

Explorando ângulos e triângulos com dobraduras em papel¹

Belén Arrieche Alvarado

Martha Iglesias Inojosa

Profesoras, UPEL -Venezuela

bjarriechea@hotmail.com

mmiglesias@gmail.com

Resumo

Esse artigo apresenta uma ferramenta didática construída com dobraduras em papel. A ferramenta foi apresentada com a finalidade de ser utilizada para medir certos ângulos quando não dispomos de um transferidor. Todavia, mostraremos que podemos também explorar a ferramenta para o estudo de alguns tópicos relacionados às noções geométricas de ângulos e triângulos. Além do mais, destacaremos algumas habilidades geométricas que os estudantes podem desenvolver mediante a construção e exploração deste recurso didático.

Palavras-chave: Dobraduras em papel, ângulos, triângulos, habilidades geométricas

Explorando ángulos y triángulos con doblado de papel

Resumen

En este artículo se presenta una herramienta didáctica construida mediante el doblado de papel. Este recurso fue presentado con la intención de ser utilizado para medir ciertos ángulos, cuando no se cuenta con un transportador; sin embargo, mostraremos que puede ser explotado, aún más, para el reforzamiento de algunos tópicos relacionados a las nociones geométricas de ángulos y triángulos. Además, señalaremos algunas habilidades geométricas que los estudiantes pueden desarrollar, mediante la construcción y exploración de este recurso didático.

Palabras clave: Doblado de papel, ángulos, triángulos, habilidades geométricas

¹ Este artículo surgió del Seminario ministrado por la Profesora Belén Arrieche en el GEPEM en agosto del 2010.

Introducción

La papiroflexia u Origami como se dice en Japonés y que significa "doblar papel" es la técnica de doblar y desdoblar un cuadrado o rectángulo de papel sólo con la ayuda de las manos sin cortar ni pegar, hasta formar cualquier figura que salga de la imaginación. Esta técnica ha sido un gran recurso didáctico para la aprehensión de conceptos y procedimientos geométricos por los múltiples beneficios que se obtienen al ser empleada con fines educativos. Al respecto, Villanueva de Moya (2009) sostiene que partiendo de una base inicial (cuadrados o rectángulos generalmente) se obtienen figuras que pueden ir desde sencillos modelos hasta plegados de gran complejidad. En cada trozo de papel que se utiliza hay patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que permiten a la hoja llegar a tener variadas e interesantes formas. Además, el Origami permite una conexión entre el cerebro, la mano, el ojo y de ahí su importancia en el aprendizaje de la Matemática como estimulante del cerebro.

En este sentido, mediante el uso del Origami, presentaremos un recurso didáctico, denominado por Kunihiko Kasahara *herramienta triangular para medir ángulos*, mostraremos que con cuatro dobleces tendremos a nuestra disposición una herramienta muy útil para medir ocho ángulos de diferentes medidas y además explorar algunas propiedades geométricas relacionadas a las nociones de ángulos y triángulos, tales como: ángulos opuestos por el vértice, ángulos alternos internos, teorema referente a la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo, entre otras.

Se aspira que con la construcción y exploración de la herramienta triangular los estudiantes logren desarrollar ciertas habilidades geométricas asociadas a los niveles de razonamiento geométrico (Hoffer, 1981); donde cada habilidad, planteada por este autor, manifiesta características específicas para cada nivel de razonamiento propuesto en el modelo de Van Hiele². A continuación, se presenta la tabla de habilidades geométricas propuesta por Hoffer (1981), teniendo en cuenta los tres primeros niveles de razonamiento geométrico.

² Una descripción detallada de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele pueden ser encontradas en los Boletines Gepem 27 y 29, en los artículos de la Profesora Lilian Nasser.

