
As Equações Diofantinas Lineares e o novo Ensino Médio

Wagner M. Pommer

Professor, UNINOVE/SP

wmpommer@usp.br

Resumo

Este artigo apresenta a relevância na utilização de situações-problema ambientadas no tema das Equações Diofantinas Lineares, cuja análise epistemológica se constitui em recurso didático que possibilita explorar, contrapor e entender a importância e os limites da utilização de diferentes estratégias de resolução, valorizando aspectos fundamentais da Teoria Elementar dos Números e que permite melhor compreender o potencial desta área para enriquecer o universo do ensino de Matemática no ciclo básico.

Palavras-Chave: Matemática Discreta. Teoria Elementar dos Números. Equações Diofantinas Lineares. Análise Epistemológica.

Linear Diophantine Equations and the new High School

Abstract

This paper presents the relevance in considering problem-situation based on Linear Diophantine Equation, whose epistemological analysis constitutes a didactical resource that allows to explore, compare and better understand the importance and limits utilization of different resolution strategies, thus highlighting fundamental aspects of Elementary Number Theory and make better comprehension on the potential of this area to enrich the mathematical education universe on elementary school.

Keywords: Discrete Mathematics. Elementary Number Theory. Linear Diophantine Equation. Epistemological Analyses.

Introdução

A discussão atual envolvendo o ENEM e o vestibular está ressuscitando uma antiga polêmica: Qual o papel do Ensino Médio na formação do estudante? É possibilitar o desenvolvimento de competências? É o trabalho com projetos individuais e coletivos com vistas ao desenvolvimento da cidadania? Ou estes pressupostos são exclusiva competência do Ensino Fundamental? Seria o empenho em cumprir o maior número possível de temas curriculares para formar uma base de informação adequada para o aluno conseguir lidar com os vislumbres das novas prerrogativas do vestibular? É possível informar e formar, almejando um equilíbrio nestas exigências? Surgirá então um ‘Novo Ensino Médio’ ou ficará tudo igual como era antes?

Certamente, o papel do Ensino Médio não é somente uma passagem para progressão em estudos posteriores. É possível desenvolver competências e conhecimentos de modo concomitante, colocando o aluno num papel ativo, através da seleção e inclusão de tópicos matemáticos que propiciem a reutilização de temas do atual currículo do ciclo básico. Acrescenta-se a isso a possibilidade da exploração da intradisciplinaridade, conforme sugere Machado (2009), esta entendida como a articulação de conhecimentos dentro da própria Matemática, devidamente inseridas em situações contextualizadas.

Um dos temas que propiciam tal abordagem é a Equação Diofantina Linear, pertencente a Teoria dos Números, no âmbito dos números inteiros, numa abordagem de reutilização de tópicos do currículo do ciclo básico: conceito de paridade, o algoritmo da divisão, o conceito de fração, o conceito de múltiplo e divisor de um número inteiro e máximo divisor comum¹.

Maranhão; Machado; Coelho (2005) ressaltam que este tema se articula e se complementa com a Álgebra. Deste modo, as equações diofantinas lineares permitem explorar a escrita da forma algébrica das condições dadas no enunciado, a resolução de equações e sistemas de equações indeterminadas de 1º grau, além de sua associação a função discreta de 1º grau. Isto possibilita que se formulem questões cuja solução completa requer manejo de conceitos de forma integrada.

Estas ponderações estão em conformidade com a *Matriz de referencia para o ENEM*, Brasil (2009). Considerando-se a intenção governamental que este exame, num futuro próximo, se constitua como uma única e definitiva forma para o ingresso em todas as Instituições de Ensino Superior, as orientações em tal documento já estão

1 A oportunidade de explorar o tema das equações diofantinas lineares no ensino básico se insere na preocupação que “(...) não tem sido dada muita consideração a contextos relativos a propriedades e estruturas dos números” (CAMPBELL; ZAZKIS, 2002, p.1).

sendo consideradas, pelo menos inicialmente, como parâmetro para as discussões envolvendo o que deverá ser o Novo Ensino Médio².

