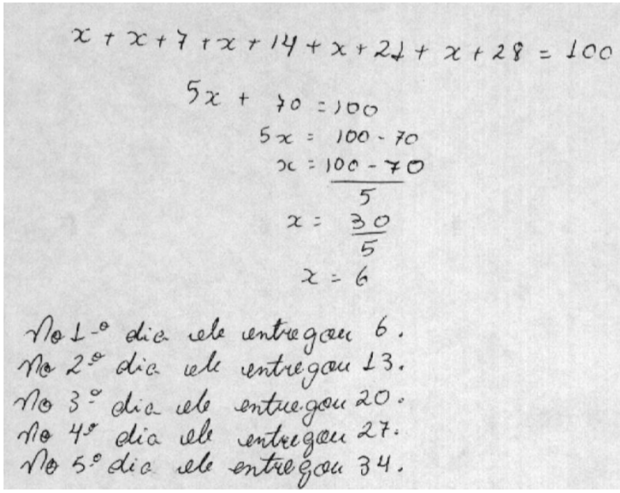
$x=1$

x = nº de telegramas entregues em 5 dias.

Eu utilizei da lógica e conta de cabeça para resolver este problema.

Figura 8 – Resolução presente na prova 3LO9046

O último grupo, G5, contém 15 provas nas quais os alunos utilizam uma equação como ferramenta para resolver a questão. Nesse grupo os alunos mostram ter domínio da manipulação da linguagem algébrica e da aplicação de uma equação. O pensamento algébrico dos alunos nessas provas parece estar bem desenvolvido, pois expressam relações entre as estruturas aritméticas e usam regras da linguagem algébrica para resolver a questão.



$x + x+7 + x+14 + x+21 + x+28 = 100$

$5x + 70 = 100$

$5x = 100 - 70$

$x = \frac{100-70}{5}$

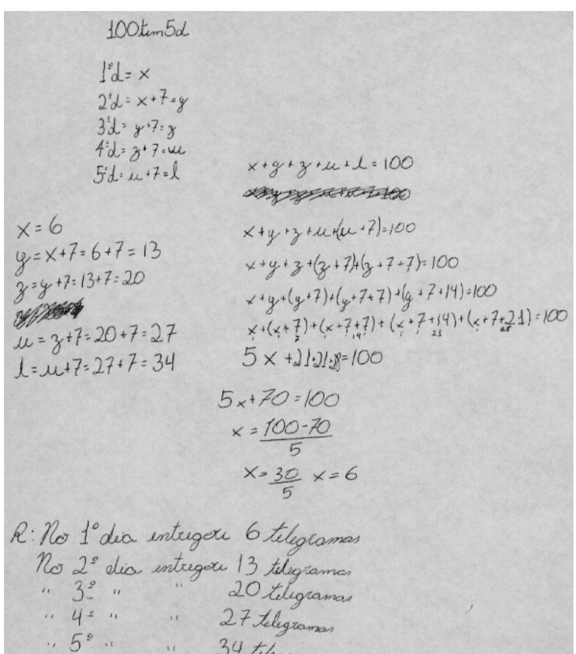
$x = \frac{30}{5}$

$x = 6$

No 1º dia ele entregou 6.
No 2º dia ele entregou 13.
No 3º dia ele entregou 20.
No 4º dia ele entregou 27.
No 5º dia ele entregou 34.

Figura 9 – Resolução presente na prova 8CO1009

Temos uma prova em que o aluno apresenta uma resolução utilizando uma incógnita diferente para as quantidades entregues em cada dia. Inferimos que a razão disso é ele ter tomado como importante letras diferentes representando dias diferentes. Foi possível perceber, que esse aluno tem um domínio de aspectos operacionais das equações e consciência do que está fazendo em sua resolução.