	NIVEL		
	I	II	III
	Reconocimiento	Análisis	Ordenamiento
V i s u a l	Reconocer diferentes figuras en un dibujo Reconocer información contenida en una figura.	Notar propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de una mayor.	Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figuras.
V e r b a l	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.	Describir adecuadamente varias propiedades de una figura.	Definir palabras adecuadas y concisamente. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.
D i b u j a r	Hacer dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.	Dada cierta figura construir otras relacionadas con la primera.
L ó g i c a	Darse cuenta que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la conservación de las figuras en distintas posiciones.	Comprender que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. Notar que las propiedades sirven para distinguir las figuras.	Comprender las cualidades de una definición. Usar las propiedades para determinar si una clase de figuras está contenida en otra.

Tabla de habilidades geométricas³

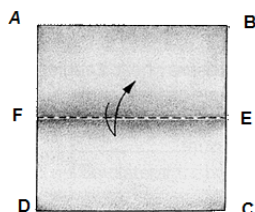
³ Existe la habilidad de modelar propuesta por Hoffer que no es considerada en este artículo.

Construcción del Recurso

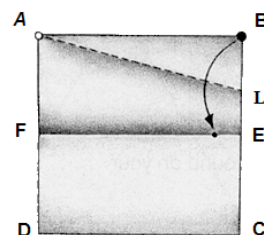
HERRAMIENTA TRIANGULAR PARA MEDIR ÁNGULOS: SIN EL TRANSPORTADOR

Se inicia la construcción a partir de un cuadrado de papel⁴:

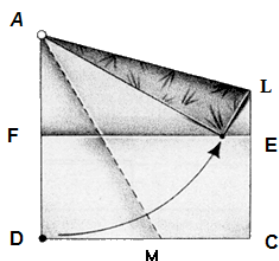
1. Doble el papel a la mitad y desdóblelo, asígnele letras a los vértices del cuadrado y los extremos del dobléz.



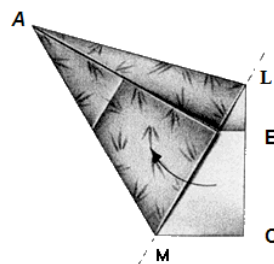
2. Doble la esquina superior derecha hacia abajo de tal manera que el vértice B caiga sobre el segmento EF. Asegúrese que el dobléz se haga a partir del vértice A.



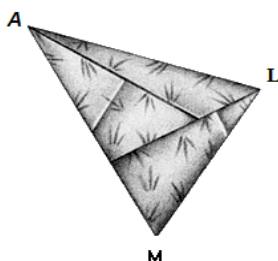
3. Doble la esquina izquierda inferior hacia arriba de tal manera que el vértice D caiga sobre el segmento EF. Asegúrese que el dobléz se haga a partir del vértice A.



4. Doble la base del triángulo tal como se muestra en la figura. Asigne letras en los extremos de cada dobléz.

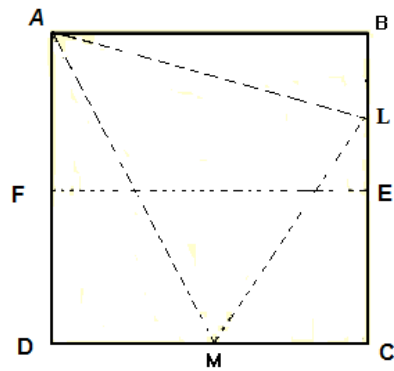


5. Usted ha doblado una *herramienta triangular* que sirve para medir ángulos.



Al desplegar la hoja de papel, la herramienta construida quedará así:

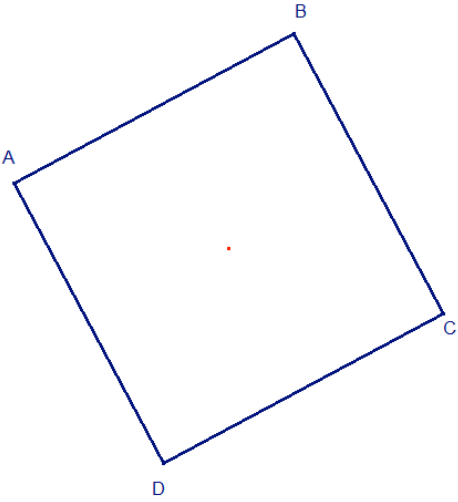
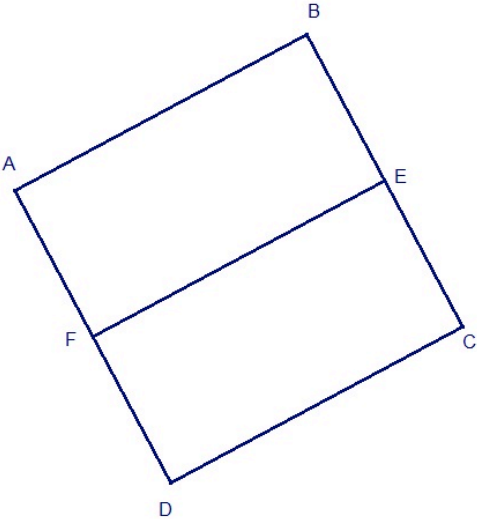
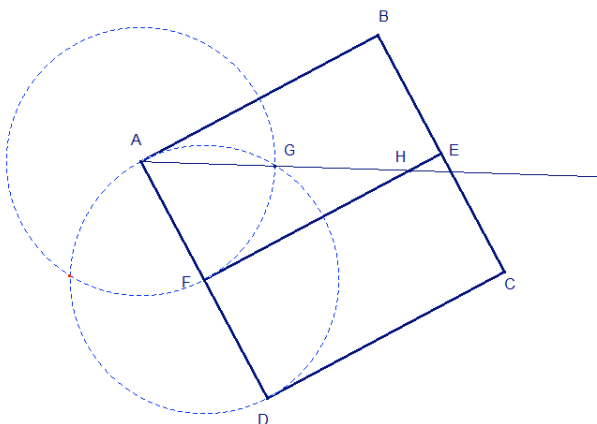
⁴ Las imágenes están disponibles en: <http://www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html>. Acceso: 29/09/2010.

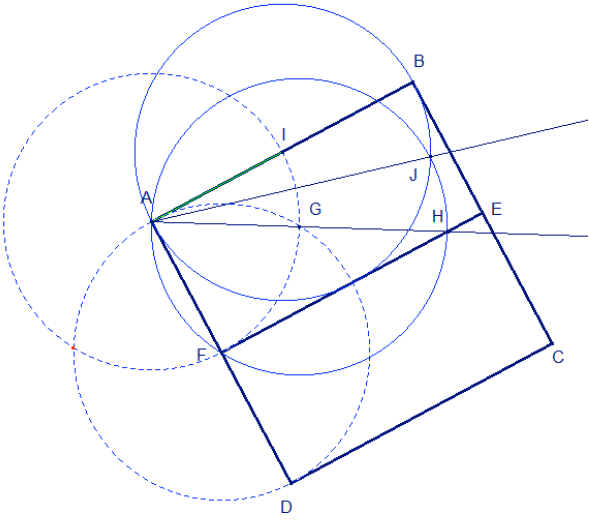
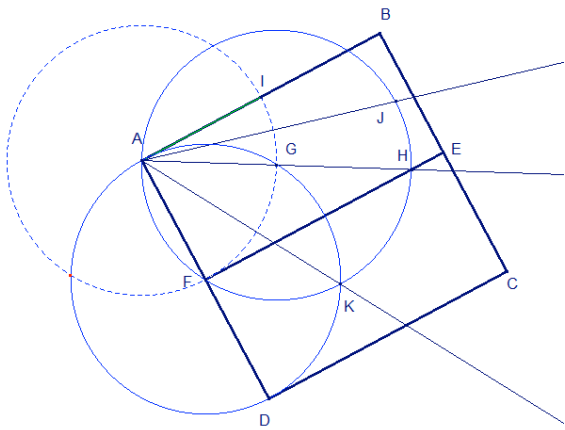
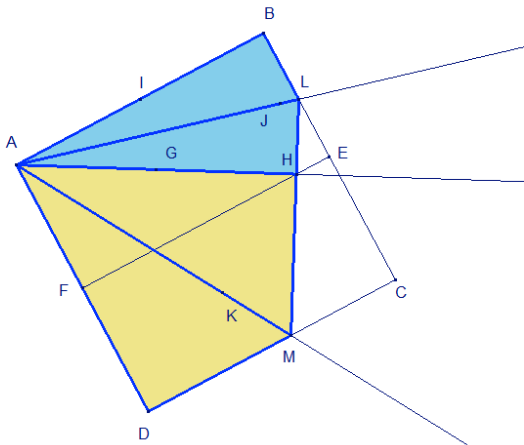