Este documento considera, com relação aos eixos cognitivos que são comuns a todas as áreas de conhecimento, numa interface com a Matemática, que os alunos devem:

- “Dominar linguagens: (...) fazer uso das linguagens matemáticas (...).
- Enfrentar situações-problema: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- Construir argumentação: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente” (BRASIL, 2009, p.1)

Este documento oficial pormenoriza as competências da área de Matemática e Tecnologias. Destaco neste documento o incentivo a elaboração de atividades que permitam ao aluno reconhecer diferentes significados e representações dos números (naturais, inteiros, racionais e reais) e operações, assim como modele e resolva problemas, tanto no campo numérico, como através de articulação com a representação algébrica.

Machado (2009) pondera que no ensino básico o principal desafio é priorizar a articulação conhecimento e competência, considerando-se que os conteúdos são meios para se permitir o desenvolvimento de competências.

Nesse sentido, Mello (2002) acrescenta que deve ser estimulada a utilização de estratégias diversificadas, que desenvolvam o raciocínio e as capacidades do aluno, em situações de ensino que permitam ao aluno negociar os significados. Ainda, Mello (2002) propõe que, no Novo Ensino Médio, ocorra tanto a formação geral, em oposição e composição com a formação específica, o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, de buscar informações, de analisá-las e selecioná-las, assim como a capacidade de aprender, de criar, de formular, ao invés de atividades de rotina e memorização.

2 No dia 30/07/09 foi aprovado o programa *Ensino Médio Inovador* pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação (CNE). A proposta de inovação se pauta numa sinergia com o novo modelo do Exame Nacional de Ensino Médio. A nova estrutura curricular será em inicial experimental, a princípio, nas 100 escolas que obtiveram as piores notas no ENEM.

Deste modo, as argumentações acima delineadas se inserem dentro de uma problemática essencial na Matemática do ciclo básico, ao possibilitar a expressão e argumentação do aluno em diferentes linguagens dentro da própria Matemática (natural, numérica, algébrica, gráfica), ao permitir-lhe enfrentar situações-problema contextualizadas e tomar decisões que extrapolem a capacidade do âmbito original, examinando e vislumbrando outros modos de encaminhamentos, abrindo caminhos para explorar outros pontos de vista sobre o tema.

Uma Breve Análise Epistemológica das Equações Diofantinas Lineares em \mathbb{Z} .

Para compreensão dos possíveis desenvolvimentos, possibilitar alguma contribuição no Ensino Médio e encaminhar as questões propostas, expõe-se a seguir uma breve análise epistemológica das equações diofantinas lineares para mapear se, e em que medida, trilhas e escalas são passíveis de serem utilizadas de modo a favorecer os aspectos formativo e informativo no ensino.

Como introdução, destaco a **equação diofantina** definida como “uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras. Uma equação deste tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções” (COURANT; ROBBINS, p.59, 2000).

Em particular, serão considerados problemas envolvendo a busca de soluções inteiras da forma $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, conhecida como *equação diofantina linear a duas incógnitas*.

Inicialmente, “as soluções triviais são dadas quando $a = 0$ e $b = 0$. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então existe solução se b divide c e, nesse caso a solução geral é dada por x inteiro qualquer e $y = \frac{c}{b}$. Analogamente, se $a \neq 0$ e $b = 0$ então existe solução se a divide c e a solução será obtida por $x = \frac{c}{a}$ e y inteiro qualquer” (UNIVERSIDADE DE MINHO, 2003, p. 26).

Para os casos não-triviais existem vários tipos de possíveis abordagens, que serão expostas a seguir e comparadas, permitindo delimitar a abrangência e limites em prol da Didática, embasadas numa abordagem em situações-problema contextualizadas.