100 tem 5d

1ºd = x
2ºd = x+7 = y
3ºd = y+7 = z
4ºd = z+7 = u
5ºd = u+7 = l

$x+y+z+u+l = 100$

$x+y+z+u+(u+7)=100$

$x+y+z+(z+7)+(z+7+7)=100$

$x+y+(y+7)+(y+7+7)+(y+7+14)=100$

$x+(x+7)+(x+7+7)+(x+7+14)+(x+7+21)=100$

$5x+21+21+28=100$

$5x+70=100$

$x=\frac{100-70}{5}$

$x=\frac{30}{5}$ $x=6$

$x=6$
$y=x+7=6+7=13$
$z=y+7=13+7=20$
$u=z+7=20+7=27$
$l=u+7=27+7=34$

R: No 1º dia entregou 6 telegramas
No 2º dia entregou 13 telegramas
" 3º " " 20 telegramas
" 4º " " 27 telegramas
" 5º " " 34 telegramas

Figura 10 – Resolução presente na prova 3CO3091

Esse grupo também contém 2 provas nas quais os alunos montaram uma equação com os dados do problema cuja solução é o número de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia. Com isso, responderam a questão informando que o carteiro entregou 6 telegramas.

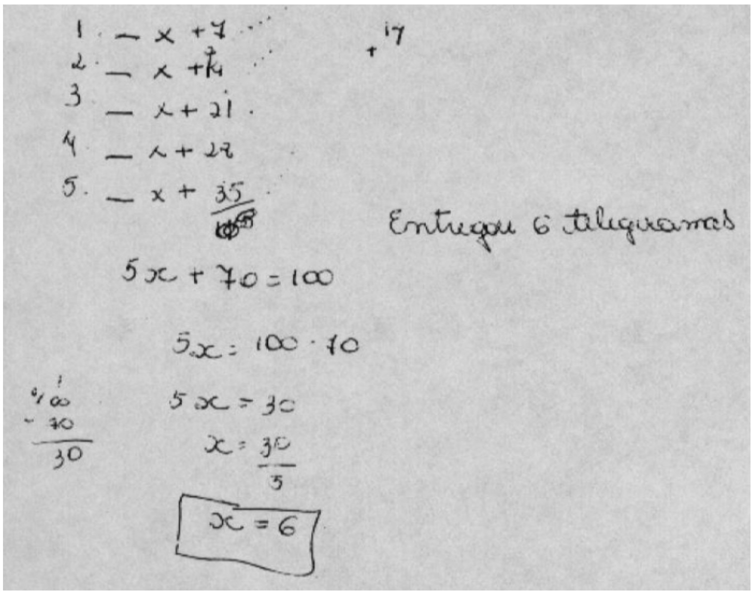


Figura 11 – Resolução presente na prova 3CO3069

Inferimos que para esses alunos a solução da equação é a resposta da questão e assim por isso, responderam que o carteiro entregou 6 telegramas.

Visto essas considerações em relação ao pensamento algébrico, expresso na produção escrita dos alunos, concluímos que 73% dos alunos fazem uso dele para resolver o problema. No decorrer das séries a relação entre as estruturas aritméticas na qual está presente a idéia de recorrência e alguma linguagem algébrica aparecem na produção escrita dos alunos. Ressaltamos que grande parte dos alunos, que resolveram a questão da maneira considerada correta, elaborou uma estratégia que se enquadra nesse nível do pensamento algébrico.

Não tivemos um grande número de provas tanto na 8ª série do Ensino Fundamental, como na 3ª série do Ensino Médio, com uma produção escrita que tivesse registros de conhecimentos algébricos como esperávamos. Entretanto não podemos deixar de ressaltar que não é porque o aluno não utilizou um determinado conhecimento para resolver um problema que ele o desconhece. Como mostramos, nem sempre os alunos utilizam uma estratégia considerada mais sofisticada, nesse caso a equação, em detrimento de uma menos sofisticada, tentativa e erro, para resolver um problema que pode ser resolvido por essa última. Uma prática de trabalhar com o conhecimento algébrico tomando-o também como uma estratégia, um modo de pensar e resolver os mais diversos problemas, de modo a que ele permeie todo o currículo, pode ser frutífera e deve estar em pauta na prática dos professores.

Algumas considerações

Em nosso estudo, identificamos a presença do pensamento algébrico em várias produções escritas dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental, sendo que ele vai se desenvolvendo ao longo das séries e também é potencializado pelo uso de uma linguagem simbólica. Assim, parece não existir motivos outros que não sejam de cunho político e de tradição pedagógica, para não começarmos a pensar em colocar nos currículos tópicos que tratam do desenvolvimento do pensamento e da atividade algébrica.

