Discutindo as dificuldades dos alunos na visualização gráfica da solução da equação de uma reta

Rachel Bergman Fonte[1]
Colégio Pedro II – RJ
Departamento de Matemática, PUC-Rio
rachel.fonte@infolink.com.br

Resumo

As concepções errôneas e dificuldades dos alunos relacionadas ao conceito de função e a não compreensão do conceito de "solução de uma equação" podem fazer com que o aluno não "enxergue" tal solução no gráfico correspondente. Esse artigo apresenta e discute a análise de uma pesquisa feita com alunos do Ensino Médio nos Estados Unidos, com o objetivo de examinar suas habilidades em usar um aspecto particular da *Conexão Cartesiana*: as coordenadas de qualquer ponto sobre uma reta satisfazem a equação da reta. Foram feitas entrevistas com professores do Ensino Médio no Rio de Janeiro e a mesma questão foi proposta. A análise dessas entrevistas também será aqui apresentada e discutida.

Palavras-chave: funções, contextos algébrico e gráfico, concepções errôneas, solução de uma equação.

Discussing the difficulties of students in the graphic visualization of the solution of a linear equation

Abstract

The erroneous concepts and difficulties faced by students regarding the concept of function and the misunderstanding of the concept of "solution of an equation" may cause the students not to find out this solution in the corresponding graph. This article presents and discusses the analysis of a survey with high school students in the United States, with the aim of examining their ability to use a particular aspect of the *Cartesian Connection*: the coordinates of any point on a straight line satisfy its equation. Interviews were conducted with high school teachers in Rio de Janeiro and the same question was proposed. The analysis of these interviews will also be presented and discussed here.

Keywords: functions, algebraic and graphical contexts, erroneous concepts, solution of an equation.

Introdução

A idéia da geometria analítica moderna concebida por Descartes e Fermat quando aplicada ao plano, consiste em estabelecer, se for possível, uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Dessa forma, para cada curva do

---

[1] Este artigo é baseado na dissertação de mestrado da autora *Algumas Concepções e Dificuldades sobre o Ensino-aprendizagem de Funções Envolvendo os Contextos Algébrico e Gráfico e a Conexão entre os Mesmos* defendida na PUC – Rio em 2002.

plano pode estar associada uma equação bem definida $f(x, y) = 0$ e para cada equação dessas pode estar associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. Assim, é estabelecida uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada. A essência real desse campo da Matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. (Eves, 1995)

O objetivo deste artigo é analisar alguns aspectos do ensino introdutório de funções nos Ensinos Fundamental e Médio. Para tal, foi realizada uma pesquisa bibliográfica[2] acerca de concepções errôneas e dificuldades dos alunos relacionadas ao conteúdo de função e suas representações, em particular ao conceito de função afim e que estão diretamente associadas à concepção da geometria analítica. Além disso, iremos discutir até que ponto e de que forma ocorre efetivamente uma transferência de investigação geométrica para investigação algébrica (e vice-versa) correspondente, tanto no ensino como na aprendizagem. Esta pesquisa serviu de fundamentação teórica para a análise de entrevistas realizadas com professores dos Ensinos Fundamental e Médio no Rio de Janeiro.

Falando um pouco sobre as funções

Há três formas básicas de representação de função: a tabular, na qual são colocados os pares ordenados que satisfazem determinada relação, a expressão algébrica e a gráfica.

Em muitas aplicações matemáticas esse conjunto de pares ordenados pode indicar algum padrão que, sendo identificado, é então descrito. A descrição deste padrão, empregando uma equação algébrica, é vista por muitos como a mais importante característica pedagógica de função. No entanto, o estudo das funções acaba sendo limitado ao estudo de um pequeno número de certas funções algébricas em si mesmas, pois não se espera que os alunos criem uma expressão para um conjunto de dados, mas sim que aprendam somente propriedades de certos tipos de fórmulas.

A forma gráfica, muitas vezes, é construída a partir de uma tabela, na tentativa de se descobrir também alguma regularidade. Presume-se que a maioria das pessoas se beneficiam de representações visuais. No entanto, o currículo de álgebra é tal que os problemas dados aos alunos são, em sua grande parte, do tipo que prontamente são resolvidos somente por meio de representações algébricas. Assim, a representação visual não é percebida como necessária pela maioria dos alunos.

