Seção Especial

EPISTEMOLOGIA DOS NÚMEROS RELATIVOS[1]

Georges Glaeser

Universidade Louis Pasteur, Estrasburgo

Minus times Minus equals Plus:
The reason for this we need not discuss.[2]

RESUMO

Para poder afirmar que a "regra dos sinais" (- por - = +, - por + = -, etc.) não apresenta qualquer dificuldade à compreensão, foi preciso esperar mais de 1500 anos. Um minucioso estudo de textos dos melhores autores - de Diofantes aos nossos dias - permitiu a identificação de alguns dos obstáculos que se opunham à compreensão dos números negativos. Pretendemos que, através de experiências diversas, se pesquise a possibilidade de as dificuldades vividas por Euler ou d'Alembert serem as mesmas que perturbam os jovens estudantes de hoje.

Palavras-chave: número inteiro, obstáculo epistemológico, história da matemática.

EPISTEMOLOGY OF THE RELATIVE NUMBERS

ABSTRACT

To affirm that the 'rule of signs "(- by - = +, - by + = -, ...) does not present any difficulty to understand, it took more than 1500 years. A detailed study of texts of the main authors - from Diophantus to the present day - has allowed the identification of some of the obstacles that opposed the understanding of negative numbers. We intend, through various experiences, to search if the difficulties experienced by Euler and d'Alembert were the same of the young students of nowadays.

Keywords: integer number, epistemological obstacle, history of mathematics.

* * *

[1] Artigo originalmente publicado no Boletim Gepem 17 (1985).
[2] Dístico mnemónico usado no ensino inglês.

Um dos mais importantes objetivos da didática da Matemática é determinar os obstáculos [3] que se opõem à compreensão e ao aprendizado dessa ciência.

Ela utiliza métodos científicos que comportam, de um modo geral, duas fases: na primeira, o pesquisador coleta um *corpus*, constituído pela produção escrita ou oral dos indivíduos estudados. A seguir, essa documentação é trabalhada, para que se possam formular conclusões sobre a existência, a natureza e a localização das diversas *barreiras* a transpor.

Os *métodos experimentais* preparam, em especial, situações didáticas que facilitem tais produções. É disto que se trata na maior parte dos artigos publicados nesta revista.

Os *métodos históricos e epistemológicos* pesquisam esse *corpus* nos vestígios do passado. Trabalham sobre documentos deixados por grandes matemáticos, ou por representantes típicos da comunidade científica de épocas determinadas. Esta abordagem é aplicada aqui à análise das dificuldades encontradas no *estudo dos números relativos*.

I. A regra dos sinais é assim tão difícil?

A introdução conceitual dos números re lativos foi um processo surpreendentemente len to. Durou mais de 1500 anos, da época de Dio fantes aos nossos dias! Durante todo esse tempo, os matemáticos trabalharam com números relativos, tendo deles apenas uma *compreensão parcial*, com espantosas lacunas.

A amplitude deste fenômeno parece haver escapado à sagacidade dos historiadores, mais afeitos a estabelecer fatos isolados do que projetar uma visão de conjunto sobre um processo tão demorado.

---

[3] Desde que Gaston Bachelard (1938) destacou a noção de obstáculo epistemológico (em relação â Física), muitos autores tentaram delimitar essa ideia, precisá-la e adequá-la à Matemática. Após Guy Brousseau, eu mesmo em preendi algumas tentativas nesse sentido.

Neste artigo, as palavras "obstáculos, dificuldade, barreira e sintoma" são empregadas com simplicidade. Estou certo de que é prematuro atrelar estes conceitos a formulações muito rígidas. Só após a execução de numerosos trabalhos, estaremos em condições de julgar as distinções cabíveis, úteis para o desenvolvimento da didática experimental. Serão então rejeitadas aquelas que, sedutoras *a priori*, possam constituir o tipo de "conhecimento mal feito" capaz de opor obstáculos ao progresso.

Muitos professores não percebem que a aprendizagem da regra dos sinais possa comportar dificuldades.

"É claro, pensam eles, que, se um aluno não entende nada de Matemática, fracassará aí como em todos os outros pontos. Mas os números relativos não têm nada de particularmente difícil".

Há nuitos trabalhos didáticos sobre a análise dos conceitos numéricos. Hans Freudenthal, por exemplo, dedicou 160 páginas de sua obra clássica (Freudenthal, 1973) ao exame das numerosas dificuldades observadas na aprendizagem dos números. Todavia, ele mal se refere à regra dos sinais. A leitura das páginas 279/281 de seu livro nem sequer sugere que ele se tenha apercebido do extraordinário fenômeno aqui estudado.

Esse estranho esquecimento é facilmente explicável. À época em que escreveu o livro, Freudenthal escolhia os temas de suas análises didáticas entre suas observações pessoais. Ora, nenhum matemático da sua geração (nem da nossa) se lembra de haver sido confundido pela regra dos sinais [4]. Vinte anos antes, as coisas eram diferentes.

Jean Piaget, ao contrário, embora baseando sua didática em uma filosofia pessoal, mostrou-se sensível às observações feitas sobre crianças. Por isso mesmo, a dificuldade concernente aos números relativos não lhe escapou. Nas páginas 110/115 (Piaget, 1949), ele consagra um denso comentário às dificuldades provocadas pelos números relativos. Cita também o surpreendente texto de d'Alembert que examinaremos adiante. Sua admiração provoca uma reflexão didática. Ele se espanta com o fato de que o matemático-enciclopedista "viesse a julgar obscura a noção de quantidade negativa", sem notar que isto ocorreu com *todos os matemáticos* até o século XIX! Limita-se a afirmar que a *única* dificuldade se prende ria ao caráter fixo do número, como se o concebia então. Tal obstáculo desapareceria, para Piaget, ao se entender que um número simboliza *uma ação*, não *um estado*.

> Tais hesitações do grande d'Alembert são particularmente instrutivas quanto à natureza ativa e não estática do número negativo e do número inteiro em geral.

---

[4] Há um ano, eu poderia jurar que jamais havia encontrado a menor dificuldade quanto aos números relativos. Atualmente, vejo que o meu primeiro contato com uma prova totalmente formal da regra dos sinais ocorreu por volta de meus 25 anos, quando do surgimento dos primeiros volumes de Bourbaki. Escrevendo este artigo, vaguei de surpresa em surpresa, ao tomar conhecimento das numerosas sutilezas de entendimento sobre o tema que, antes, me passaram despercebidas.

> De fato, está claro que, se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção, ou ainda menos, e percepções nulas não são suscetíveis de gradação. Espantoso é que essa contradição entre a interpretação sensualista do conhecimento e a realidade matemática, não tenha levado um espírito tão voltado para o concreto e pouco dado as considerações mecânicas como d'Alembert a entender que a natureza essencial do número não é nem estática nem perceptiva e, sim, muito dinâmica e ligada à própria ação, interiorizada em operações.

A explicação de Piaget comporta uma grande dose de verdade, porém não esgota o assunto. Citaremos muitos autores que constantemente insistem no caráter dinâmico do número positivo, relacionado sobretudo a atividades de medição.

Tais matemáticos, todavia, têm dificuldade em adotar a mesma atitude diante dos números relativos. Perturbam-se com outros obstáculos não mencionados por Piaget, entre os quais destacamos o que chamamos *"a ambiguidade dos dois zeros"*. Durante séculos os matemáticos se impressionaram com o *zero absoluto*, abaixo do qual nada se poderia conceber. Isto os impediu de manejar com facilidade o *zero origem*, marcado arbitrariamente sobre um eixo orientado. Esta confusão surge, aliás, no curto trecho citado de Piaget, sobre *"ausência de percepção"* e *"gradação de percepções nulas"*.

Muitos são os autores a afirmar que *"nada poderia ser mais imóvel que a imobilidade"*. Para descobrir, a partir daí, o conceito de velocidade negativa, foi necessária toda uma construção intelectual, que só seria verdadeiramente possível muito depois.

No corpo do trabalho, citamos cerca de *vinte autores*. Chegamos a destacar *uma dezena de obstáculos* que se opõem à satisfatória compreensão dos números relativos. Tais obstáculos são revelados por perto de *vinte sintomas*, que nem sempre podem ser relacionados cada um a um único obstáculo determinado.

Vamos, pois, dedicar-nos agora a uma meticulosa explicação dos textos, pois só assim se poderá chegar a conclusões variadas. Esta forma de exposição será, contudo, necessáriamente descosida, claudicante, à maneira da *elaboração ziguezagueante da compreensão dos números relativos* através dos séculos.

Se adotarmos, em nosso trabalho, um despojamento cronológico, as transposições de obstáculos aparecerão fora de ordem. Há precursores que cedo superaram esta dificuldade, e retardatários que incorrem nos mesmos erros anteriores.

Pode-se pretender traçar uma classificação estruturada. Esta forma de apresentação tem o inconveniente de elidir numerosos fatos e de introduzir na exposição uma estrutura que esteve ausente do percurso histórico.

Entretanto, para facilitar a leitura, assumimos o risco de propor provisoriamente uma certa visão de conjunto de nosso artigo,sem dissimular o que tal procedimento pode ter de simplista e redutivo. Fica disto advertido o leitor.

Optamos, assim, por indicar desde já *seis dos obstáculos* que serão abundantemente descritos a seguir, e *dez dos autores citados*. Elaboramos, então, um quadro bastante esquemático, inserindo nas casas os sinais + ou -, para indicar se o autor, pelo texto citado, terá ou não conseguido transpor a barreira.

Trata-se de uma codificação sumária, que, aliás, encaramos com reservas, mas que oferece a vantagem de fornecer uma referência provisória à leitura que se seguirá.

LISTA PROVISÓRIA DE ALGUNS OBSTÁCULOS

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
4. A ambiguidade dos dois zeros (v. fls. 36).
5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
6. Desejo de um modelo unificador.

É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. Comentários mais precisos estão disseminados por este artigo. Basta-nos, como exemplo, assinalar que a passagem citada por Piaget faz alusões (conscientes ou não) aos obstáculos 3 e 4.

Ver quadro mais adiante.

Os pontos de interrogação designam os casos em que não pudemos responder, seja porque os textos citados não foram suficientes para nos esclarecer, seja porque a simplificação do código adotado provisoriamente não permite a apresentação de nuanças que serão examinadas mais adiante.

O quadro, embora sumário, já nos revela fatos interessantes. Ele evidencia bem o *caráter parcial* da compreensão adquirida pelos matemáticos clássicos citados. Ainda que manipulassem os números relativos com uma engenhosidade digna de admiração, enquanto *todos* os obstáculos não foram vencidos, subsistiram vastas áreas de incompreensão; o sucesso não era assegurado de maneira estável.

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	-					
SIMON STEVIN	+	-	-	-	-	-
RENÉ DE SCARTES	+	?	-	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	-	-	+	+
LEONARD EULER	+	+	+	?	-	-
JEAN D'ALEMBERT	+	-	-	-	-	-
LAZARE CARNOT	+	-	-	-	-	-
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	-	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	-	-	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

Parecia-me, no início de minhas pesquisas, que o progresso crucial foi a transposição das barreiras (5) e (6). O quadro nos mostra, contudo, o caso de MacLaurin, que cumpriu essas etapas, mas, por não dominar (3) e (4), não atingiu o objetivo.