Ao investigarmos o pensamento algébrico que os alunos mostram ter por meio da sua produção escrita, encontramos de acordo com a caracterização utilizada, que 26 das 50 provas dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental mostram indicativos da existência desse tipo de pensamento. Dessas 26 provas, 19 estão categorizadas no primeiro nível, que é o de expressar uma relação entre estruturas aritméticas para resolver a questão, e 7 estão no segundo nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas para resolvê-la, nas quais está presente a idéia de recorrência. Para o terceiro nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas utilizando alguma linguagem algébrica, e o quarto, que é o de expressar relações utilizando uma equação, não temos prova alguma dessa série. Na 8ª série do Ensino Fundamental, o número de provas dos alunos que mostram ter o pensamento algébrico é de 42, sendo 17 no primeiro nível, 17 no segundo nível, 2 no terceiro nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas utilizando alguma linguagem algébrica, e, 6 no quarto e último nível considerado, que é o de expressar relações utilizando uma equação. Com relação à 3ª série do Ensino Médio temos 40 produções escritas que demonstram algum pensamento algébrico. Dessas provas 7 estão no primeiro nível, 23 no segundo, 1 no terceiro e 9 no último nível. Notamos que 47 dos nossos alunos, nas três séries, se encontram no segundo nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas para resolver a questão, nas quais está presente a idéia de recorrência.

A caracterização adotada para investigarmos o pensamento algébrico expresso nas produções escritas dos alunos se mostrou eficiente e de acordo com a abordagem de iniciar os trabalhos da Educação Algébrica por meio da Resolução de Problemas.

A análise da produção escrita se apresenta como uma possibilidade para investigar os conhecimentos algébricos de alunos da Escola Básica, como também uma prática para os professores como uma alternativa para terem conhecimentos detalhados sobre a atividade algébrica de seus alunos. Esse trabalho apresenta contextos e indicações para a implantação dessa prática no cotidiano dos professores.

Referências

BELL, A. Algebraic Thought an the Role of a Manipulative Symbolic Language. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching. Boston: Kluwer, 1996, p. 151-154.

BLANTON, M. L. e KAPUT, J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p. 412-443, 2005.

BRIZUELLA, B.; SCHLIEMNN, A.; Ten-year-old Students Solving Linear Equations. **For the Learning Mathematics**, v.24, n. 2 pp. 33-40, 2004.

BURIASCO, R. L. C. de. **Matemática de fora e de Dentro da Escola: do Bloqueio a Transição**. 1988. Rio Claro. Dissertação. Universidade Estadual Paulista (UNESP).

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L. e LEVI, L. **Thinking Mathematically**: Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CARRAHER, D. W.; et all. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education** n.37, v.2, p. 87-115, 2006.

CHARBONNEAU, L. From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to geometry. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Boston: Kluwer, 1996, p. 15-38.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, Unicamp, Campinas, 1997.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. ; MIGUEL, A. . Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1, p. 78-91 1993.

FIORENTINI, D.; et all. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2005, Porto. **Anais...**v.1. p. 1-13.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. PhD Thesis. University of Nothing , UK.

LINS, R. C. O Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**, v. 1, n. 7, p. 29-39, 1994.

LINS, R. C. The production of Meaning for Algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In: R. Sutherland; T. Rojano; A. Bell; R.Lins. (Org.). **Perspectives on School Algebra**. Dordrecht: Kluwer , 2001, p.37-60.

LINS, R.C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. BICUDO, M. A. V. e BORBA, M. C. (eds). São Paulo: Cortez, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Editora Papirus, 1997.

LINS, R. C. ; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: Kaye Stacey; Helen Chick;. (Org.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2004, p. 47-70.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-Histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares. **Zetetike**. v.13, n.24, p.11-45, 2005.

RADFORD, L. The Roles of Geometry and Arithmetic in the development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic perspective. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Boston: Kluwer, 1996, p. 39-54.

___________. The Historical Origens of Algebraic Thinking. In: R. Sutherland; T. Rojano; A. Bell; R.Lins. (Org.). **Perspectives on School Algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2001, p. 13-36.

ROJANO, T. The role of problems and problem solving in the development of algebra. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Boston: Kluwer, 1996, p. 55-64.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina.

Submetido em dezembro de 2007
Aprovado em março de 2008