Segundo Swan, *apud* Kieran (1993:199), rotineiramente os alunos geram tabelas de valores que satisfazem equações algébricas em duas variáveis, plotam pontos em gráficos cartesianos e lêem as coordenadas de pontos de um gráfico, algumas vezes com o objetivo

[2] Este tema é amplamente abordado na literatura por uma variedade de autores. No entanto, a pesquisa bibliográfica da dissertação de mestrado da autora foi basicamente realizada no livro "Integrating Research on the Graphical Representation of Functions" (Romberg, T., Carpenter, T. e Fennema, E., 1993) resultado de conferência que reuniu pesquisadores de várias partes do mundo interessados na integração da pesquisa sobre o currículo e o ensino-aprendizagem relacionados com a representação gráfica de funções e o impacto da tecnologia neste domínio. Além disso, foram analisados alguns artigos publicados em revistas da área de Educação Matemática.

de resolver uma equação ou um sistema de equações. A ênfase nessas habilidades leva os alunos a adquirir pouca prática em interpretar gráficos relacionados a situações da vida real, uma habilidade importantíssima para as ciências.

A construção do gráfico não é algo muito trivial e somente tornou-se mais fácil com o aparecimento da tecnologia computacional: em situações didáticas mais usuais, basta inserir a expressão algébrica que representa uma função num utilitário que constrói gráficos e, em segundos, teremos um gráfico da referida função.

As concepções errôneas e dificuldades relacionadas a função encontradas na literatura

As diversas formas de entendimento e visualização de uma função e as relações entre as suas representações podem, entretanto, ser uma fonte de dificuldade dos alunos, provocando concepções errôneas a respeito do assunto, também percebidas por pesquisadores em outros países.

Uma primeira dificuldade dos alunos que pode levar a concepções errôneas sobre as funções afins está na compreensão da reta como um conjunto infinito de pontos. Leinhardt e colaboradores, (*apud* Demana, Schoen e Waits, 1993:18), chamaram a dificuldade dos alunos em entender uma reta como um conjunto infinito de pontos, de "concepção errônea sobre continuidade (contínua *versus* discreta)". Kerslake, (idem, ibidem), analisou a "concepção errônea sobre continuidade" numa experiência na qual alunos com idade média de quinze anos tinham que marcar pontos que lhes foram dados por pares ordenados e uni-los por uma reta. O autor fez perguntas relacionadas aos pontos não-marcados e observou que somente 20% dos alunos disse haver uma infinidade de pontos sobre a reta. Muitos alunos achavam que não havia outros pontos além daqueles que eles marcaram. Outros pensavam que além dos pontos que marcaram, os únicos pontos adicionais existentes sobre a reta eram pontos médios e pontos onde a reta cortava o quadriculado subjacente. É possível que isso ocorra porque os únicos pontos marcados de forma saliente pelos alunos são aqueles que constam da tabela que os originou. Na ânsia de obter a figura, os alunos traçam segmentos de reta entre os pontos marcados mas estes segmentos não significam mais nada para eles.

Outra dificuldade, como já mencionamos, está na compreensão das diversas representações e as relações entre elas. Segundo Even & Ball, *apud* Romberg, Carpenter & Fennema (1993:6), "muitos professores e também alunos acham que funções devem ser obrigatoriamente expressas de uma forma algébrica e apresentar alguma regularidade".

Yerushalmy e Schwartz (1993:43) pensam que é bastante provável que certas dificuldades observadas na compreensão de funções em suas várias representações (numérica, visual e simbólica) podem ser decorrentes da forma de aprendizagem. Parece que o ensino sequencial das representações simbólica e gráfica (nesta ordem) não faz com que o aluno se movimente bem entre as duas representações. Dreyfus e Eisenberg, *apud* Yerushalmy e Schwartz (1993:43), confirmam este fato ao apontarem alunos do Ensino Médio que sabiam resolver problemas em ambas as representações (simbólica e gráfica) e mesmo assim consideravam as duas representações como informações distintas e desconectadas.

No ensino usual, o professor muitas vezes descreve o comportamento das funções usando um número limitado de casos simples, e isto limita a abrangência da compreensão do aluno. Por outro lado, a ausência de associação entre as diferentes representações ao longo da resolução de problemas não favorece um desenvolvimento harmônico da compreensão das diversas representações.

Uma terceira fonte de dúvidas pode estar ainda na compreensão da afirmação da Conexão Cartesiana. Considere a seguinte afirmação:

> *Um ponto está sobre o gráfico da reta L se, e somente se, suas coordenadas satisfazem à equação de L.* (Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi, 1993).