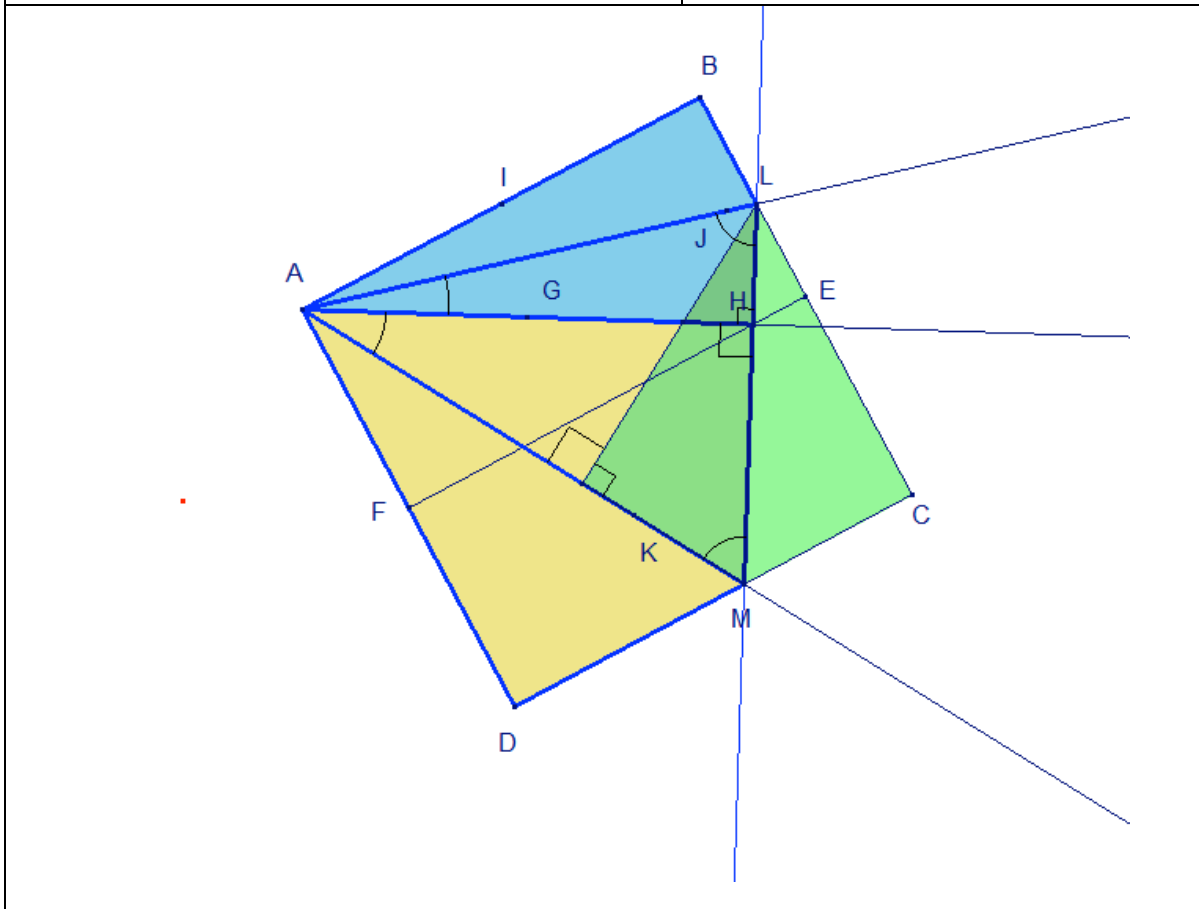
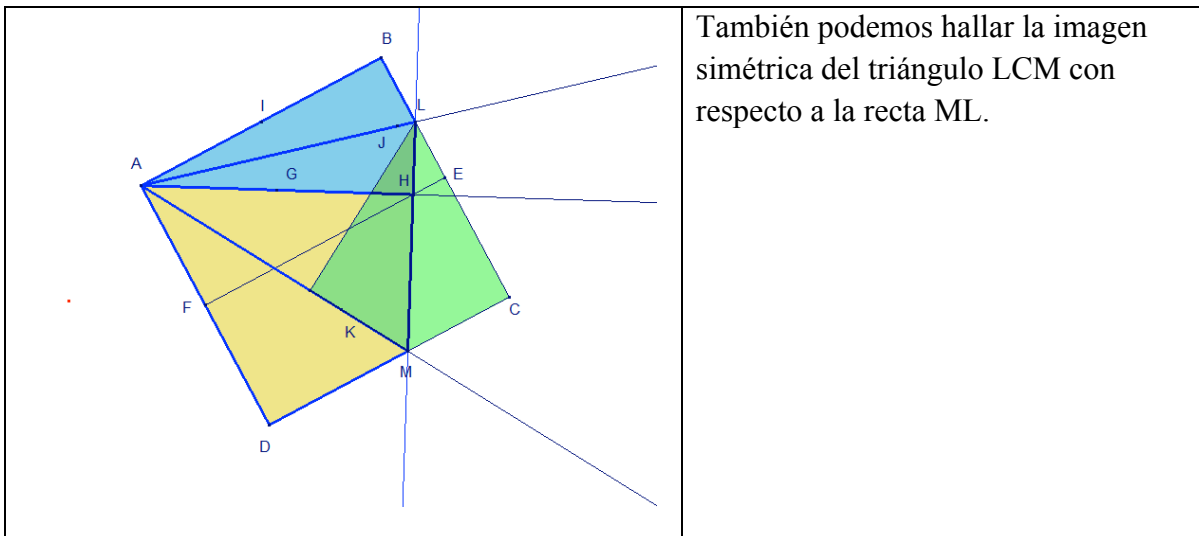
Otra manera de construir esta herramienta triangular usando el Cabri Géomètre II Plus