A Abordagem pelo Método da Tentativa e Erro

A tentativa e erro é uma abordagem que remonta aos antigos povos, desde os egípcios e os babilônios. Foi muito utilizada até o início da Renascença, e, em particular, em problemas de equações indeterminadas, tendo seu auge na Idade Média, conforme inúmeros relatos expostos na obra de Ore (1988). Isto se deve principalmente a

incipiente linguagem algébrica desenvolvida na Matemática até este período, que conservava um caráter predominantemente empírico.

A tentativa e erro é uma estratégia interessante de ser abordada e importante do ponto de vista didático, se constituindo numa estratégia de base, que viabiliza a ação do aluno para as tentativas de busca de solução, inserindo-o na atividade³. Ela consiste em se adotar um valor qualquer de x (ou de y) e encontrar o correspondente valor de y (ou de x), por mera substituição.

Um exemplo clássico e de extrema relevância de tal abordagem ocorreu na 1ª fase da Fuvest⁴, no seguinte problema:

Um caixa eletrônico de banco só trabalha com notas de R\$ 5,00 e R\$ 10,00. Um usuário deseja fazer um saque de R\$ 100,00. De quantas maneiras diferentes o caixa eletrônico poderá fazer esse pagamento? a) 5; b) 6; c) 11; d) 15; e) 20 (FUVEST, 1990).

A importância deste problema, que remonta a cerca de 20 anos, se deve principalmente a utilização de um contexto de fácil entendimento e num entorno cotidiano, associado a valores monetários de grandeza numérica adequada, fatores que favorecem e incentivam o aluno para uma busca inicial de algumas ou todas as soluções, através da manipulação aritmética.

A relevância deste problema da FUVEST (1990) se renova, na medida em que surgem versões em livros didáticos do ciclo básico, como no problema: “Um caixa eletrônico trabalha com notas de 5, 10 e 50 Reais. Um usuário deseja fazer um saque de R\$ 100,00. De quantas maneiras diferentes o caixa eletrônico poderá fazer o pagamento?” (SMOLE; DINIZ, 2003, p. 210).

Outro manual apresenta a versão: “Uma pessoa quer trocar duas cédulas de 100 Reais por cédulas de 5, 10 e 50 reais, recebendo cédulas de todos esses valores e o maior número possível de cédulas de 50 reais. Nessas condições, qual é o número mínimo de cédulas que ela poderá receber?” (IEZZI et. al., 2004, p. 339).

Selecionei, para uma análise inicial, o problema encontrado em um terceiro material: “Utilizando apenas notas de R\$ 5,00 e R\$ 10,00, verifique de quantos modos pode-se trocar uma nota de R\$ 50,00”(PUERI DOMUS, 2004, p. 226).

3 Esta possibilidade da atividade em favorecer o comprometimento do aluno com a situação-problema denomina-se devolução, de acordo com Brousseau (1986 apud CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN, p. 217, 2001).

4 A FUVEST (Fundação Universitária para o Vestibular) realiza uma das avaliações mais concorridas do país, que permite ingressar nas mais conceituadas faculdades, como por exemplo, a USP (Universidade de São Paulo), dentre outras.

Para isto, o livro didático solicitava que os alunos preenchessem uma tabela, conforme pode ser observado abaixo.

x (nº de cédulas de R\$ 5,00)	0	2	4	6	8
y (nº de cédulas de R\$ 10,00)	5	4	3	2	1

Tabela 1: As seis soluções do problema dos saques no caixa eletrônico.

Esta é uma situação simples e cotidiana, numa abordagem que envolve um número de soluções em quantidade discreta, favorecendo a organização dos dados, de modo a permitir a determinação de todas as seis soluções naturais.

A citação do método de tentativa e erro é raramente encontrada nos manuais de Teoria dos Números. Encontramos breve menção de sua utilização em somente um deles, como observação final após a resolução de um exercício, na qual o autor pondera que para “(...) resolver equações como a acima, não é necessário usar toda a técnica que desenvolvemos, pois os números envolvidos são suficientemente pequenos para que seja viável achar as soluções por inspeção” (HEFEZ, 2005, p. 73).