Podemos observar que a afirmação da *Conexão Cartesiana* mencionada acima, como enunciada por Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi, merece alguns comentários. A afirmativa fala em "gráfico da reta *L*", o que indica que *L* é aqui uma expressão algébrica, e ao mesmo tempo se refere à "equação de *L*", agora indicando que *L* é um objeto geométrico.

Para melhor entendimento, quando nos referirmos à *Conexão Cartesiana*, estaremos nos reportando à seguinte afirmativa:

> *Um ponto* (x_0, y_0) *pertence ao gráfico da função* $y = f(x)$ *se, e somente se, o ponto satisfaz a equação* $y = f(x)$*, isto é,* $y_0 = f(x_0)$.

como encontrada em Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993) e que não é nada mais do que a definição de gráfico de uma função, decorrente da idéia da geometria analítica moderna concebida por Descartes. Comparando os dois enunciados, o de Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi (1993) e o de Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993), vemos que no primeiro a expressão "gráfico da reta L" deve ter o significado de "gráfico da função $y = mx + b$", que sabemos ser uma reta.

Knuth (2000) afirma que muito pouco tempo é despendido no ensino da *Conexão Cartesiana* e que os professores partem do princípio de que, uma vez apresentado este conceito aos alunos, não é mais necessário revisá-lo. Ele desafia esta suposição e questiona a compreensão dos alunos sobre essa conexão fundamental. Sua pesquisa envolveu cento e setenta e oito alunos do Ensino Médio, com o objetivo de examinar suas habilidades em usar um aspecto particular da *Conexão Cartesiana*: as coordenadas de qualquer ponto sobre uma reta satisfazem a equação da reta.

Um dos problemas propostos aos alunos por Knuth (2000) é:

O gráfico da Figura 1 representa a equação $ax + 3y = -6$*. (Não se sabe o valor do coeficiente de x.)*

a) *Se possível ache uma solução para a equação sem conhecer o valor de* a*. Explique sua resposta.*
b) *Como podemos achar o valor de* a*? Explique sua resposta.*

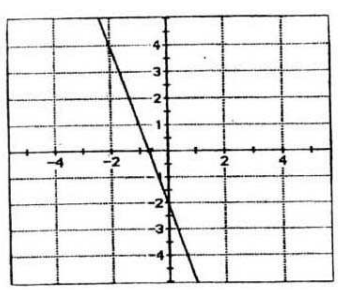

Figura 1

As duas representações oferecem informações equivalentes, mas não são computacionalmente equivalentes. Em geral, as representações diferem em termos da eficiência das resoluções que nelas se apóiam. Uma representação gráfica pode ser imaginada como fornecendo explicitamente informação pois exibe um número infinito de pontos, enquanto que esta mesma informação é dada implicitamente numa representação algébrica, já que os pontos, para serem encontrados, precisam ser calculados.

O autor supôs que a compreensão da *Conexão Cartesiana* levaria os alunos a escolher a estratégia de resolução considerada por ele como a mais eficiente e, muitas vezes, mais fácil, que nesse caso é a utilização da representação gráfica[3], ou seja, a escolha de um ponto do gráfico que satisfizesse a equação $ax+3y=-6$. Por exemplo, $x=0$ e $y=-2$ ou $x=-2$ e $y=4$. Os dois pontos escolhidos estão explicitamente visíveis na figura por serem pontos onde o gráfico cruza com o encontro das linhas verticais e horizontais do quadriculado. No entanto, o resultado da pesquisa mostrou que mais de 75% dos alunos escolheram uma abordagem algébrica[4] como primeira resolução possível e muitos alunos não sugeriram a resolução gráfica. No total, menos de um terço dos alunos utilizou o método de resolução gráfica que caracterizava qualquer resposta na qual o aluno usasse explicitamente o gráfico.