Los software de Geometría Dinámica son un conjunto de programas computarizados que crean un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes exploran las figuras geométricas, descubren ciertas propiedades y formulan conjeturas. Con la utilización de este tipo de software, las construcciones geométricas con regla y compás adquieren una condición dinámica, superando así la condición estática de una construcción realizada con lápiz y papel, lo cual posibilita contar con múltiples representaciones gráficas de una misma construcción geométrica y visualizar, en forma continua y en tiempo real, cómo se produce el cambio de un estado a otro en dicha construcción. Así, se logra introducir la experimentación en las clases de Geometría y, con ello, se logra crear un ambiente donde los estudiantes aprenden a conceptuar y a conjeturar y, además, sienten la necesidad de validar o rechazar tales conjeturas (Iglesias, 2000).

En este orden de ideas, se hará uso del Cabri Géomètre II Plus para mostrar la construcción con regla y compás de esta herramienta triangular, basándose en la trisección de un ángulo recto. Se describirá – paso a paso – el procedimiento empleado, dejando ver su equivalencia con la construcción con doblado de papel.

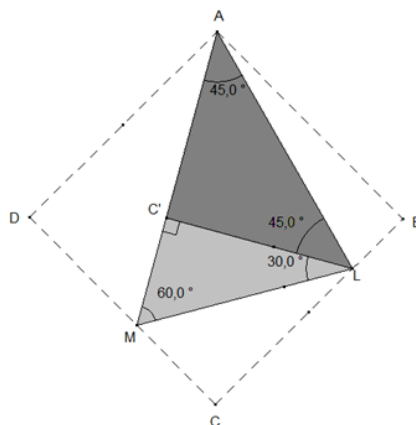
	Dado un cuadrado ABCD. ¿Cuáles son los atributos relevantes de un cuadrado?
	Sean E y F los puntos medios de los lados BC y AD del cuadrado ABCD. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los cuadriláteros ABEF y FECD?
	Haciendo centro en A y con una abertura AF, se traza una circunferencia; haciendo centro en F y con una abertura FA, se traza otra circunferencia. Ambas circunferencias, se intersectan en un punto G. Seguidamente, se traza la semirrecta AG, la cual intersecta al segmento EF en un punto H. Se afirma que el ángulo FAH mide 60° y, por lo tanto, el ángulo BAH mide 30°. ¿Por qué?