Em Matemática, problemas que utilizam a tentativa e erro como uma das possíveis estratégias são raramente encontrados em manuais didáticos do Ensino Médio. Em particular, com relação às equações diofantinas lineares, encontramos a seguinte exceção: “No jogo de basquete, as cestas podem valer 3 pontos, 2 pontos ou 1 ponto (lance livre). Encontre todas as maneiras de um time fazer 15 pontos. (Sugestão: faça uma tabela organizada)” (DANTE, 2005, p. 249).

Este problema apresenta vinte e sete soluções e é um exercício que, apesar da sugestão do autor, exige um acentuado grau de organização para encontrá-las. Assim, este problema impõe um limite à estratégia da tentativa e erro, se constituindo num verdadeiro obstáculo didático, conforme indicam Chevallard; Bosch; Gascón (2001). Esta situação favorece uma abertura para reavaliar o uso desta estratégia e o questionamento se não existem outros processos mais eficientes, abrangentes e elegantes, que é um dos objetivos deste artigo.

Nesses moldes, os raros problemas envolvendo equações diofantinas lineares que encontrei em manuais do Ensino Médio apresentam, no caderno do professor, indicação da utilização do método da tentativa associado a **conceitos da Teoria dos Números**. Esta variação de estratégia, que utiliza várias formas de uso da linguagem matemática, consiste basicamente em inicialmente determinar a lei de formação, na forma algébrica, adotar alguns valores de uma das variáveis e, por substituição, encontrar os valores da outra variável. Um exemplo desta técnica é apresentado em:

O novo código de trânsito de um país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas: em caso de infringência às leis do trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima. a) Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes foi autuado por infração gravíssima? (IEZZI et. al, 2004, p.20).

A solução realizada pelo autor é apresentada no Manual do Professor da referida obra:

Seja $x, x \in \mathbb{N}$ o número de autuações por infração gravíssima: $P = 4a + 5b + 7x$.

$$a) p = 37 \Rightarrow 4a + 5b + 7x = 37 \Rightarrow 7x \leq 37 \Rightarrow x \leq \frac{37}{7} \cong 5,3 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Entretanto, se $x = 5$, teríamos $4a + 5b = 2$, o que nunca ocorre.

Nas demais hipóteses:

$x = 0$: $a = 3$ e $b = 5$, por exemplo, satisfazem.

$x = 1$: $a = 0$ e $b = 6$, por exemplo, satisfazem.

$x = 2$: $a = 2$ e $b = 3$, por exemplo, satisfazem.

$x = 3$: $a = 4$ e $b = 0$, por exemplo, satisfazem.

$x = 4$: $a = 1$ e $b = 1$, por exemplo, satisfazem.

(IEZZI et. al, 2004, p.32).

Na resolução proposta pelo autor foram utilizados: transcrição dos dados do enunciado em escrita algébrica (lei de formação); uso de axioma no universo dos números naturais, em que a parte é menor ou igual ao todo; resolução da inequação de 1º grau em \mathbb{N} ; determinação do conjunto de possibilidades para a variável em questão, em \mathbb{N} , e cálculos numéricos em \mathbb{N} .

Em outro problema, dos mesmos autores, encontramos o seguinte enunciado: “Dois irmãos, João e José, pescaram em uma manhã ‘x’ e ‘y’ peixes, respectivamente. Sabendo que $3x + 4y = 61$, determine as possíveis quantidades de peixes que eles conseguiram juntos?” (IEZZI et. al, 2004, p.200).