De acordo com Knuth (2000), pesquisadores sugerem que a dificuldade que os alunos têm em tarefas que requerem perceber a representação gráfica como aquela que contém a solução de uma equação pode ser resultado de sua inabilidade em “enxergar” os pontos que compõem a reta. De certo modo, o gráfico esconde essa informação e, como conseqüência, os alunos podem não perceber que a representação gráfica pode oferecer-lhes um recurso para determinar uma solução já que o ponto que pertence ao gráfico da equação satisfaz a equação. Além disso, existem problemas técnicos com o uso da representação gráfica para dela extrair pares (x,y). Quando solicitados a encontrar uma solução de uma equação, parece existir um certo “acordo didático”: os alunos assumem que deve ser uma solução exata, calculada, que o professor não aceitará uma resposta aproximada. Como as coordenadas de um ponto num gráfico só podem ser encontradas aproximadamente, então eles partem para a resolução algébrica. No entanto, analisando-se a resolução algébrica de vários alunos, observou-se que muitos deles foram capazes de identificar pontos para o cálculo da inclinação da reta presente na figura dada e, nesse momento, não hesitaram em utilizar valores aproximados. Interessante perceber que eles não reconhecem que os pontos escolhidos para o cálculo da inclinação da reta são soluções da equação. Knuth conclui que a confiança que o aluno tem no método de resolução algébrico se deve à sua deficiência em reconhecer os pontos usados para calcular a inclinação da reta (objeto geométrico) como soluções da equação e não à sua necessidade de precisão da solução. Este reconhecimento tornaria o método de resolução gráfico uma opção viável para o aluno.

Talvez a influência mais significativa na escolha de métodos de resolução por parte dos alunos seja o enfoque curricular na representação algébrica e sua manipulação. A

[3] Discordando do autor, consideramos que a resolução algébrica do item **a** é mais imediata do que uma resolução gráfica do mesmo item. Basta observar que para $x=0$ obtemos $y=-2$ que é solução independente do valor de *a*.

[4] A abordagem algébrica aqui inclui um estudo da representação gráfica para determinar o coeficiente *a*, após calcular o coeficiente angular $\left(\dfrac{-a}{3}\right)$ da reta por meio do cálculo-padrão do coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos.

ênfase do ensino de funções parece ser na direção equação-gráfico, ou seja, se (x_0, y_0) satisfaz $y = f(x)$, isto é, $y_0 = f(x_0)$, então (x_0, y_0) está no gráfico de $y = f(x)$. E não na direção gráfico-equação, *i.e.*, se (x_0, y_0) está no gráfico de $y = f(x)$, então satisfaz $y = f(x)$, isto é, $y_0 = f(x_0)$.

Pesquisando os professores

Durante nossa pesquisa de mestrado (Fonte, 2002) foram realizadas três entrevistas com professoras licenciadas em Matemática, que lecionavam no Ensino Médio em escolas federais e particulares da Zona Sul do Rio de Janeiro.

Na época da pesquisa Liana lecionava há seis anos, sendo que em 2002, na 1ª série do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRJ; Rogéria, que já lecionava há sete anos, em 2002 trabalhava no Pré- Vestibular do Sindicato da UFRJ e no 3ª. série do Ensino Médio do Colégio Pedro II; Renata, formada em 1976, lecionava na época para a 6ª série (atual 7º. ano) e para o 2ª. série do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRJ.

Essas entrevistas foram individuais, gravadas e depois transcritas. Cabe ressaltar que na transcrição das gravações foram respeitadas as falas das professoras e, além disso, por uma questão de ética, os nomes verdadeiros dos professores foram trocados. As três professoras entrevistadas mostraram-se interessadas em participar desse trabalho, até orgulhosas de poderem contribuir para seu desenvolvimento e esperam poder ter acesso ao seu resultado.

Nessas entrevistas nos restringimos a explorar a *Conexão Cartesiana* relativa a funções afins, ou seja, um ponto está sobre o gráfico de $y = mx + b$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação $y = mx + b$. Escolhemos o problema de Knuth (2000), citado anteriormente, para perguntar a esses professores como eles achavam que seus alunos o resolveriam. Dessa forma, foi possível também averiguar como os professores entrevistados diziam ensinar este conteúdo. Obviamente, além das perguntas constantes no enunciado, outras perguntas surgiram durante as entrevistas e, portanto, este enunciado funcionou somente como um ponto de partida.