E como a insuficiente clareza não lhe permitiu convencer definitivamente seus leitores, os progressos que obteve ficaram provisoriamente perdidos para a posteridade.

Lazare Carnot, ao contrário, formulou com muita nitidez tudo que lhe parecia incompreensível na ideia de número negativo, tornando-se um dos mais eficientes artífices do sucesso final.

II. Um sintoma

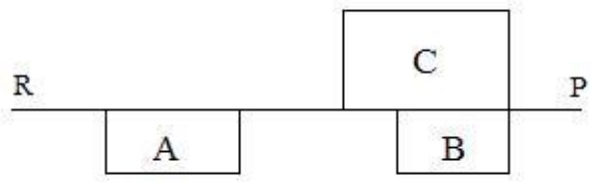
Enveredei pelo caminho aqui explorado, lendo "A vida de Henri Brulard (Stendhal, 1835)", 16 autobiografia de Stendhal (1783-1843), cujo nome verdadeiro era Henri Beyle. Este escritor participou das primeiras promoções da Escola Central de Grenoble, uma das primeiras instituicões em que o ensino da Matemática foi ministrado a partir dos 13 anos de idade. O jovem Henri ali estudou dos 14 aos 17 e evoca, no livro, passagens de sua escolarização. É um testemunho particularmente precioso (talvez único) sobre o que seriam os primeiros contatos de um adolescente com o ensino recentemente institucionalizado da Matemática.

Ora, nem o ensino recebido, nem a leitura do célebre manual de Bezout (1772) chegaram a satisfazer a curiosidade do jovem aluno quando ele quis compreender a origem da regra dos sinais. Seus professores, eles próprios, não a compreendiam! Eles não tentavam nem compreender, nem explicar. Contornavam a dificuldade apresentando o tema sob a forma de um dogma revelado: "cada proposição no Bezout, escreve Stendhal, tem o aspecto de um grande segredo ouvido de uma velha vizinha".

Eis seu testemunho:

> "Para mim, a hipocrisia era impossível em Matemática e, na minha simplicidade juvenil, eu pensava que isto era assim em todas as ciências nas quais ouvira dizer que ela se aplicava. Como fiquei, quando percebi que ninguém me podia explicar como é que menos por menos dá mais (- x - =+) ? (Esta é uma das bases fundamentais na ciência a que chamamos "Álgebra") .
> Faziam pior do que não me explicar essa dificuldade (que é, sem dúvida, explicável, visto que conduz à verdade); explicavam-na por razões evidentemente pouco claras para aqueles que as apresentavam. Pressionado por mim, o Sr. Chabert se embaraçava, repetia sua "lição", exatamente aquela contra a qual eu levantava objeções, e terminava tendo a coragem de dizer-me: 'Mas é o costume, todo mundo admite esta explicação. Euler e Lagrange, que aparentemente valiam tanto quanto o senhor, admitiam-na muito bem'.
> Levei muito tempo para convencer-me de que minha objeção sobre o - x - = + não podia absolutamente entrar na cabeça do Sr. Chabert; e o que o Sr. Dupuy sempre me responderia com um sorriso superior apenas; e que os "grandes" a

> quem eu fazia perguntas sempre caçoariam de mim.
> Limitei-me ao que, ainda hoje, digo a mim mesmo: é indispensável que - por - dá + seja verdadeiro, pois, evidentemente, empregando a todo momento esta regra no cálculo, chegamos a resultados "verdadeiros e indubitáveis".
> Minha grande desgraça era esta figura:



> Suponhamos que RP seja a linha que separa o positivo do negativo, tudo que está em cima é positivo, como negativo é tudo que esta em baixo; tomando o quadrado B tantas vezes quantas são as unidades no quadrado A, como posso fazer o quadrado C mudar de lado?
> E, fazendo uma comparação desajeitada, que o sotaque arrastado de Grenoble do Sr. Chabert tornava ainda mais desajeitada, suponhamos que as quantidades negativas são as dívidas de um homem. Multiplicando-se 10.000 francos de dívida por 500 francos de dívida, como esse homem possuirá, ou conseguirá obter, uma fortuna de 5.000.000?"

Vê-se que aqui Stendhal e seus professores esbarraram duas vezes no obstáculo (4). O modelo comercial que facilita a compreensão da multiplicação.

Este texto é apenas um sintoma de uma incompreensão cuja história iremos seguir século por século.

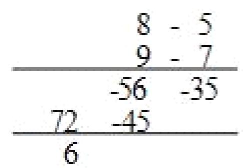
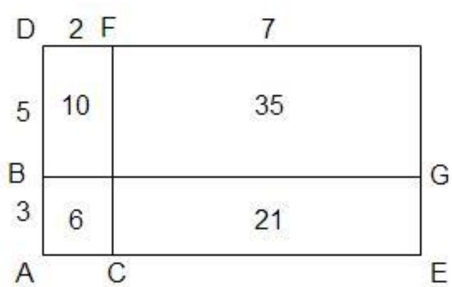
III. Um pouco de História

A origem da regra dos sinais é atribuída geralmente a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C). Esse autor *não faz qualquer referência aos números negativos*. No entanto, no inicio do Livro I da sua "Aritmética" (Diofantes), aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, ele escreve:

> "O que está *em falta* multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está *em falta* multiplicado pelo que é positivo, dá o que está *em falta*".

Embora ele não oferecesse demonstração, esta já estava ao alcance dos antigos gregos. Os comentadores ou tradutores de Diofantes nã o tiveram problemas para redigir uma prova.

Eis, por exemplo, como ela se apresenta na "Aritmética" de Simon Stevin, publicada em (Stevin, 1634):

> "Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos.
>
> Explicação do dado:
> Seja 8-5 multiplicado por 9-7, deste modo: - 7 vezes -5 faz + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - por -, faz +). Depois - 7 vezes 8 faz -56 (-56, porque, como está dito no teorema, - por +, faz -).
> E similarmente seja 8-5 multiplicado pelo 9, e darão produtos 72 - 45; depois juntem +72+35, fazem 107. Depois juntem os -56 - 45, fazem -101; e subtraído o 101 de 107 resta 6, para produto de tal multiplicação. Da qual a disposição dos caracteres da operação é este ao lado:
>
> 
>
>
> Explicação do quesito:
> É preciso demonstrar pelo dito dado, que + multiplicado por +, faz +, e que - por -, faz +, e que + por -, ou - por + faz -.
>
> Demonstração:
> O multiplicador 9-7 vale 2; mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto ao lado acima, também 6, é o verdadeiro produto; mas o mesmo é obtido por multiplicação, lá onde dissemos que + multiplicado por +, dá produto +, e - por - dá produto +, e + por -, ou - por +, dá produto -, portanto o teorema é verdadeiro.
>
> Outra demonstração geométrica:
> Seja AB 8 - 5 (a saber AD 8 - DB 5).
> Depois AC 9 - 7 (a saber AE 9 - BC 7),
> seu produto será CB;
> ou ainda de acordo com a multiplicação precedente ED 72 - EF 56 - DG 45 + GF 35, os quais nos mostrarão serem iguais a CB desse modo. Em suma, ED + GF, subtraído de EF e DG, resta CB.
>
> 
>
>
> Conclusão:
> Portanto mais multiplicado por mais, dá produto mais. E menos muitiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar."

Observar-se-á que o primeiro argumento é apenas uma verificação sobre exemplo numérico, sem alcance geral. Mas a demonstração geométrica pode servir de base a um desenvolvimento geral de (a-b) x (c-d) = ac - ad - bc + bd. De qualguer forma, não aparecem em Diofantes números negativos isolados. A regra (-) x (-) = (+) só intervêm como um *procedimento transitório,* antes de se obter um resultado "aceitável", ou seja, positivo.

A partir daí, os matemáticos põem-se a calcular, (obstáculo (1) estará definitivamente ultrapassado).

Embora desejassem evitar o emprego dos números negativos, a prática do cálculo vai forçá-los à sua introdução, como intermediários do cálculo. Durante muito tempo eles se espantaram ao perceber que cálculos efetuados com "falsos números" levavam afinal ao resultado exato!

É comum, por exemplo, que, substituindo-se um número positivo ‘a’ em uma identidade polinomial $P(x) \times Q(x) \equiv R(x)$, se obtenha um resultado positivo R(a), sem que P(a) e Q(a) o sejam.

Assim, a prática "clandestina" do cálculo dos números relativos antecedeu em 1600 anos sua *compreensão*. Eis uma lição que a didática da Matemática jamais deveria esquecer!

Para alguns matemáticos pouco escrupulosos, o êxito justificaria o emprego de *números relativos isolados*. Eles aparecem em *Brahmagupta* (séc. VII d.C.) (Brahmagupta, Bhascara, 1817). As obras indianas da época são apenas coletâneas de sentenças, acompanhadas de exemplos de aplicação numérica. Não há, contudo, preocupação de explicar porque "o negativo multiplicado pelo negativo dá o afirmativo".

Saiba-se que, na Idade Média e no Renascimento, o "Milagre" da eficácia inexplicada de um cálculo com relativos se repete em outros campos. A situação dos números incomensuráveis parece preocupar muito mais os matemáticos que tentam justificar a aritmética e a álgebra.

Simon Stevin (1540-1620) é o mais ilustre dentre estes. Sua ideia de número está expressa na definição:

"Número é aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa".

Ele não se preocupa em provar que os números decimais "rompidos" (isto é, fracionários), irracionais, etc. , intervêm efetivamen te como símbolos de medida. Ele chega a refutar a tese de Euclides, para o qual a unidade não seria um número, e proclama:

> “Concluímos, pois, que não existem números absurdos, irracionais, irregulares, inexplicáveis, ou surdos; e, sim, que, entre eles (os números), há uma tal excelência e coerência, que temos meios de medir a noite e o dia, em sua admirável perfeição”.

Todavia o número negativo isolado não está em sua lista. Ele nada afirma sobre seu direito de existir como símbolo de quantidade. Que significa este silêncio ?

Por outro lado, ao longo de sua obra, ele trata abundantemente de números negativos, utilizados como *artifícios de cálculo*. Justifica-os (como nas demonstrações citadas anteriormente). Aperfeiçoa seu emprego, ao escrever: "Em vez de dizer *diminua* 3, diga acrescente -3".

Seu embaraço, porém, manifesta-se claramente, quando sente necessidade de *interpretar* as raízes negativas de uma equação, e ele faz uma proposição engenhosa, que assim reformulamos: As raízes negativas das equações são as raízes positivas da transformada em -x (ou ainda, se entendemos que -2 é raiz de uma equação $x^2 - px = q$, isto significa que + 2 é raiz de $x^2 + px = q$).

Estamos diante de uma primeira manifes tacão do *sintoma de evitação*. Trata-se de inventar um processo que, na prática, renuncie à utilização dos números negativos.