	Haciendo centro en I y G con una abertura AI, se trazan dos circunferencias que se intersectan en un punto J. De modo que la semirrecta AJ biseca al ángulo BAH. ¿Por qué? ¿Cuánto medirán los ángulos BAJ y JAH?
	Haciendo centro en F y G con abertura AI, se trazan dos circunferencias que se intersectan en el punto K. La semirrecta AK biseca al ángulo FAH. En consecuencia, los ángulos FAK y HAK miden 30° cada uno. Lográndose así trisecar al ángulo recto con vértice en A.
	La imagen simétrica del triángulo ABL con respecto a la semirrecta AG es el triángulo AHL. La imagen simétrica del triángulo ADM con respecto a la semirrecta AK es el triángulo AHM. Esto pudiera verificarlo haciendo uso de la herramienta construida con doblado de papel, ya que un triángulo y su imagen simétrica quedarían superpuestas.



En la figura, se marcaron los ángulos notables que pueden ser medidos con esta herramienta triangular.

Si te percatas, tal herramienta triangular está compuesta por dos "escuadras": una de 30 - 60 - 90 (escuadra escalena) y la otra de 45 - 45 - 90 (escuadra isósceles). Donde el punto C' es la imagen simétrica del punto C con respecto a la recta (o el doblez) LM.

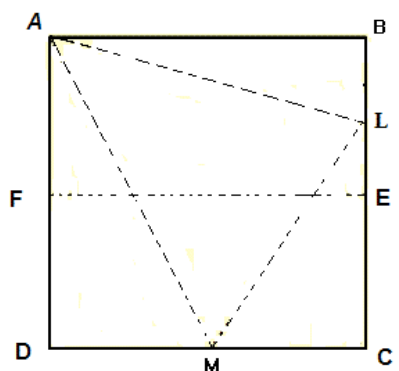


Actividades a desarrollar con el recurso

Las actividades didácticas que a continuación se propondrán han tenido en consideración solamente la construcción de la herramienta triangular con doblado de papel.

1) *Reconocimiento de figuras geométricas.*

a) Dada la siguiente figura:



Y considerando cada doblez efectuado, identificar las siguientes figuras: ángulos rectos, ángulos agudos, ángulos congruentes, ángulos complementarios, ángulos suplementarios,

ángulos opuestos por el vértice, ángulos que forman un par lineal, triángulos semejantes, segmentos paralelos, ángulos alternos internos, etc. Y, seguidamente, completar la tabla dada:

Ángulos rectos	
Ángulos agudos	
Ángulos congruentes	
Ángulos complementarios	
Ángulos suplementarios	
Ángulos opuestos por el vértice	
Ángulos que forman un par lineal	
Triángulos semejantes	
Segmentos paralelos	
Ángulos alternos internos	

b) Clasificar los triángulos que se forman según las medidas de sus ángulos internos.

2) *Determinación de la medida de algunos ángulos.*

a) Encontrar la medida de cada uno de los ángulos formados por los dobleces. Escriba la medida de cada ángulo sobre los triángulos correspondientes en su herramienta y guárdelo para utilizarlo como referencia. Es importante que se justifique la respuesta dada.

b) Describiremos una manera de hallar la medida de cada ángulo presente en la herramienta triangular:

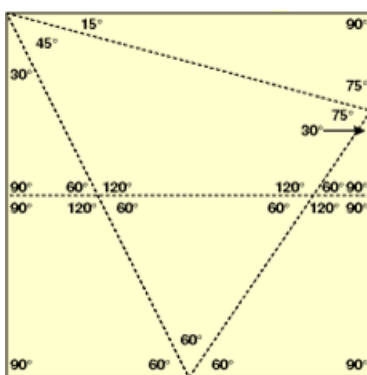
Las primeras medidas evidentes son las de los ángulos rectos presentes en los vértices B, C y D (esquinas del cuadrado de papel), y los puntos E y F.