Com relação ao item **a**, Liana nos diz:

> *Eu acho que eles teriam dificuldade. Acho que eles não estão acostumados a ver solução de uma equação com duas variáveis, a não ser que seja um sistema, entendeu? Estão acostumados a resolver equação com uma variável. Então eu acho que muitos não conseguiriam fazer, mesmo tendo o gráfico. Os que têm mais afinidade com Matemática, acho que iriam primeiro rabiscar alguma coisa... isolar o x... como eu fiz aqui:* $x = \dfrac{-6-3y}{a}$, *e de repente iriam pegar no gráfico, por exemplo... parece que o gráfico passa no eixo y no* -2, *então acho que eles não iriam direto dar um ponto do gráfico, que seria o ponto* $(0,-2)$. *Acho que eles não dariam direto. Acho que eles iriam pegar o* -2 *e substituir aqui onde eles acharam:*
>
> $$x = \frac{-6-3y}{a}$$

e para $y = -2$ *:* $$x = \frac{-6+6}{a} = 0$$

E aí até chegariam que o x é zero, e poderiam até chegar no par ordenado $(0,-2)$*. Eu não acho que eles iriam direto olhar para o gráfico e conseguir deduzir que um ponto daquela reta é uma solução da equação. Eu acho muito difícil eles darem a resposta, a solução como um par ordenado, entendeu? Eu acho que eles não teriam a idéia de ir lá no gráfico e pegar um ponto.*

Com relação a esta pergunta Rogéria afirma:

Eles fariam essa questão, sim. E por que eu afirmo isso? Porque eles sabem que os pontos que são solução da equação pertencem à reta, então eles tentariam achar um ponto marcado nessa reta. Aqui tem o ponto $(-2,4)$*, que está marcadinho aqui. Eles sabem que na marcação do gráfico da reta é um par de valores, e aquele par de valores ele marca para traçar a reta, então se eu quero um ponto da reta, que é um ponto da solução, é só ver o ponto do gráfico. No meu caso, eu sempre enfoco isso. Eu falo como é que eu construo o gráfico da reta. Não é atribuindo valores para x e chegando a valores de y? Ou seja, um ponto da reta é um ponto do gráfico, que tá lá na reta. Até porque às vezes eu pergunto assim: 'Esse ponto aqui é solução ou não?'* (pegando um ponto que está fora da reta) *Eu não preciso nem substituir, ele não está na reta, ele está fora. Então esse enfoque eu faço.*

A opinião de Renata sobre este item é:

Então achar uma solução para a equação sem conhecer o valor de a seria achar um par (x,y) que satisfaça aquilo ali, não é isso? Aí você pode usar valores do gráfico. Eu acho que eles fariam isso. Eles pegariam um valor conhecido do gráfico, no caso aqui $(-2,4)$ *e substituiriam. Aliás, na verdade ele quer uma solução... então direto pelo gráfico, não precisa do valor do a. Eu acho que eles vão no gráfico. Eles têm essa idéia de que o ponto (x,y) que pertence a essa reta vai satisfazer aqui. Ah! Eu acho que sim. Se o conceito tiver sido bem dado para os alunos, sim.*

As três professoras entrevistadas mostraram uma boa compreensão da afirmação da *Conexão Cartesiana* e apontaram abordagens diversas para a resolução do item **a** pelos seus alunos.

Liana isola o valor de *x*, pega o valor de $y = -2$ no gráfico e, por substituição na equação, acha o valor de $x = 0$. Portanto, ela primeiramente usou o gráfico para selecionar uma coordenada de um par ordenado e retornou ao contexto algébrico para encontrar a outra coordenada. Vale lembrar que esse procedimento só funcionou para a resolução do item **a** porque a escolha $y = -2$ leva a $x = 0$, independente de *a*. Podemos observar que ela considerou que seus alunos escolheriam o ponto -2 do eixo y, que nada mais é do que o parâmetro *b* da equação $y = mx + b$ e que, por ser o ponto onde o gráfico intercepta o eixo y, é mais saliente para os alunos do que o ponto $(0,-2)$ do plano xy. Isto confirma a hipótese de Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi (1993) quando afirmam que o aluno refere-se ao parâmetro b como o valor onde a reta intersecta o eixo y e que ele pode não se dar conta de que o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico da equação.

Renata afirmou que seus alunos considerariam o ponto $(-2,4)$ do gráfico e disse que *"substituiriam"* no lugar de x e y respectivamente, talvez por se sentirem inseguros no contexto gráfico.

Rogéria foi a única que afirmou categoricamente que seus alunos considerariam um ponto do gráfico, mas parecia se referir à direção equação-gráfico ao dizer que "então eles tentariam achar um ponto marcado nessa reta", pois os pontos "marcados" são os pontos calculados. Ela também trabalha a direção gráfico-equação quando afirma que, após a construção do gráfico, ela considera um ponto exterior a ele e questiona os alunos se aquele ponto é solução da equação. Sua fala mostra que ela também confunde o significado das duas direções.