Atualmente nenhum matemático tem necessidade de propor um tal desvio artificial. Se -2 é um número, do mesmo modo que +2, não tem cabimento arranjar-lhe uma interpretação, como solução para outro problema, proposto *ad hoc*.

Ao longo da história, os matemáticos se atreveriam a *praticar* cada vez melhor o cálculo dos números relativos. Mas, até o fim do século XVIII, as quantidades negativas não tinham adquirido o status de números. Ante sua intempestiva intrusão num cálculo, os sábios se viam às voltas com o problema: "Como me livrar dele?"

Pierre de Fermat (1601-1665), por exemplo, fez com que seu amigo Jacques de Billy (Fermat 1891) redigisse conselhos sobre o comportamento a adotar diante de uma raiz "falsa" em uma equação diofantina. Ele propôs um método para obter dela, em alguns casos, uma solução "aceitável". (Este é outro típico exemplo do *sintoma de evitação*).

Costuma-se elidir uma parte importante do encaminhamento das ideias, atribuindo-se a René Descartes (1596-1650) o emprego de um sistema de coordenadas "cartesianas". Na verdade, ele jamais utilizou um *eixo* sobre o qual a abscissa de um ponto varia de $-\infty$ a $+\infty$. Simplesmente ele considerou *separadamente* duas semirretas opostas, sabendo que as linhas negativas devem se dirigir em sentido oposto ao das linhas positivas. Mas as curvas que traçou limitam-se, em geral, ao primeiro quadrante. Por exemplo: atualmente não se entende por que a cúbica de equação $x^3 + y^3 = 3axy$ se chama "Fólio de Descartes". Com sua assíntota, ela absolutamente não sugere a forma de uma folha. Na realidade, foi o estudo da 1imitação dessa curva ao primeiro quadrante que se tornou um desafio para Fermat em 1638.

Por outro lado, deve-se notar que Descartes dedica *um terço de seu livro* "Geometria" (1628) à arte de se livrar das raízes falsas! Ora, o ilustre autor proclama, por toda a sua obra, que só pretendia ater-se às questões fundamentais, deixando aos seus "sobrinhos" a tarefa de cuidar dos detalhes. Entende-se, pois, que, para ele, o artifício da mudança de origem das abscissas para obter equações com todas as raízes positivas não é uma questão subalterna; é um sintoma de evitação, que revela insegurança diante do uso dos números negativos.

Outro testemunho revelador nos é fornecido pelo "Dicionário Matemático" de Jacques Ozanan, publicado em 1691. No índice, estão enumeradas cerca de vinte espécies de números (entre os quais os números inteiros , "rompidos", incomensuráveis, surdos, etc.) É de crer, portanto, que na época não se cogitava de números negativos. No entanto, na rubrica "raiz", distinguem-se as raízes verdadeiras, falsas ou imaginárias: "A raiz falsa é o valor negado da incógnita da equação". (!?) Esta incoerência contrasta com a relativa clareza que se observa no restante da obra [5].

A partir do século XVII, os números ne gativos aparecem naturalmente nos trabalhos científicos. Eles são aceitos em razão de uma espécie de método Coué: a eficácia do cálculo é suficiente para confortar o matemático em sua fé. Nos trabalhos de cunho pedagógico é

[5] 0 leitor interessado poderá examinar também o início do capitulo LXVI da "Álgebra" de John Wallis (1673) (em latim), cujos excertos traduzidos em inglês figuram no "Source Book" de Smith. Wallis fala de *números negativos*, mas apresenta muitos sintomas de incompreensão análogos aos que citamos nos outros autores.

que se manifestam os apuros. O erudito não consegue dar uma explicação a seu ver satisfatória. Não pode, contudo, confessar decentemente sua fraqueza e abusa de circunlóquios ricos em formas gramaticais negativas. Eis aí um *sintoma* encontrado em quase todos os autores que citamos (exceto, talvez, em Clairaut, que sempre escreve com autoridade!).

Este sintoma aparece nos trabalhos de Colin MacLaurin. No "Tratado dos Fluxos (1742), ele escreve:

> "O uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas consequências difíceis de admitir, em princípio, e que propiciara ideias aparentemente sem qualquer fundamento real".

Mais além, ao final de um discurso confuso, o autor esbarra brutalmente contra o obstáculo (3), condenando o emprego da relação entre números positivos e negativos, considerados como quantidades incomparáveis heterogêneas! (Argumento em termos quase idênticos pode ser visto em textos de d'Alembert e Carnot, citados mais adiante).

O “Tratado de Álgebra", publicado em 1748, dois anos após a morte de MacLaurin, tornou-se uma obra de referência, na Grã-Bretanha, como no continente europeu. Eis como ele apresenta as quantidades negativas:

> "Chamam-se quantidades *positivas*, ou *afirmativas*, as que são precedidas do sinal +, e *negativas*, as que são precedidas do sinal -. Para se ter uma ideia clara e exata desses dois tipos de quantidades, deve-se notar que toda quantidade pode entrar num cálculo algébrico, acrescentada, ou subtraída, ou seja, como aumento, ou como diminuição; ora, a oposição que se observa entre aumento e diminuição ocorre na comparação das quantidades. Por exemplo: entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o do dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada à direita, e uma linha traçada à esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que quanto a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor”.

O leitor perceberá que o obstáculo da passagem ao dinâmico assinalado por Piaget aí está perfeitamente ultrapassado! Mas a compreensão está longe de ser adquirida, sob o efeito dos obstáculos (3) e (4), visivelmente não transpostos.

Entretanto o autor reconhece implicitamente que o que é absurdo de fazer com o zero absoluto (duas últimas linhas) é perfeitamente legtimo com um zero origem. Mais adiante, ele enuncia a regra dos sinais, comentando-a nestes termos:

> "Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que *os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -*. Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão - por - dá +, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade.
>
> $+a - a = 0$; assim, multiplicando +a por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por n, terei como primeiro termo $+na$, portanto o segundo será $-na$, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão - no produto. Se multiplico $+a - a$ por $- n$, de acordo com o caso precedente, obterei $-na$ como primeiro termo; logo terei $+na$ como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo - multiplicado por - dá + no produto".

O texto revela um progresso considerável, ao abordar *formalmente* a demonstração da regra dos sinais. A ligação com *distributividade* em relação à adição é implicitamente bem deduzida.

Pode-se perguntar até que ponto MacLaurin adota o ponto de vista formalista. A passagem que acabamos de citar já revela uma nítida vantagem do autor sobre todos os demais matemáticos até o século XIX.

O início de seu tratado dos fluxos(1742) é bem mais explícito:

> "A Matemática trata das relações entre as quantidades e de todas as suas propriedades, que podem ser submetidas a uma regra ou medida".

E, algumas linhas adiante:

> "Nesta ciência, examinan-se as relações das coisas, mais do que suas essências interiores, isto porque podemos ter "uma ideia clara do que seja o fundamento de

> uma relação, sem ter uma ideia perfeita e inteira dos atributos de uma coisa. Nossas ideias sobre as relações são geralmente mais claras e mais distintas do que sobre as próprias coisas que mantém essas relações; e principalmente a isto que devemos atribuir a evidência particular da Matemática. Não é preciso que os objetos de nossas teorias sejam descritos na atualidade, nem que eles existam fora de nós; mas é essencial que suas relações sejam claramente concebidas e evidentemente deduzidas; é também preferível dedicar-se particularmente a considerar aquelas e que podem aumentar nossos conhecimentos em Física".

Não parece estar lendo Hilbert ou Bourbaki ? Observe-se, particularmente a passagem em que ele aceita os objetos matemáticos, descritos em termos de estrutura, sem exigir "que eles existam fora de nos" [6].

Mas as passagens citadas antes disto também demonstram que esse espetacular progresso não bastou a McLaurin para adquirir uma compreensão completa. Esbarrando nos obstáculos (3) e (4), ele é incapaz de apresentar a teoria dos números relativos com todo o desembaraço desejável. Os leitores não suspeitaram de que MacLaurin *quase* compreendeu os números relativos. Seu avanço histórico seria provisoriamente perdido para a posteridade.

Enquanto todas as facetas do problema não forem simultaneamente dominadas, corre-se sempre o risco de uma recaída na incompreensão.

Léonard Euler (1707-1783) foi, seguramente, um virtuose do cálculo. Em seus artigos científicos, ele maneja os números relativos e complexos com engenhosidade e arrojo, sem levantar muitas questões a respeito da legitimidade de suas construções. No entanto, em uma obra destinada a principiantes (Euler, 1770), a intenção pedagógica o fez sentir-se obrigado a fornecer explicações, tentando, especificamente, *justificar a regra dos sinais*. Sua argumentação pode ser dividida em três partes:

1. A multiplicação de uma *dívida* por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de *a* escudos fazem uma dívida de 3*a* escudos. Logo b x (-a)= -ab.

— Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma *operação externa*. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.

[6] Na edição inglesa do "Tratado dos Fluxos" (1742), essa profissão de fé é acompanhada por uma nota que remete ao "Ensaio sobre o entendimento humano"(Livro 2, cap. 25). Deve-se concluir daí que Locke é o pai de Bourbaki ?

2. Por comutatividade, Euler deduz daí que (-*a*) x *b* = -*ab*.

— Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de a escudos ?

3. Resta determinar o que é (grifo nosso) o produto (-*a*) por (-*b*).

— É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto de decidir entre +*ab* e -*ab*. Como (-*a*) x *b* já vale -*ab*, a única possibilidade restante é de que (-*a)* x (-*b*) = + *ab*. (!!!)

Essa acrobacia não ultrapassa o nível da vulgarização. Mas se Euler não apresenta aqui melhor justificativa para a regra dos sinais, é porque, sem dúvida, não conhecia outra mais válida. A mesma obra revela ainda outro obstáculo, que Euler (e muitos outros) não conseguiu transpor e que se refere à incompreensão da unificação da reta numérica. Euler declara que a representação de um *número negativo* é uma letra precedida do sinal -.

Atualmente, em vez disso, o símbolo -*x* designa o *oposto* do número *x* (de sinal indeterminado). A convenção explicitamente enunciada por Euler entra, aliás, em contradição com sua prática cotidiana: o ilustre analista jamais hesita em substituir, num polinômio ou uma série inteira, uma variável por um valor negativo ou imaginário.

As resultantes incoerências de linguagem são particularmente nítidas no seguinte texto de Gabriel Cramer, contemporâneo de Euler. Percebe-se que, no segundo parágrafo deste excerto, a letra *x* muda várias vezes de significado, enquanto se supõe que o parâmetro *a* seja implicitamente positivo!