Estudiando la congruencia de ángulos mediante la superposición de figuras, se logra evidenciar que los segmentos AM y AH trisecan al ángulo recto formado en el vértice A; es decir que los ángulos DAM, MAH y HAB son congruentes y, por ende, cada uno de ellos mide 30° . Asimismo, el segmento (o doblez) AL biseca al ángulo HAB; de modo que los ángulos BAL y LAH miden 15° . Y mediante la adición de las medidas de los ángulos MAH y LAH se obtiene que el ángulo MAL mide 45° .

Aplicando el teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, afirmamos que las medidas de los ángulos AMD y ANF miden 60° y que el ángulo ALB mide 75° . Además, aplicando propiedades de ángulos opuestos por el vértice, ángulos alternos internos y par lineal se logra encontrar las medidas de los demás ángulos que se han formado con los dobleces.

Se puede observar que mediante la superposición de figuras, haciendo uso del doblado de papel que los tres ángulos con vértice en M son congruentes y, por ello, cada uno mide 60° . De esta manera concluimos que los diferentes ángulos en la herramienta de medición son: 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , 105° , 120° y 150° .

Nótese que los ángulos DAM y FAN son idénticos, ya que, el punto F está en el lado AD y el punto N está en el lado AM y, por ende, ambos miden 30° . Esto pudiera contribuir a que los estudiantes perciban que no importa el “tamaño de la región angular” al momento de medir un ángulo; es decir que no depende de la prolongación de sus lados: si éstos se prolongan, el ángulo sigue teniendo la misma medida. En ciertas ocasiones, algunos de nuestros estudiantes consideran que al prolongar los lados de un ángulo, éste aumenta su medida.



3) Construcción de figuras geométricas.

a) Usar la herramienta para medir ángulos internos y externos en diferentes polígonos y para dibujar ángulos agudos, obtusos y rectos. Para medir algunos de los ángulos, necesitará la combinación de dos herramientas.

b) Empleando varias herramientas triangulares, recortar los triángulos semejantes y sobreponer entre ellos los ángulos que tienen igual medida.

Algunas habilidades geométricas⁵ que pudieran ser desarrolladas por los estudiantes

⁵ Para una mayor descripción de las habilidades geométricas, consultar Bressan (2002).

Habilidad Visual	La habilidad visual está relacionada con la capacidad de observación que posee un individuo. En el caso del aprendizaje de la Geometría, esto contribuye a la identificación en objetos del entorno, dibujos y construcciones (como las realizadas con el doblado de papel), de las figuras y los cuerpos geométricos, así como al reconocimiento de propiedades geométricas de objetos físicos (segmentos y ángulos congruentes, triángulos semejantes, ángulos rectos, etc.). (actividades 1, 2 y 3).
Habilidad Verbal	Entenderemos a la habilidad verbal como la competencia del alumno para leer, interpretar y comunicar información (en este caso geométrica), en forma oral y escrita, usando el vocabulario y los símbolos del lenguaje matemático en forma adecuada. Al ejecutar cada actividad, los estudiantes deben justificar sus procedimientos y conclusiones, los razonamientos variarán de acuerdo a los ángulos medidos. Se debe estimular a los estudiantes para que compartan sus argumentos, expresen e interpreten correctamente el vocabulario geométrico (actividades 1, 2 y 3).
Habilidad de dibujo	Las representaciones o modelos geométricos externos confeccionados por el docente o realizado por los propios alumnos no sólo sirve para evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino también son medios de estudio de propiedades geométricas, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento. El estudiante desarrollará la habilidad de dibujo al trazar o construir ángulos de diferentes medidas utilizando la herramienta triangular (actividad 3).
Habilidad Lógica	Las habilidades lógicas están relacionadas con las habilidades de razonamiento analítico, es decir, las necesarias para desarrollar un argumento lógico. Actividades tales como inferir de qué objeto geométrico se trata dadas determinadas propiedades, clasificar objetos geométricos por sus atributos, extraer reglas y generalizaciones a partir de varios ejemplos e identificar el conjunto mínimo de propiedades que definen una figura; contribuyen a desarrollar en los estudiantes el razonamiento lógico. Al explorar la herramienta triangular se puede iniciar al estudio el Teorema de Thales, conjeturar que los triángulos equiláteros son equiangular, la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es igual a 180, clasificar triángulos aplicando los dos criterios de clasificación (actividad 2).