Perguntamos às outras duas professoras se elas também enfatizavam a direção equação-gráfico, ou seja, se elas encontravam uma solução para uma equação algebricamente, e depois diziam que essa solução era um ponto da reta que representava o gráfico daquela equação.

Rogéria responde:

> *Isso já é mais raro, é mais difícil eu falar.*

E Renata:

> *Aí é mais fácil ainda. Mais fácil. Para eles construírem a reta, eles precisam daquela tabelinha, não é isso? Então, eles vão dar um valor arbitrário para x e achar o y correspondente. Eu acho que é até mais imediato isso do que o que tem aqui no exercício. A ida é mais ensinada e a volta é que não é tão imediata. É, eu acho que de repente... Por exemplo, uma situação desse tipo, até pode ser, acho que a gente pode até dar uma questão, enfim, falando nisso, mas eu acho que é mais fácil o contrário. Posso até estar enganada, mas eu acho que é mais... entendeu, porque é a coisa que segue o texto, normalmente os livros, eles falam nisso, como é que você constrói, são pontos que pertencem... são os pontos da reta, mas não enfatizam a volta.*

A professora Renata parece distinguir bem as duas direções da *Conexão Cartesiana* e considera que construindo a "tabelinha" e marcando os pontos do gráfico ela está enfatizando a afirmação na direção equação-gráfico. Já a professora Rogéria considera que não enfatiza essa direção, apesar de ter dito que seus alunos sabem que os pontos que são solução da equação pertencem à reta e de dizer, mais tarde, que também constrói a tabela de pares $(x, f(x))$ e marca esses pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, construindo o gráfico da função $y = f(x)$ junto com os alunos. Ao executar estes passos, está usando a afirmação de que se o par (x, y) satisfaz a equação $y = f(x)$, então o ponto (x, y) pertence ao gráfico de *f*, apesar de não estar falando isso explicitamente.

Com relação à escolha da coordenada $y = -2$ na determinação do par $(0,-2)$, Liana acrescenta:

> *Eu acho que eles escolheriam esse ponto por ser o único ponto que eles têm alguma informação. Os outros pontos, até esse ponto aqui, o ponto $(-2,4)$, eu acho que eles não teriam tanta certeza se*

> *é realmente* $(-2{,}4)$. *Esse outro aqui, eles não sabem aonde está passando, eu acho que esse aqui é o ponto que eles teriam mais certeza.*

Questionamos, então, o que ela queria dizer com “eles não sabem aonde está passando”. Ela nos responde:

> *Eles não confiam, eles acham que não está exato. Ou eles pegariam* $(0,-2)$ *ou* $(-2{,}4)$, *que são pontos que dá para eles verem o x e o y.*

Apesar de a professora Rogéria não ter se pronunciado formalmente sobre este assunto, sentimos em sua primeira fala a mesma opinião de Liana.

A professora Renata acrescenta:

> *Tem também aquela coisa que a gente diz para que eles não confiem só no gráfico, porque teria que ter um instrumento mais preciso para medir. Aí pode até ser que eles não confiam tanto no gráfico por causa disso.*

Com a observação de Renata podemos ver que o próprio professor pode passar essa informação para o aluno.

Estas declarações confirmam o que foi dito anteriormente sobre um suposto “acordo didático”, no qual os alunos acham que encontrar uma solução para uma equação é encontrar um valor exato e que o professor não aceitaria uma resposta aproximada já que, para os alunos, as coordenadas dos pontos lidos do gráfico são valores aproximados.

Liana considera o item **b** mais fácil para seus alunos responderem do que o item **a**:

> *A* ***b*** *eles fazem tranquilos, porque eles estão acostumados a pegar um gráfico, a ter dois pontos e com isso achar a lei da função. É, eu acho que eles responderiam a* **b** *assim, substituindo e chegando no a. Se eles pegassem esse aqui* $(0,-2)$, *o que aconteceria é que ficaria o a. Se eles pegassem o* $(-2{,}4)$ *e substituíssem o y por 4...*

E então ela resolveu e chegou ao valor de *a*:

$$x = \frac{-6-12}{a}$$

$$e \quad x=-2 \;\Rightarrow\; -2=\frac{-6-12}{a} \;\Rightarrow\; -2a=-6-12 \;\Rightarrow\; -2a=-18$$

$$\Rightarrow a = 9\text{”}$$

Com relação a este mesmo item Rogéria responde:

> *Bom, então quem faz o item* **a**, *faz também o item* **b** *e quem não fizer o item* **a**, *não faz o item* **b**. *Provavelmente aqueles que conseguiram achar uma solução no item* **a**, *o ponto* $(-2{,}4)$, *por exemplo, vão pegar o* $x=-2$ *e o* $y=4$ *e aí vão tirar o valor de a. Mas com certeza nem todos farão. Mas os que já têm um pouco mais de malícia, pegam claramente um ponto aqui e substituem.*

A professora Renata tem a mesma opinião:

> *Eu acho que também, da mesma forma que você usou o item* **a**, *né? Se você percebeu o ponto, você vai substituir, você vai fazer a solução algébrica, vai substituir os valores x e y, colocar ali e achar o valor de a. Porque sabe que qualquer ponto da reta tem*

que satisfazer a equação. Mas acho que de repente pode acontecer sim, de alguns nem atinarem de ir lá no gráfico buscar um ponto. Mas no geral eu acho que sim. Eu estou falando de alunos específicos. Eu acho que se isso daqui fosse colocado para um aluno de um nível mais fraco, ele não faria.

Observa-se que a resolução do item **b** exige o uso dos contextos algébrico e gráfico, e as três professoras concluem que seus alunos o resolveriam utilizando as duas abordagens.

Perguntamos aos professores se achavam que os alunos poderiam passar a equação para a forma $y = mx + b$.

Liana e Renata confirmam que os alunos não estão acostumados a ver a equação da reta na forma $ax + by + c = 0$, mas concluem que transformar a equação para a forma $y = mx + b$ não resolveria o problema dos que não sabem que um ponto pertencente à reta é solução da equação da reta.

Sobre este assunto, Rogéria se confunde um pouco, mas explica:

Passariam para essa forma, para verificar o gráfico, ou por acharem que desta outra forma tá bagunçado, e aí resolvem arrumar: $y = \frac{-ax}{3} - 2$. *Então ele até acharia o valor de a, achando m através da tangente do ângulo. Assim:*

$$ax + 3y = -6$$
$$3y = -ax - 6$$
$$y = \frac{-ax - 6}{3}$$

Porque eles também sabem que o valor desse b é o ponto onde o gráfico corta o eixo y, então eles podiam ver aqui direto, mas eles não iam fazer isso. Acho que poucos fariam isso. Eles iam pegar um ponto $(-2,4)$*:* $4 = \frac{-a(-2)-6}{3}$ *e daqui eles iam achar o valor de a. Eu acho que eles fariam assim. Eles não iam ver direto esse* -2 *aqui embaixo.*

Assim, ela resolve, passando para a forma $y = mx + b$ e considerando o ponto $(-2,4)$ do gráfico para substituir na equação da reta.

Conclusões

O enfoque dado à representação algébrica por uma parcela significativa dos professores e dos livros didáticos pode ser a causa de os alunos se sentirem mais seguros no contexto algébrico do que no contexto gráfico. Um indício de prática pedagógica que evidencia esse enfoque é a construção de gráficos de funções elementares. No caso específico da função afim $f(x) = mx + b$ (ou $y = mx + b$), os alunos montam uma tabela com alguns pontos que satisfazem a equação e marcam esses pontos num sistema de eixos cartesianos, unindo-os adequadamente e concluindo que o gráfico de $y = mx + b$ é uma reta *L*. Este procedimento é, muitas vezes, percebido como matematicamente direto e espera-se, com isso, que o aluno tenha dominado a *Conexão Cartesiana* e consiga extrair de qualquer gráfico pares (x, y) que sejam soluções de respectivas equações. Com isso, os professores podem achar que fica claro para os alunos que, se as coordenadas de um ponto satisfazem a equação $y = mx + b$, então este ponto está sobre o gráfico da função f; e que, se um ponto está sobre o gráfico da função *f*, então suas coordenadas satisfazem a equação $y = mx + b$.

No entanto, parece que os alunos entendem mais facilmente o sentido equação-gráfico da *Conexão Cartesiana*, ou seja, que se um ponto satisfaz a equação $y = mx + b$, então esse ponto pertence ao gráfico de $y = mx + b$. O aluno parece estar seguro de que os pontos constantes da tabela e marcados por ele no sistema de eixos cartesianos estão sobre a reta, pois estes pontos são salientes no gráfico. No entanto, assimilar o sentido gráfico-equação da *Conexão Cartesiana* - considerar um ponto qualquer da reta e afirmar que o mesmo satisfaz a equação $y = mx + b$ - não é simples para o aluno, visto que este ponto qualquer não está saliente no gráfico e o aluno pode não estar seguro se o par ordenado correspondente poderia constar também da tabela e satisfazer a equação $y = mx + b$. Acreditamos que o equilíbrio poderá ser alcançado se o professor e os livros-texto enfatizarem ambos os sentidos da *Conexão Cartesiana*.