> "Assim, na Curva que representa a equação xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0, ou y = (xx)/6a + x + (5a)/6 (§. II), a equação mostra que, na Origem, onde x é zero, o valor de y é (5a)/6.
> Aa = (5a)/6 é, pois, a grandeza da *primeira ordenada*. Supondo, a seguir, x positivo, vê-se que, à medida que ela aumenta, os termos (xx)/6a e x também aumentam, sem que o termo constante (5a)/6 diminua; o que prova que a abscissa x crescendo, a ordenada y = (xx)/6a + x + (5a)/6, que é positiva, também cresce. Portanto, do lado das abscissas positivas, a Curva tem apenas um ramo ad, que incide totalmente no ângulo das coordenadas positivas, e que, partindo da extremidade a da primeira ordenada Aa, tende ao infinito afastando-se do Eixo das abscissas e do Eixo das ordenadas.
> Para conhecer o curso desta Linha do lado das abscissas negativas, faz-se x negativo, o que muda a equação y = (xx)/6a + x + (5a)/6 em y = (xx)/6a - x + (5a)/6. Onde se vê que sendo x menor que 6a, (xx)/6a é menor que x, de modo que o termo constante (5a)/6 é menos aumentado pelo termo positivo (xx)/6a do

que diminuído pelo termo negativo -x". (Cramer, 1750)

Aqui a obscuridade se situa unicamente no nível da linguagem: entende-se perfeitamente o que o autor quis dizer. O discurso confuso é apenas um sintoma de uma incompreensão mais profunda: a recusa de raciocinar sobre números negativos, heterogêneos aos positivos.

Observamos no texto que a mudança de variável x → -x permite a Cramer, na última fase, *raciocinar sobre desigualdades*. É preciso saber que os sinais < e > foram introduzidos em 1631 nos livros do inglês Thomas Harriot (Cajori, 1928), e a análise infinitesimal levaria à prática das majorações. Até o fim do século XIX, todavia, o repertório de conhecimentos transmitidos aos iniciantes não incluía a *resolução de inequações*. (A obra mais antiga que encontrei, na qual um capítulo especial é dedicado às desigualdades é um tratado de Álgebra de Joseph Bertrand (1870). Ali está enunciada e demonstrada a regra da inversão das desigualdades, por multiplicação dos dois membros por um fator negativo). (V. também Bourdon, 1834).

É claro que, na época de Euler, já se sabia muito bem racionar sobre majorações. Recorria-se, porém, toda hora, a artifícios, análogos ao que Cramer utilizou para evitar a comparação de números relativos.

Os trabalhos de Alexis Clairaut (1713—1765) não facilitam, absolutamente, a investigação epistemológica. Este autor adota uma estratégia pedagógica que consiste em desenvolver abundantemente tudo que lhe parece perfeitamente claro, e passar por cima, sistematicamente, de todas as questões que atormentavam seus contemporâneos. Na falta de documentação, não nos arriscaremos a mencionar as barreiras que Clairaut não conseguiu transpor.

Apresentamos, todavia, uma passagem dos seus "Elementos de Álgebra" (1749), em que ele se manifesta a respeito de um tema que conseguiu entender totalmente:

> "Alguém irá perguntar talvez se podemos juntar negativo com positivo, ou antes se podemos afirmar que acrescentamos o negativo. A isto respondo que a expressão é exata, se não confundirmos juntar com aumentar. Se, por exemplo, duas pessoas juntam os seus bens, quaisquer que eles sejam, eu diria que estariam acrescentando esses bens. Se um deles tem dívidas e créditos efetivos, e se as dívidas superam os créditos, suas posses serão negativas. O acréscimo de seus bens aos do outro diminuiria os bens deste, de tal modo que a soma resultaria

> menor do que as posses do outro, ou mesmo inteira mente negativa".

Em outras passagens, Clairaut aborda a questão da significação das *raízes negativas* de um problema. Analisando um "problema de torneiras", conclui que a fonte está "tirando água do reservatório", em vez de fornecê-la.

Ora, nessa época e mesmo mais tarde, o surgimento de uma raiz negativa era apresentado, não como solução do problema, mas como indicação de uma *questão mal formulada*. Lê-se, por exemplo, num manual de Álgebra de Bourdon (1834):

> "Todo valor negativo encontrado para a incógnita de um problema do primeiro grau indica um vício de sentido nas condições do enunciado, ou, pelo menos, na equação que o traduz algebricamente (observem a explicação que se segue). Esse valor, abstraído seu sinal, pode ser entendido como a resposta a um problema cujo enunciado não difere do problema proposto, a não ser pelo fato de que algumas quantidades, antes aditivas, tornam-se substrativas, e assim reciprocamente".

Assim, pois, a obtenção de uma raiz negativa é considerada como um acidente fácil de superar. Atualmente, ela é uma solução perfeitamente desejável. Vejam como mudou.

Destaque-se que Euler, na obra citada, propõe numerosos exercícios e os desenvolve no texto. É que ele dá um jeito para que todos os exemplos de equações do primeiro grau tenham apenas raízes positivas. Isto o dispensa de levantar a questão. Por outro lado, Euler admitiu em seu texto algumas equações quadráticas com raiz negativa. Mas, nestes casos, não faz qualquer comentário, sem prever que o leitor, esbarrando nessa dificuldade pela primeira vez, poderia confundir-se.

Resumindo, nós encontramos textos em que grandes sábios revelam, com maior ou menor *es*pontaneidade, índices de incompreensão do tema, tão banal, dos números relativos. E nossa surpresa cresce diante das sínteses de d'Alembert e Carnot, que não hesitaram em *ostentar a sua incompreensão* sem a menor inibição.

O texto mais revelador da confusão que reinava no fim do século XVIII é, certamente, o artigo *Negativo*, que d'Alembert (1717-1783) escreveu para a Enciclopédia de Diderot. Segue-se um excerto:

> "As quantidades negativas são o contrário das positivas: onde termina o positivo,

começa o negativo. *Veja POSITIVO*.

Deve-se confessar que não é fácil fixar a ideia das quantidades negativas e que algumas pessoas engenhosas chegaram a contribuir para confundí-la, pelas noções pouco exatas que divulgaram. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber. Os que pretendem que 1 não é comparável a -1 e que a relação (razão) entre 1 e -1 é diferente da razão entre -1 e 1 incidem num duplo erro: 1º - porque, todos os dias, nas operações algébricas, dividimos 1 por -1; 2º - a igualdade do produto de -1 por - 1, e de + 1 por + 1 revela que 1 está para - 1 assim como - 1 está para 1.

Considerando a exatidão e a simplicidade das operações algébricas com quantidades *negativas*, somos levados a crer que a ideia precisa que se deve fazer das quantidades negativas é uma ideia simples, não dedutível, absolutamente, de uma metafísica alambicada. Para tentar descobrir a verdadeira noção, deve-se, primeiro, notar que as quantidades a que chamamos *negativas* e que falsamente consideramos como abaixo de zero, são comumente representadas por quantidades reais, como na Geometria, onde as linhas *negativas* só diferem das positivas por sua situação em relação a qualquer linha no ponto comum. *Veja CURVA*. Daí, é natural concluir que as quantidades *negativas* encontradas no cálculo são, de fato, quantidades reais, mas quantidades reais a que se deve associar uma ideia diferente daquela que fazíamos. Imaginemos, por exemplo, que estamos procurando o valor de um número x, que somado a 100 perfaça 50. Pelas regras da Álgebra, teremos $x + 100 = 50$ e $x = - 50$. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Enunciaríamos, portanto, o problema dessa maneira: encontrar uma quantidade *x* que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos $100 – x = 50$, e $x = 50$, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades *negativas*, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. 0 sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. *Veja EQUAÇÃO*.

Note-se que estamos falando de quantidades *negativas* isoladas, como -a, ou das quantidades a - b, em que b é maior que a; pois, para aquelas em que a - b é positivo, isto é, em que b é menor que a, o sinal não acarreta qualquer dificuldade. Realmente, pois, não existe absolutamente quantidade *negativa* isolada. -3 tomado abstratamente, não apresenta qualquer ideia ao espírito; mas se digo que um homem deu a outro -3 escudos, isto quer dizer, em linguagem inteligível, que ele lhe tirou 3 escudos.

Eis porque o produto de -a por -b dá +ab; pois o fato de que a e b estejam precedidos, por suposição, do sinal -, é uma indicação de que as quantidades a e b estão misturadas e combinadas com outras às quais nós as comparamos, pois se elas fossem consideradas como sozinhas e isoladas, os sinais - de que fossem precedidas nada apresentariam de claro ao espírito. Portanto, essas quantidades -a e -b só são precedidas pelo sinal - porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação; se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal +, e então seu produto seria +ab, o que significa a multiplicação de -a por -b, onde retiramos b- vezes a quantidade negativa -a. Ora, pela ideia que demos acima das quantidades negativas, acrescentar ou impor uma quantidade negativa e retirar uma positiva; portanto, pela mesma razão, retirar uma negativa é acrescentar uma positiva; e o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar -a por -b e, sim, +a por +b, o que dá o

> produto +ab. Não é possível desenvolver suficientemente esta ideia em uma obra da natureza desta, mas ela é tão simples, que eu duvido que se possa substituí-la por outra mais clara e mais exata; e creio poder assegurar que, se a aplicarmos a todos os problemas que tivermos de resolver onde apareçam quantidades *negativas*, jamais lhe atribuiremos falhas. De qualquer modo, as regras das operações algébricas sobre as quantidades *negativas* são admitidas por todo mundo; e geralmente recebidas como exatas quaisquer ideias que, aliás, possamos atribuir a tais quantidades sobre as ordenadas *negativas* de uma curva e sua situação em relação às ordenadas positivas".

Pode-se perguntar se é nos artigos de vulgarização que se deve ir buscar o fundo do pensamento de um matemático. Uma leitura atenta do texto acima mostra que d'Alembert, por certo, não teria multiplicado suas confissões de incompreensão e perplexidade se dispusesse das explicações simples com que contamos hoje em dia.

Ademais, o que importa aqui não é tanto o nível de compreensão de um matemático encarado isoladamente, mas o impacto que o relato de d'Alembert terá exercido sobre seus leitores. O artigo *Negativo* seria uma referência constante por todo um século. Todos o citaram, *sem poupar elogios à clareza das explicações dadas* !!

Citamos, a seguir, duas passagens do artigo *Quantidade*, que o mesmo autor redigiu para a Enciclopédia.

> "*Quantidades negativas* são aquelas que são consideradas como menores que nada, e que são precedidas do sinal - .
>
> Segundo alguns autores, as *quantidades* negativas são as ausências das positivas.
>
> Segundo esses mesmos autores, uma vez que uma ausência pode exceder a outra (por exemplo, a ausência de 7 é maior que a de 3), uma *quantidade* negativa, tomada certo número de vezes, pode ser maior que outra.
>
> Segue-se daí que as *quantidades* negativas são homogêneas entre si. Mas acrescentam eles, já que a ausência de uma *quantidade* positiva tomada tantas vezes quanto se quiser jamais poderá superar a *quantidade* positiva, e já que ela se torna sempre mais defectiva, as *quantidades* negativas são heterogêneas às positivas. Daí eles concluem que, sendo as quantidades negativas heterogêneas às positivas e homogêneas às negativas, não pode haver razão entre uma *quantidade* positiva e uma negativa, mas pode haver razão entre duas negativas. Por exemplo: $-3a : -5a :: 3 : 5$. A razão é aqui a mesma que se as *quantidades* fossem positivas. Eles pretendem mostrar, todavia, que entre 1 e -1 e entre -1 e 1 a razão é diferente. No entanto, por outro lado, é verdadeiro que $1 : -1 :: -1 : 1$, pois o produto dos extremos é igual ao produto dos meios; assim a noção que esses autores dão das *quantidades* negativas não é perfeitamente exata".