Consideraciones Finales

Se logró construir un recurso didáctico con un material de fácil acceso que se puede implementar en distintos niveles educativos, que además de mejorar el ambiente de aprendizaje, evita que los conceptos aprendidos por los estudiantes no se queden únicamente en el proceso memorístico, sino que trascienda a su realidad inmediata. La metodología utilizada permite que el estudiante experimente un constante proceso de descubrimiento y construcción de conocimientos a través de la manipulación de material didáctico (papel) como herramienta facilitadora del aprendizaje de la geometría.

Considerando los niveles de razonamiento geométricos propuestos por Van Hiele, algunas investigaciones realizadas por docentes adscritos al Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías⁶ (CEINEM – NT) han evidenciado que muchos de los estudiantes no se encuentran ni siquiera en el nivel 1 y los

⁶ El CEINEM-NT tiene su sede en el Departamento de Matemática de la UPEL-Maracay.

docentes quieren que trabajen en el nivel 4 con el rigor formalista de niveles universitarios (Linares, 2008; Pérez, 2008 y Sánchez, 2008). Con la herramienta didáctica descrita en este artículo podemos conducir a nuestros estudiantes por los tres primeros niveles de formalización matemática, cuyo soporte todavía se apoya en la experimentación concreta. En concordancia con Nasser (1991), antes de dar o hacer demostraciones formales, lograremos que el alumno crea o acepte que las propiedades son verdaderas a través de experiencias con material concreto, en nuestro caso el papel.

Referencias

- BRESSAN, A. M.; BOGISIC, B. y CREGO, K. **Razones para enseñar geometría en la educación básica**. Mirar, construir, decir y pensar. Buenos Aires: Novedades Educativas, 2000.
- FRANCO, B. **Unfolding Mathematics With Unit Origami**. Key Curriculum Press, 1999, p. 26 - 31.
- HOFFER, A. Geometry is More Than Proof. **Mathematics Teacher**, enero 1981, p. 11 – 18. Traducción de Ricardo Barroso. Disponible en:
<http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html>.
- IGLESIAS, M. **Curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora**. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay, 2000.
- MEZA, L. G. Y LEÓN CASTELLÁ, A. **Herramienta triangular para medir ángulos**. Fundación CIENTEC, 2000. Disponible en:
<http://www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html>
- LINARES, O. **Evaluación de una unidad didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje del Teorema de Pitágoras en un ambiente de Geometría Dinámica**. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay, 2008.
- NASSER, L. O Desenvolvimento do raciocínio em geometria. **Boletim GEPEM**, 27, 1990, p. 93 – 99.

NASSER, L. Níveis de Van Hiele: Uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria? **Boletim GEPEM**, 29,1991, p. 31 – 35.

PÉREZ, J.C. **La calculadora graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría de la Circunferencia y del Círculo a nivel de 7º grado de educación básica.** Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay, 2008.

SÁNCHEZ, R. **El plegado de papel y las construcciones con regla y compás en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría del Triángulo a nivel de 7º grado de educación básica.** Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay, 2008.

VILLANUEVA DE MOYA, M. E. *La papiroflexia como recurso didáctico en la enseñanza de la Geometría.* Documento en línea, 2009. Disponible en: <http://www.scribd.com/doc/16664732/LA-PAPIROFLEXIA-COMO-RECURSO-LUDICO-EN-LA-GEOMETRIA-2009>.

Submetido em agosto de 2010.
Aprovado em outubro de 2010.