Conforme já foi citado por Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993), observamos também que o professor, ao ensinar, não verbaliza certos passos de seu pensamento e de seu raciocínio que para ele são triviais, mas que não são óbvios para os alunos. No entanto, é preciso lembrar aos professores que aquele pensamento pronto e elaborado já foi um dia aprendido por eles, em etapas, e com o passar do tempo se transformou em um conhecimento pronto e adquirido. Agora é a vez do aluno e ele necessita passar por várias etapas de seu desenvolvimento próprio para alcançar uma compreensão esperada do conteúdo proposto.

Aqui cabe uma colocação sobre a forma pedagógica de ensinar um conteúdo matemático: deve-se levar em conta não somente a questão de como se espera que os alunos adquiram o conceito matemático, mas também, e principalmente, como os alunos realmente adquirem esse conceito. (Vinner, 1991:67) Exemplificando: os alunos podem não "enxergar" uma reta como nós professores esperamos que eles a enxerguem, ou seja, constituída de uma infinidade de pontos.

Além disso, é necessário analisar com cautela a importância atribuída ao contexto gráfico para o desenvolvimento de conceitos e resolução de problemas já que não é possível atribuir mais propriedades a uma representação do que aquelas que ela já contém. Segundo Vinner (1991, 69), adquirir um conceito significa formar uma imagem do conceito: o "conceito-imagem" é algo não-verbal associado em nossa mente com o nome do conceito.

No caso do conceito "solução de uma equação", o que estamos sugerindo é que realmente não é possível para o aluno entender todos os pares numéricos (x, y) pertencentes a uma reta desenhada em um sistema de eixos cartesianos como soluções da equação. Isto constitui uma abstração por parte do aluno, tarefa esta muito difícil para a maioria deles. No entanto acreditamos que, se o processo ensino aprendizagem da função afim for bem sucedido, possivelmente, será mais fácil para o aluno conhecer alguns pares de forma aproximada e imaginar todos os outros. Por outro lado, a representação algébrica $ax + by = c$ permite um acesso bem mais amplo aos pares (x, y) que satisfazem a equação, sendo que o conjunto de todos esses pares também é uma abstração.

Referências

DEMANA, F., SCHOEN, H. e WAITS, B. Graphing in the K-12 Curriculum: The Impact of the Graphing Calculator. In**:** ROMBERG, T., CARPENTER, T. e FENNEMA, E. (Orgs.) **Integrating Research on the Graphical Representation of Functions**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 11-39.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. São Paulo:Editora da Unicamp, 1995.

FONTE, R. B. **Algumas Concepções e Dificuldades sobre o Ensino-Aprendizagem de Funções Envolvendo os Contextos Algébrico e Gráfico e a Conexão entre os Mesmos.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

KIERAN, C. Functions, Graphing, and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction. In: ROMBERG, T., CARPENTER, T. e FENNEMA, E. (Orgs.) **Idem.** Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 189-237.

KNUTH, E. Student Understanding of Cartesian Connection: An Exploratory Study. Journal for Research in Mathematics Education*,* New York: NCTM, v.31, n.4, pp. 500-507, jul. 2000.

MOSCHKOVICH, J., SCHOENFELD, A. e ARCAVI, A. Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. In: ROMBERG, T., CARPENTER, T. e FENNEMA, E. (Orgs.) **Idem**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 69-100.

ROMBERG, T., CARPENTER, T. e FENNEMA, E. Toward a Common Research Perspective. In: **Idem, ibidem**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 1-9.

SCHOENFELD, A. H., SMITH, J. P., III, e ARCAVI, A. Learning: The Microgenetic Analysis of one Student's Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain. In: GLASER, R. (Org.) **Advances in Instructional Psychology**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, v. 4, 1993, pp. 1-9.

VINNER, S. The Role of definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall, D. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 65-81.

YERUSHALMY, M. e SCHWARTZ, J. Seizing the Opportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting. In: ROMBERG, T., CARPENTER, T. e FENNEMA, E. (Orgs.) **Idem.** Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 41-68.

Submetido em julho de 2009.
Aprovado em novembro de 2009.