O leitor mais assíduo de d'Alembert foi Lazare Carnot (1753-1823).O "Organizador da

Vitória" era considerado, no seu tempo, como um dos maiores matemáticos franceses depois, de Lagrange, Laplace, Legendre e Monge. Sua geometria de posição (Carnot, 1803) gozou, por muito tempo, de imenso prestígio, que atualmente é mal compreendido. A contribuição da obra é muito fraca. Os teoremas de Carnot não são mais que exercícios resolvidos por meio de métodos fora de moda. O mérito do livro consiste em suas repetidas *exigências de clareza*. O autor se embaraça sistematicamente nas contradições das ideias tradicionais e proclama sem cessar:

> "Não compreendo! Não compreendo!"

Eis algumas amostras de sua obra:

> "Para obter realmente uma quantidade negativa isolada, seria preciso retirar uma quantidade efetiva do zero, privar o nada de alguma coisa: operação impossível. Como, portanto, conceber uma quantidade negativa isolada?"

E acrescenta:

> "As noções até agora conhecidas das quantidades negativas isoladas se reduzem a duas: aquela de que acabamos de falar, saber que são quantidades menores que zero; e aquela que consiste em dizer que as quantidades negativas têm a mesma natureza que as quantidades positivas, mas tomadas em sentido contrário. d'Alembert destrói ambas as noções. Inicialmente ele refuta a primeira com um argumento que me parece irreplicável,
> Seja, diz ele, esta proporção: 1: -1 :: -1 : 1; se a noção combatida fosse exata, isto é, se -1 fosse menor que zero, com mais razão ele seria menor que 1; assim, o segundo termo desta proporção deveria ser menor que o terceiro, isto é, 1 deveria ser menor que -1; e assim -1 seria ao mesmo tempo menor e maior que 1, o que é contraditório.
> Quanto à segunda das noções apresentadas acima, d'Alembert a condena com o mesmo sucesso em sua memória sobre as quantidades negativas de que já falei. No entanto, como ele não tem o que propor em substituição, parece adotar esta noção como base, querendo apenas demonstrar que ela está sujeita a diversas exceções. É necessário, diz ele, demonstrar essa posição (quantidades negativas em sentido contrário ao das positivas), na medida em que ela nem sempre a conte".

Segue-se, da mesma obra, uma passagem ainda mais espantosa:

> "Uma multidão de paradoxos, ou antes de palpáveis absurdos resultaria da mesma noção; por exemplo: -3 seria menor que 2; contudo, $(-3)^2$ seria maior que

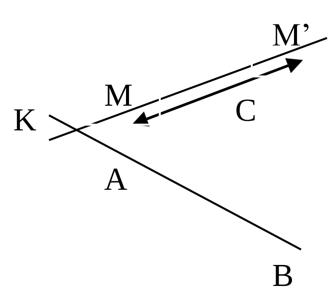
2^2, ou seja, entre duas quantidades diferentes, o quadrado da maior seria menor que o quadrado da menor, o que afronta todas as ideias clara que se poderiam formar sobre a quantidade.

Passemos à segunda noção, que consiste em dizer que as quantidades negativas só diferem das quantidades positivas por serem tomadas em sentido oposto. Esta ideia é engenhosa, mas não é mais justa que a precedente. De fato, se duas quantidades, uma positiva, outra negativa, sendo ambas reais e não diferindo senão por sua posição, por que a raiz de uma seria uma quantidade imaginária, enquanto a da outra seria efetiva? Por que $\sqrt{-a}$ não seria tão real quanto $\sqrt{a}$? Pode-se conceber uma quantidade efetiva da qual não se possa extrair a raiz quadrada? E de onde proviria o privilégio da primeira em conceder seu sinal ao produto $(-a) \times (+a)$?"

Lembremo-nos de que o autor. Lazare Carnot, era membro da Academia de Ciências! Não é um garoto que acaba de fracassar no B.E.P.C. ! Somos forçados a observar que, em 1803, a comunidade científica não reconhecia, como noção rotineira, o estudo da variação da função $x \to x^2$.

Em suma, Carnot participou amplamente do progresso matemático no que concerne aos números relativos, não atribuindo respostas válidas às questões levantadas, mas desempenhando um papel *provocador*. Sob a influência dessas inquietantes interrogações. Os Moebius e os Chasles logo iriam elaborar a geometria orientada; particularmente, eles utilizaram todo um eixo para representar a reta R inteira, sem que fosse necessário recorrer, como Descartes ou Cramer (V. citações) a raciocínios isolados sobre semirretas opostas.

Eis um exemplo de exercício longamente comentado por Carnot e, depois, constantemente citado, até a popularização dos métodos de Chasles: De um ponto K exterior a um círculo, traçar uma secante KMM', tal que a distância MM' tenha o comprimento dado C.



Em seu livro, Carnot (1803) emprega a palavra *abscissa*, mas ele a interpreta como uma *distância* à origem. Traçando uma secante auxiliar KAB e designando por x, a, e b as distâncias KM, KA e KB, ele chega à equação:

$$x \times x + c \times -ab = 0$$

Neste contexto, ele não consegue interpretar a raiz negativa da equação. Essa dificuldade está, hoje, totalmente ultrapassada, uma vez que se obedeça escrupulosamente às regras da geometria orientada que ainda não havia sido inaugurada.

Entende-se que a fórmula de Chasles, [7] atualmente considerada como um truísmo, tenha constituído um considerável progresso. Mas, para que ela fosse formulada, foi necessária uma completa inversão do ponto de vista. A primícia indispensável deveria ser a transposição do obstáculo 13), que conduziria à determinação de um ponto sobre uma reta, não por sua distância à origem, mas por sua *abscissa* (no sentido atual do termo).

IV. Primeiros Obstáculos Epistemológicos

É hora de parar e fazer um balanço. Terminado esta etapa, a *unificação da reta numérica* está quase concluída.

A ideia de um sistema numérico unificado cujos elementos só se diferenciam quantitativamente custou a ser aceita. Encontra-se em muitos autores a persistência da visão do mundo de Aristóteles, descrita em termos de antinomias (quente e frio, úmido e seco, o bem e o mal, a alma e o corpo). O positivo e o negativo também se apresentam como heterogêneos, da mesma forma que, para nós, o doce e o salgado. Esses dois princípios podem, por certo, neutralizar-se parcialmente, mas eles tem natureza distintas.

O grande contraste, constantemente reafirmado, levaria a que o *número positivo* é *real*, enquanto as *quantidades* negativas seriam apenas ficções!

[7] A própria história do surgimento da geometria orientada merece um estudo epistemológico separado, pressupondo uma releitura atenta de Monge, Carnot, Poncelet, Chasles, Moebius, etc. Em particular, encontraremos nas "Aplicações de análise e geometria" (1862-I664) de Jean Victor Poncelet um capítulo inteiro dedicado à "lei dos sinais de posição em geometria", do qual poderíamos tirar muitas citações saborosas também relacionadas com o tema aqui examinado.

Para julgar corretamente esta situação, é preciso lembrar que, até o século XVIII, o homem comum teve poucas oportunidades de utilizar os números negativos na vida cotidiana.

Os comerciantes, é verdade, faziam suas contas, mas a prática das partidas dobradas em contabilidade começava a opor radicalmente créditos e débitos (combinando-os apenas no fim das páginas dos livros de registro). Prevaleceria, assim, o modelo das duas semi-retas opostas, funcionando separadamente, a não ser na hora do balanço.

Não se dispunha de escalas termométricas. Os primeiros fabricantes de termômetros ainda escalonavam seus instrumentos em relaçao à temperatura de fusão da manteiga!

Somente em 1730, Réaumur produziu os primeiros termômetros científicos e propôs sua escala de temperaturas. De qualquer modo, ainda decorreria um século antes que o grande público se acostumasse à expressão "*temperatura abaixo de zero*". Aliás, é significativo observar em Fahrenheit (1713) um *sintoma característico de evitação*.

Sua extravagante escala térmica se explica pela intenção de evitar os números negativos no escalonamento das temperaturas usuais.

Ainda nos restam alguns vestígios das maneiras de pensar dualistas daqueles tempos. A indústria frigorífica atual ainda utiliza uma unidade prática, a *frigoria* para designar a quilocaloria negativa.

No caso da reta numérica, observa-se que o zero não foi a única barreira difícil de transpor.

Em Euclides, por exemplo, os números servem para enumerar *multidões*. Por conseguinte, a unidade não é um número! É, aliás, o contrário de um número da mesma forma que, em gramática, o singular se opõe ao plural [8]. Esse ponto de vista arcaico ainda iria encontrar eco nos debates entre matemáticos do século XVII.

A mesma dificuldade surge ainda no ensino contemporâneo. Quando se explica que x^n é o produto de n fatores iguais a x, o aluno pode não compreender o que significa x^1 . Que é um produto de um só fator? E o que significa x^0?

Aos poucos, concluiu-se, em seguida, que os números compreendidos entre 0 e 1 eram da mesma natureza que aqueles que superam a unidade. A dificuldade em admitir isto,

[8] Existe um argumento convincente para saber se é necessário colocar, ou não, um *s* na expressão: "Um recipiente de 1,70 litro (s)"?

segundo o testemunho de numerosos professores, aparece entre os estudantes que se recusam a calcular a velocidade de um caramujo. "Um caramujo! Não tem velocidade! Não anda depressa!". Riremos menos dessa ingenuidade ao encontrá-la, sob forma de hesitação, nos escritos do padre Marlin Mersenne (1639). No seu comentário da obra de Galileu, ele julgou necessário criar um neologismo em francês, a "tardivité", para indicar uma velocidade que se torna lenta. A expressão "velocidade nula", tal como "riqueza nula", parece constituir uma contradição em termos.

A passagem aos negativos constitui uma dificuldade ainda mais temível. Esbarra-se, no caso, na presença de duas significações do zero, que se misturam nos discursos dos vários autores, sem que se consiga fazer as diferenciações necessárias.

De um lado, concebe-se um zero absoluto, o nada, abaixo do qual nada é concebível. En tende-se que não se pode ser mais pobre que o pobre absoluto, completamente desprovido, que nada possui. A luz deste conceito, os nð am£ ros absolutos são evidentemente um absurdo.

Por outro lado, encontramos constante mente pessoas arruinadas, que nada possuem, mas que ainda podem conseguir créditos e cu jos bens podem ser hipotecados. O que é,aliás, um miliardário arruinado? Em geral, é uma pessoa que ainda possui milh hões. Surge assim a ideia do zero origem, proposta por convenção. Este zero propicia a criação dos números negativos. O obstáculo provém da confusão entre as duas situações, às quais não se pode adaptar um mesmo modelo.

Há uma reflexão sobre este tema em uma obra da juventude de Emmanuel Kant, "Ensaio para introduzir em filosofia o conceito de grandeza negativa" (1763). A análise é conduzida ali em razão da clarificação da noção de existência. Após declarar: "Duas coisas são opostas entre si, quando a introdução de uma suprime a outra", o ilustre filósofo estabelece a distinção entre a oposição lógica, que esbarra no princípio da contradição, e a oposição real, tal que dois predicados de um sujeito são opostos, mas não contraditórios.

A obra de Kant, aliás, não visa a objetivos de clarificação matemática. Ela se destina a introduzir uma nova concepção da Filosofia, que prenuncia o criticismo Kantiano. O opúsculo não suscita, em particular, as dificuldades ligadas à regra dos sinais.

De fato, os obstáculos que examinamos até aqui concernem sobretudo às propriedades aditivas, aquelas que aparentemente apresentam menos dificuldades. Entenda-se, contudo, que elas não são tão simples. Elas só foram finalmente ultrapassadas com a introdução da orientação, muito tardia. E, embora a orientação da reta seja um assunto considerado fácil, bem sabemos que a ideia geral de variedade orientada, perfeitamente dominada na metade do século XX pelos matemáticos, ainda causa perigosos problemas aos professores.

Em todo caso, na metade do século XIX, os números negativos conquistaram condição de igualdade com os números positivos. Durante muito tempo, contudo, ainda veríamos a persisistência de sintomas de evitação característicos: muitos usuários, que pensam ter compreendido o que são números negativos e que docilmente aprenderam a servir-se da relação de Chasles, preferem criar expedientes para não empregá-los!

Até 1940, por exemplo, muitos manuais de ótica geométrica elementar expõem com timidez a teoria dos espelhos esféricos ou das lentes. Perdem-se numa profusão de casos figurativos, sempre com demonstrações casuísticas. Recusam-se a falar em distância focal negativa. Segue-se um exemplo de 1920.

"Confundindo os ponto T e O, muito próximo se o espelho é de pequena abertura, e representando por p e p' as distancias de P e P' ao espelho, e por f a distância focal,   tem-se:

$\frac{p-2f}{2f-p'}=\frac{p}{p'}$, donde: 2pf - pp =   pp´ - 2p´f, ou pf _p´f = pp´; dividindo cada termo por pp´f:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}. \qquad (2)$$

P é, portanto, fixo qualquer que seja o raio PI. Os raios que partem de P e que atingem o espelho passam todos, pois, pelo ponto P' apôs a reflexão; P' ê a imagem de P.

A imagem de um ponto P, fornecida por um espel ho concavo, situa-se no eixo que passa por P. A formula (2), acima, permi té encontrar sua posição, conhecendo p e f.

Se P está entre F e 0, o raciocínio precedente dá:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}.$$

A imagem é virtual   (Fig. 238)

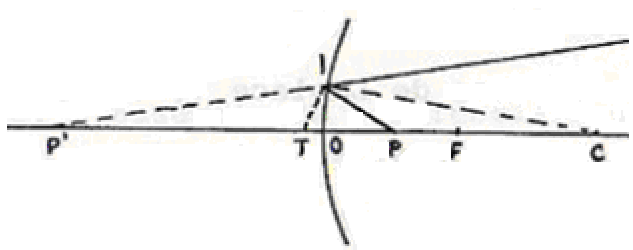


Fig. 238 - IMAGEM VIRTUAL DE UM PONTO

Decididamente, todos os números (positivos e negativos) tornam-se iguais em direito mas alguns são mais iguais do que os outros.

V. Um Pouco de História (Continuação e Fim)

Este segundo período se caracteriza por uma compreensão satisfatória das propriedades aditivas. É então que os obstáculos (5) e (6) assumem importância preponderante.

Agora as tentativas levarão sobretudo à descoberta de uma justificativa aceitável para a regra dos sinais na multiplicação dos números relativos isolados.

Nas célebres conferências pedagógicas que Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) proferiu na Escola Normal Superior (pluvioso, ano III), ele começa manifestando o mesmo embaraço que seus antecessores, testemunhando assim que a teoria dos números relativos não era considerada matéria fácil. Ele entrevê, contudo, os elementos da solução:

> "(A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de -a por -b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar sensível essa ideia observaremos que o produto de -a por +b e -ab (porque o produto nada mais é que -a repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de -a por (b-b) é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim já que o produto de -a por +b é -ab, o produto de -a por -b deve ser de sinal contrário, ou igual a + ab para destruí-lo".

Nota-se no texto:

a) a mesma imperícia de Euler para demonstrar $b \times (-a) = -ab$.

b) a colocação em evidência do papel da distributividade, na demonstração.

c) a ausência de referência a um modelo fí0sico (o obstáculo (6) é contornado assim) e uma abordagem, na aparência, puramente formal.

d) mas a ideia de uma extensão formal do sistema numérico não parece ter sensibilizado o espírito de Laplace. O emprego das palavras que sublinhamos ("sensível", "deve ser",etc.) não revelaria uma crença implítica num sistema numérico preexistente do qual bastaria decifrar as propriedades?

O leitor cético pode julgar, reportando-se a Duhamel (1866), em que a lição de Laplace é citada de modo mais completo. Aparece ali um comentário, bem espantoso, escrito por um acadêmico, professor da Escola Politécnica. Destacamos:

> "Toda demonstração de regras sobre as quantidades negativas isoladas só pode ser uma ilusão, pois não faz nenhum sen tido aplicável a operações aritméticas efetuadas com coisas que não são números e não tem existência real".

Revela-se aí o passo decisivo que falta executar, de Laplace a Hankel. Em 1821, Augustin Cauchy (1789-1857) publicou seu curso destinado à Escola Politécnica. De início, ele faz uma nítida distinção entre os números (reais positivos) e quantidades (números relativos). Apresenta estes últimos de maneira unificada, introduzindo o tema dinâmico, caro a Piaget. Este ponto de vista ê temperado por um elemen to está tico: o sinal é assimilado a um estado simbolizado por um adjetivo.

> "Do mesmo modo que se vê a ideia de número nascer da medida de grandezas, adquire-se a ideia de quantidade (positiva ou negativa), se considerarmos cada grandeza de uma espécie dada capaz de servir para o crescimento ou a diminuição de outra grandeza fixa da mesma espécie. Para indicar essa destinação, indicam-se as grandezas que servem para aumentar por números precedidos do sinal + , e as grandezas que servem de diminuição por números precedidos do sinal -.
>
> Isto posto, os sinais + ou - colocados antes dos números podem-se comparar, segundo a observação feita, a adjetivos colocados junto a seus substantivos. Designam-se os números precedidos do sinal + pelo nome de quantidades positivas, e os números precedidos do sinal - pelo nome de quantidades negativas".

Aparecem assim as sementes de uma confusão entre os sinais (+ ou -) operatórios e predicativos. Os primeiros designam uma acao (aumentar, diminuir) e os segundos qualificam um estado (positivo, negativo).

De qualquer forma, Cauchy recorre a uma metáfora (positivo = aumento; negativo = diminuição), que explora por duas páginas, para justificar as propriedades aditivas dos números relativos. E, de repente, sem prevenir o leitor (e talvez inconscientemente), ele aban dona o ponto de vista metafchórico para abordar dogmaticamente a multiplicação.

Ele apresenta, de inicio, o grupo muitiplicativo dos sinais {+ ,-} e assimila as "quantidades" aos elementos do produto cartesiano $\{+, -\}\times R^{+}$. Os puristas lamentarão, sem dúvida, que ele esqueça de identificar +0 e -0. De qualquer modo, sua exposição não explica essa inopinada mudança de atitude. O modelo metafórico, apresentado inicialmente, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação.

Neste último caso, pode-se diminuir um número positivo, multiplicando-o por um fator compreendido entre 0 e 1. Daí resultariam con fusões entre esses dois tipos de diminuições, e numa tal situação nebulosa não se compreenderia mais por que o produto de uma diminuição por uma diminuição é um aumento. Cauchy teria podido, contudo, assimilar o número negativo a uma diminuição aditiva (mas não o fez).

É então que Cauchy adota o novo ponto de vista (que encontramos em embrião em MacLaurin e Laplace). Ele tem vontade de apresentar a multiplicação de um modo formal, sem evocar modelos concretos ou metafóricos. Ele avisa que vai operar com símbolos (formados por um sinal e um valor absoluto) e expõe as regras operacionais a que tais símbolos serão submetidos.

Essa transposição de barreira, porém, não ocorrerá sem percalços. De início, ele comete a confusão entre sinais operatórios e predicativos.

Ele demonstra a composição apenas para sinais predicativos e depois aplica-a aos sinais operatórios, sem chamar a atenção para esse abuso:

> "Com base nessas convenções, se representamos por A, seja um número, seja uma quantidade qualquer, e se fazemos
>
> A = + A, b = -A
> teremos,
> +a = +A, +b = -A,
> -a = -A, -b = +A.
>
> Se, nas quatro últimas equações, atribuirmos a a e b seus valores entre parênteses, obtemos as fórmulas
>
> +(+A) = +A, +(-A) = -A,
> -(+A) = -A, -(-A) = +A. (1)
>
> Em cada uma destas fórmulas, o sinal do segundo membro é o que chamamos de produto dos dois sinais do primeiro. Multiplicar dois sinais é formar seu produto. Apenas o exame das equações (1) basta para estabelecer a regra dos sinais, compreendida no teorema que vou enunciar.
>
> 1° teorema: O produto de dois sinais iguais é sempre +, e o produto de dois sinais

opostos é sempre .”

Em seguida, o estilo de Cauchy manifesta um evidente desconforto, diante do manejo dos símbolos, tratando de números complexos:

> "Em análise, chamamos expressão simbólica ou símbolo toda combinação de sinais algébricos que nada significa por si mesma, ou à qual se atribui um valor diferente do que ela naturalmente deveria ter. Da mesma forma, chamamos equações simbólicas aquelas que, examinadas e interpretadas com base nas convenções geralmente estabelecidas, são inexatas ou não fazem sentido, mas das quais se podem deduzir resultados exatos, modificando e alterando, segundo regras fixas, ou as próprias equações, ou os símbolos que elas contara".

Assim, os números complexos seriam símbolos desprovidos de sentido em si mesmos (mas não é este, por definição, o caso de todos os símbolos ?). Eles só o adquirem na condição não serem interpretados de acordo com o significado que deveriam ter!

Essa embrulhada traduz uma confusão sobre um assunto sobre o qual Cauchy produziu uma obra decisiva, mas que ele não consegue explicar de maneira totalmente clara.

Destaque-se, enfim, que não se observa qualquer vestígio desses esforços pedagógicos na obra cientifica de Cauchy. As sutis diferenças que ele introduziu em seu Curso não tiveram influência no estilo de seus trabalhos de pesquisa.

Finalmente! Em 1867, surge a obra de Herman Hankel, "Teoria dos sistemas dos números complexos", onde todos os obstáoculos referentes à teoria dos números são ultrapassados.

De fato, a mudança essencial — passagem do ponto de vista "concreto" ao ponto de vista "formal" —, foi efetuada antes em outros campos da Matemática. No caso de que tratamos, Hankel limitou-se a aplicar ideias que já começavam a desenvolver-se.

Para o didaticista, é importante notar que o autor (que também foi um bom historiador da Matemática) não estava absolutamente consciente de ter eliminado uma tensão que persistia desde Diofantes! Seu livro é dedica do a um assunto "mais nobre": a exposição formal da teoria dos números complexos. Foi apenas de passagem, a título de preliminares, que ele liquidou o problema dos números relativos.

Sabe-se que a concepção geométrica dos números complexos já fora elucidada por C. Wessel (1798) e J.R. Argand (1813). As publicações desses obscuros autores passaram totalmente despercebidas; e foi somente em 1831 que Gauss descobriu o plano complexo, rapidamente popularizado no mundo matemático.

Isto prova que a trivialização dos números relativos se estendeu por mais de quinze séculos, enquanto os números complexos só trau matizaram caps cõ matemáticos por cerca de quatro séculos.

Ademais, é significativo que tais feitos tenham sido realizados por "não graduados". Mesmo Hankel, que gozava de certa consideração na Alemanha, não foi evidentemente um matemático de alto gabarito. E foram motivos pedagógicos que suscitaram os trabalhos de Wessel e Argand.

Os epistemólogos devem entender que os maiores gênios, que, em geral confiam, com justiça, na agudeza de suas intuições costumam frear o progresso em campos análogos aos que examinamos aqui. Eles minimizam a necessidade esclarecimento exigido em assuntos nos quais, na prática, se desincumbem bem.

Suas primeiras dúvidas só aparecem excecionalmente, quando se trata de explicar aos outros. Ainda então, eles costumam utilizar uma pedagogia ostensiva: "Vejam-me fazer! Imitem-me! Não tentem compreender porque é que meu "truque" dá certo!"

Surge assim outro obstáculo que se manifesta constantemente desde o início: o obstáculo da dificuldade despercebida. O problema da explicação da regra dos sinais foi sempre uma questão desprezada. Muitos grandes matemáticos teriam vergonha de confessar que nem tudo era claro para eles nesse assunto elementar.

A revolução realizada por Hankel consiste em abordar o problema de uma perspectiva totalmente diversa. Não se trata mais de extrair da Natureza exemplos práticos que "expliquem" os números relativos de modo metafórico. Tais números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.

Conhecendo, por exemplo, as proprieda des aditivas de $\mathbb{R}$ e a multiplicação de $\mathbb{R}^{+}$, Hankel propõe explicitamente estender a multiplicação de $\mathbb{R}^{+}$ a $\mathbb{R}$, respeitando um princípio de permanência: a estrutura algébrica procurada deve ter boas propriedades.

A existência e unicidade dessa extensão resulta do seguinte teorema: a única multiplicação em $\mathbb{R}$, que estende a multiplicação usual em $\mathbb{R}^{+}$, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais.

Uma vez formulado o problema, a demonstração é trivial:

$$0 = a\times 0 = a\times(b+op.b) = ab + a\times(op.b)$$

$$0 = 0\times(op.b) = (op.a)\times(op.b) + a(op.b)$$

Donde:

$$(op.a)\times(op.b) = ab$$

Aliás, esta demonstração nem mesmo é original. Ela figura em essência em muitos textos anteriores, sobretudo em McLaurin e Laplace. Nota-se entretanto uma diferença considerável: Laplace acredita na existência, a priori, de uma multiplicação dos relativos, na Natureza. Segundo ele, basta descobri-la, e o raciocinio precedente prova que isto só é possível de acordo com a regra dos sinais.

Compare-se esta situação à de Hamilton, inventando os quatérnios. Ele também acreditava, no início, na existência de uma multiplicação natural, num "espaço complexo" de três dimensões, estendendo a do plano complexo. Mas, entendendo que isso era impossível, renunciou à comutatividade e acrescentou mais uma dimensão!

Ficou assim refutada a argumentação neoplatónica de René Thom (1974) que pretende que os conceitos matemáticos sejam preexistentes, talvez não na Natureza, mas no espirito humano, sob forma de arquétipos. Toda descoberta seria apenas uma reminiscência. A história de 1600 anos de confusão a respeito de números relativos prova que a emergência da regra dos sinais não poderia ser fruto de uma superfícial maiêutica socrática. E a aventura dos quatérnios confirma que pode acontecer que um progresso seja obtido contra os arquétipos simplistas que atravancam o inconsciente humano.

VI. Os Últimos Obstáculos

Os obstáculos antes assinalados não constituem o essencial dos entraves ao esclarecimento da questão dos números relativos. A perturbação introduzida por Hankel inscreve-se na ruptura de uma ideologia que impregnava o pensamento matemático até o fim do século XIX.

Essa ideologia referia-se ao que se pen sava inconscientemente sobre as relações mantidas pela Matemática com a realidade física.

Lembremo-nos de que os conceitos matemáticos têm sua origem remota na vida prática. Mas um salto epistemológico decisivo foi efetuado na Antiguidade, quando se proclamou que os objetos matemáticos devem ser convenientemente idealizados para inserir-se num discurso hipotético-dedutivo: uma reta não é um bastão; o número π é coisa muito diferente da medida de um barbante enrolado num cilindro!

Os "Elementos" de Euclides tiveram o mérito de sugerir as regras do processo dedutivo. À frente de cada livro, enuncia-se uma lista de proposições preliminares que devem ser admitidas. Depois disso, o raciocínio deve ser exercido sem qualquer outro recurso à experiência sensível.

A ideologia denunciada consiste nisto: todas as regras de conduta de Euclides foram constantemente proclamadas, mas não foram escrupulosamente respeitadas. O matemático sub entendia derrogações julgadas "evidentes" para a disciplina axiomática.

Ao lado das certezas trazidas pela demonstração, insinua-se um outro critério de verdade: a luz natural do espírito. Já vimos essa luz obscurecendo a maior parte dos textos anteriormente citados. Esta ideologia é particularmente bem expressa por Blaise Pascal em seu opúsculo póstumo (1658).

> "A ordem da geometria, escreve ele, nao define tudo e não prova tudo; mas apenas supõe coisas claras e constantes pela luz natural e, por isto, ele é perfeitamente verdadeira, sustentada pela natureza em lugar do discurso".

E acrescenta:

> "Isto é o que a geometria ensina perfeitamente. Ela não define nenhuma destas coisas, espaço, tempo, movimento, número, igualdade, nem os numerosos similares, pois tais termos designam tão simplesmete, para os que entendem a língua, as coisas que significam, que o esclarecimento que poderíamos fazer traria mais obscuridade do que instrução".

De outro modo, nós disporíamos de uma intuição, uma ideia preconcebida do que deve ser um "verdadeiro" número. Quando um raciocínio formal contradiz os ensinamentos da luz natural, surgem os obstáculos encontrados por d'Alembert e Carnot. Se criamos novos objetos matemáticos que afrontara os preconceitos, aqueles são classificados como incompreensíveis, inconcebíveis, absurdos, surdos, irracionais, falsos, imaginários, etc.

Quando, no decurso da história das ciências, o jogo formal ou a experiência revelaram algum objeto intelectual contradito pela luz natural, passava-se a caçar um "bom modelo", familiar à época. Assim, a invenção das geometrias não-euclidianas só se tornou segura, quando Beltrami, Gauss e Poincaré lhe propuseram representações intelectualmente manipuláveis.

Mas os objetos "abstratos", não identificáveis na vida prática, foram, em geral, recebidos com os receios de um profano ao contemplar uma obra de arte cubista ou surrealista, murmurando: "Que é isso?"

Assim, o passo decisivo encetado por Hankel é parte de uma vasta rejeição da ideologia da luz natural.

Desde então, aceita-se facilmente que $(-3)^2 > (+2)^2$, pois este resultado é coerente com a dedução formal, e não haveria mais preocupações com o fato de que isto pudesse chocar-se com as ideias preconcebidas de um Lazare Carnot [9].

No plano da filogênese, isto equivale ao que, em Piaget, representa a passagem ao estágio das operações formais. Essa mudança de ponto de vista constitui uma verdadeira revolução coperniciana, passo essencial da formação do espírito científico. Eis o que diz a respeito Gaston Bachelard:

> "A opinião pensa mal; ela não pensa: ela traduz necessidades de conhecimento. De signando os objecos por sua utilidade,ela se impede de conhece-los. Nada se pc de fundamentar na opinião, antes é preci so eliminá-la. Ela é o primeiro obstáculo a transpor. Não bastaria, por exemplo, retificá-la em pontos particulares, mantendo, como uma espé cie de moral provisória, um conhecimento vulgar provisório. O espírito científico nos proíbe de manter uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questão que não sabemos formular claramente. Antes de tudo é necessário saber colocar os proble mas. E, por mais que se fale, na vida científica, os problemas não se colocam por si mesmos, é precisamente este sentido do Problema que marca o verdadeiro espirito cientifico. Para um espírito científico, o conhecimento é uma resposta a uma questão. Se não houver questão, não pode haver conhecimento científico. Nada anda sozinho. Nada é dado. Tudo é construído".

---

[9] Esta inversão é comparável a fenômenos observados em salas de aula, e que alguns designam por "espera do professor", ou por "contrato didático". Antes de Hankel, procurava-se um tipo de explicação impossível para a regra dos sinais. A passagem à explicação formal é uma mudança brusca de problemática, que depende do "pensamento lateral', apreciado por de Bono.

No entanto, a legitimação dos números relativos teria podido ocorrer muito antes, evitando-se o obstáculo (5). Bastaria que se dispusesse de um bom modelo, familiar à época e suscetível de ilustrar todas as principais propriedades do sistema numérico.

Um modelo eficaz deveria satisfazer às seguintes condições:

a) explicar simultaneamente a adição e a multiplicação dos números relativos, bem como as interações dessas operações.

b) basear-se em operações internas.

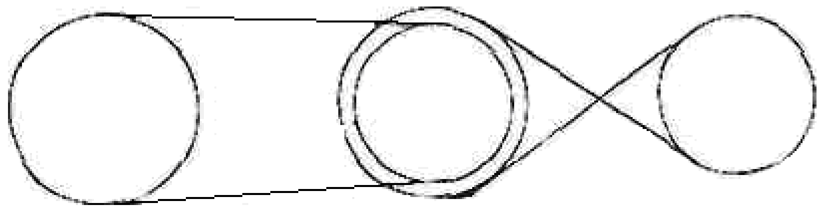
c) ser suficientemente familiar aos que ainda ignoravam os números relativos.

Vimos que o modelo comercial dos ganhos e dividas é um obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas. Acidentes pedagógicos, aliás, são possíveis com alunos não familiarizados com este exemplo:

> Um caso:"Pudemos observar um aluno de 14 anos, aplicado e de inteligência média, que tinha grandes dificuldades no manejo dos números relativos. Para efetuar (+5) + (-7), ele recitava mentalmente a regra, lembrando-se de que os números tinham sinais contrários, etc., levando as sim cerca de um minuto para chegar ao resultado exato. Ele se cansava muito rapidamente e terminava por cometer numerosos erros. Verificou-se que os pais do menino nunca o haviam mandado fazer compras. Aos 14 anos, ele não sabia pegar ou prestar contas do dinheiro!
> O ensino concreto dos números relativos a partir de ganhos e perdas parecia-lhe, pois, totalmente abstrato. Esta circunstancia, associada a um manifesto defeito de lateralizaçao, bastaria prova velmente para explicar o caso".
>
> (Glaeser, 1969)
>
> (Esse caso patológico, evidentemente, é muito raro!)

Outro modelo, evidentemente, vinha à mente de todos os matemáticos: o de Euclides, em que a multiplicação de duas distâncias é representa da por uma área. Este modelo apresenta todos os inconvenientes relacionados a uma operação externa. Mas, para que se possa explicar a multiplicação dos números relativos, seria necessário que se dispusesse previamente da ideia de uma área orientada. Chegou-se, assim, inevitavelmente, a um círculo vicioso, pois a noção de área orientada se baseia na regra dos sinais, ou sobre preliminares ainda mais elaboradas.

Na falta de melhor, pode-se ilustrar a regra dos sinais utilizando transmissões de correias:



As correias cruzadas invertera o sentido de rotação e podem, assim, representar números negativos. Uma vantagem didática deste dispositivo é o que ele permite apresentar numerosas relações de transmissão, jogando com as razões entre os raios das rodas. Não se pode, porém, racionalmente, adicionar correias. Essa metáfora não permite ilustrar a distributividade em relação à adição.

De qualquer forma, os autores de obras elementares dedicaram-se em vão à caça do bom modelo. É provável que um modelo perfeito não exista: esse modelo deveria realizar um isomorfismo canônico entre IR e uma situação "concreta". Particularmente, 0 e 1 deveriam ter imagens canônicas.

Isto é possível no que diz respeito ao 0. No modelo comercial, 0 corresponde ao balanço equilibrado, sem lucro e sem prejuízo. Mas a escolha da imagem de 1 está, geralmente, subordinada a escolha de uma unidade de medida. E é claro que, se a imagem de 1 é arbitrária, a multiplicação, no modelo, só pode ser arbitrária, e será eliminada pela menor mudança de unidade.

Os modelos propostos consistem em representar $\mathbb{R}$ por diversos espaços E_1, E_2,..., que são Q-vetoriais, e depois definir o produtor por uma multiplicação bilinear:

$E_1 \times E_1 \rightarrow E_1 \times E_2$ (mostraremos um exemplo mais adiante).

A revolução realizda por Hankel foi a de recusar a busca do bom modelo. Esse progresso levou muito tempo para impor-se.

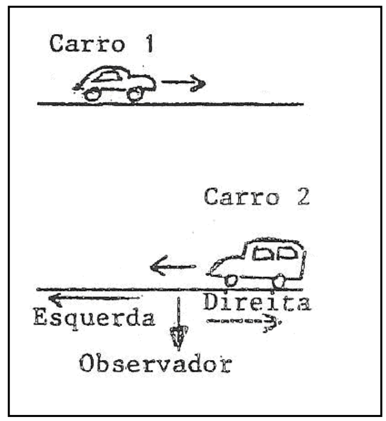
Em 1896, Cario Bourlet introduziu, pela primeira vez na França, uma exposição pretensamente completa dos números relativos, num manual de ensino secundário (Bourlet, 1896). Sua obra se inicia com uma cuidadosa apresentação das propriedades aditivas dos números relativos, baseadas na definição de um ponto sobre um eixo e no modelo comercial.

Passemos, contudo, ao capítulo seguinte. Como apresentar a multiplicação? Subitamente a explicação se torna dogmática: a multiplicação cai de pára-quedas através de uma definição.

Henry Brulard continuaria desinformado se pudesse utilizar o manual de Emile Borel, publicado em 1920. No entanto, a segunda edição, assinada por Emile Borel e Paul Montei (1926) utiliza uma metáfora, ainda hoje adotada em alguns manuais (por exemplo, o do IREM de Estrasburgo, 1979).

A única diferença, decisiva, prende-se ao fato de que o modelo serve a Montel-Borel como <u>introdução</u> à multiplicação, enquanto no manual do IREM de Estrasburgo os números relativos primeiro são introduzidos <u>abstratamente</u>; num capitulo posterior, explica-se a "significação" da multiplicação através da seguinte explanação:

> Em uma estrada (não muito movimentada), um carro pode desenvolver sempre, aproximadamente, a mesma velocidade. Quer-se saber onde estava em dado momento um carro que vimos passar, e onde estará ele dentre de algum tempo.
>
> Por exemplo: vimos passar à nossa frente o carro 1 e admitimos que ele corra a 110 Km/h. Uma hora depois de passar por nós, portanto, ele estará 110 Km a nossa direita. Uma hora antes, ele estaria 110 Km a nossa esquerda.



> Questão 1: Admitindo que o carro 2 ande a 110 Km/h, onde estará ele dentro de duas horas? E onde estava há uma hora e meia?
>
> Orientemos a estrada, atribuindo o sinal + à nossa direita, e o sinal - à nossa esquerda (se quiséssemos, poderíamos fazer a escolha contrária). O zero está diante de nós. Assim, (+150) significa 150Km para nossa direita, e (-80) significa 80km para nossa esquerda. O mesmo vale para a velocidade dos carros.
>
> Orientemos também o tempo: <u>0</u> é o momento presente; o sinal + é atribuída ao futuro, e o sinal -, ao passado.
>
> O exemplo do carro 1 se traduz pelas operações:
>
> (+1) × (+110) (uma hora no futuro e 110Km /h para a direita) e
>
> (-1) × (+110) (uma hora no passado e 110Km/h para a esquerda).

O leitor poderá julgar, à luz do que acaba de ser exposto, as vantagens e inconvenientes deste exemplo.

VII. Conclusões

O ensino de nosso estudo constitui, de início, uma afronta à pedagogia das opiniões. Esta proclama de bom grado que a Matemática deve ser ensinada com base em exemplos concretos. A didática científica se esforça para evidenciar as vantagens e desvantagens de um ensino baseado em exemplos. O estudo histórico que apresentamos mostra precisamente um caso em que uma pedagogia baseada exclusivamente em exemplos concretos é perniciosa.

Ademais, uma aprendizagem satisfatória das propriedades aditivas, apoiada num "bom modelo", pode criar bloqueios posteriores, quando for o caso de com preender as propriedades multiplicativas.

Não seria o caso de motivar uma precipitação, tentando, imediatamente, aplicar este estudo à realidade pedagógica de uma turma. Nós evidenciamos, na verdade, pelo exame de todos os documentos históricos que nos chegaram às mãos, um certo número de obstáculos que embaraçaram o progresso no decurso da história. Resta agora praticar experiências com os alunos para pesquisar se alguns desses obstáculos não terão ainda consequências atuais.

Destacamos que têm-se efetuado pesquisas no Centro de Pesquisa Didática de Nottingham (Shiu C.M.), as quais ganhariam força se levadas adiante com apoio em nosso estudo.

BIBLIOGRAFIA [10]

ALEMBERT, J. (d'). Artigos **Négatif et Quantité na Enciclopédia**.

BACHELARD, Gaston (1938). **La formation de l' esprit scientifique**. Paris: Vrin, 1975.

BEZOUD, Etienne (1772). **Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine**. Paris: J.B.G.Musier.

BOREL, Emile (1920). **Algèbre** (1º ciclo). Paris: Armand Colin. 1

BOREL, Emile & MONTEL, Paul (1926). **Algèbre**. Paris: Armand Colin.

BOURLET, Carlo (1896). **Lecons d'Algèbre élèmentaire**.

BOURDON, Jean (1834). **Eléments d'Arithmétique**. Paris: Bachelier.

BRAHMEGUPTA & BHASCARA (1817). **Álgebra with arithmetic and mensuration**. (Translated by H.T. Colebrooke), London: John Muray.

CAJORI, Florin (1928). **A History of Mathematical Notations**. (Vol. 1). The Open Court Publishing Company. La Salle. Illinois.

CARNOT, Lazare (1803). **Géométrie de Position**. Paris: Duprat.

CAUCHY, Augustin (1821). **Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique**. Paris:

[10] A formatação da bibliografia foi mantida como na tradução do original publicada no volume 17 do Boletim GEPEM.

De Bure.
CLAIRAUT, Alexis (1749). **Elméments d'Algèbre**. Chez David l´Ainé.
CRAMER, Gabriel (1750). **Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques**. Chez le Fréres Cramer et Philibert.
DESCARTES, René (1628). **La Géom chétrie**. Paris: Hermann, 1927.
DIOPHANTE, d'Alexandrie. **Arithmétique**. Paris: Blanchard, 1959.
DUHAMEL, J.H.C. (1866). **Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement** (2ª parte). Paris: Gauthier-Villars.
EULER, Léonard (1770). **Vollstandige Anleitung zur Álgebra Opera Omnia**. Series Prima. Volumen Primum, 1911.
EUCLIDE. **Oeuvres completes**. Paris: Blanchard, 1966.
FERMAT, Pierre de (1891). **Ouevres complètes**. Paris: Gauthier-Villars.
FREUDENTHAL, Hans (1973). **Mathématics as an Education Task**. Dordrecht Reidel.
GLAESER, Georges (1969). **Mathematiques pour 1' eleve Professeur**. Paris: Hermann.
HANKEL, Hermann (1867). **Theorie des Complexen Zahlsysteme**. Leipzig: Leopold Voss.
IREM de Strasbourg (1979). **Mathématique en 4º**. Istra.
KANT, Emmanuel (1763). **Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur negative**. Paris: Vrin, 1949.
MACLAURIN, Colin (1742). **Traité des Fluxions**. (Transleted by P. Pezenas, 1749).
MACLAURIN, Celin (1748). **Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris: C.A. Jombert, 1753.
MERSENNE, Marin (1639). **Les Nouvelles pensées et Galilée**. Paris: Vrin, 1973.
OZANAM, Jacques (1691). **Dictionnaire mathématique**.
PASCAL, Blaise (1658). **De 1'esprit géométrique et de l'art de persuader in Oeuvres Completes**. La Plêiade. 1962.
PIAGET, Jean (1949). **Introduction à l'épistemologie génétique**. Paris: PUF, 1973.
SHIU, CM. **Teaching the addition and substraction of Directed Numbers**. Shell Center for Mathematical Education. University of Nottingham.
STENDHAL (1835). **Vie de Henry Brulard**. Paris: Gallimard, 1973.
STEVIN, Simon (1634). **Les Oeuvres Mathématiques, augmentoz par Albert Girard**. Leyde. Elzevier.
THOM, René (1974). **Modele Mathématique de la morphogenèse**. Paris. Col. 10/18.