A solução apresentada no Manual do Professor da referida obra é dada por: De $3x + 4y = 61$ vem $x = \frac{61 - 4y}{3}$, em que x e y são naturais, pois representam o números de peixes ‘capturados’ por cada irmão. Para que x resulte natural, o numerador $61 - 4y$ deve ser múltiplo de 3 e, além disso, positivo, isto é: $61 - 4y > 0 \rightarrow y < \frac{61}{4} = 15,25, y \in \mathbb{N}$. Verificando: $y = 15 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$; $y = 14 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$; $y = 13 \rightarrow x = 13$ (16 peixes ao todo). As possibilidades seguintes são obtidas para:

$$y = 10 \rightarrow x = 7 \rightarrow 17 \text{ peixes ao todo;}$$

$$y = 7 \rightarrow x = 11 \rightarrow 18 \text{ peixes ao todo;}$$

$$y = 4 \rightarrow x = 15 \rightarrow 19 \text{ peixes ao todo;}$$

$$y = 1 \rightarrow x = 19 \rightarrow 20 \text{ peixes ao todo.}$$

(IEZZI et. al, 2004, p.73).

Na resolução proposta pelo autor foram utilizadas: a transcrição dos dados do enunciado em lei de formação; isolar a incógnita correspondendo ao menor coeficiente da Equação Diofantina Linear; utilização do conceito de múltiplo e as soluções inseridas no conjunto dos Naturais; resolução da inequação de 1º grau em \mathbb{N} e obtenção de um conjunto de possibilidades para a variável em questão, no âmbito do conjunto dos Naturais; utilização do método da tentativa e erro.

A Abordagem pelo método gráfico.

A equação diofantina linear que possui solução não vazia pode ser analisada sob a perspectiva gráfica, representando um conjunto de pontos no plano cartesiano. Então, “podemos interpretar a resolução da equação diofantina [linear] como o problema de determinar os pontos da reta que têm ambas as coordenadas inteiras” (MILIES; COELHO, 2003, p. 98).

Este tipo de solução possui algumas características. Primeiramente, ela necessita da organização das tentativas para se determinar alguns pares ordenados numa sequência que permita a visualização das soluções em \mathbb{R}^2 . Assim, a representação gráfica está associada ao uso de uma tabela para organizar algumas soluções com valores de ‘x’ em ordem crescente (ou decrescente), que serve de suporte para uma generalização de propriedades, através da observação do padrão de crescimento ou decrescimento dos valores de x ou dos valores de y.

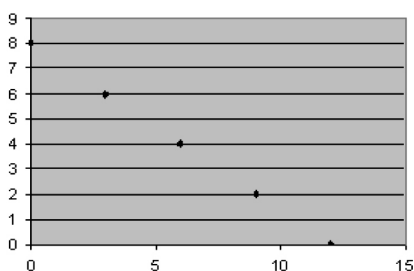
Um primeiro entrave para esta abordagem é a limitação de capacidade de representação em \mathbb{R}^2 , dependendo do número de soluções de uma Equação Diofantina Linear. Um segundo entrave do método gráfico é a falta de generalidade, própria deste registro. Porém, a visualização das soluções na forma gráfica pode propiciar elementos para a observação de padrão no procedimento de busca de soluções da Equação Diofantina Linear e também permite explorar a associação com uma função discreta de 1º grau, através do conceito de taxa de variação e do coeficiente linear.

Assim fazendo, o aluno poderá efetuar as transposições de representação numérica, gráfica e algébrica, dando um maior significado ao objeto de estudo matemático e até podendo ser suporte para o amadurecimento de um método mais geral de resolução, para uma equação diofantina linear.

Não encontrei nos livros didáticos do ciclo básico e do ensino superior de Matemática situações envolvendo o recurso gráfico para resolver uma equação diofantina linear. Porém, alguns livros de Microeconomia apresentam temas que utilizam o recurso gráfico associado à escrita algébrica, para esclarecer o conceito a ser apresentado. Isto propicia um contexto adequado e acaba permitindo a exploração e articulação no desenvolvimento de ideias Matemáticas. Um dos problemas encontrados se denomina: *Qual sua escolha: CD ou DVD?*

Considere a seguinte situação: Uma aluna, Michele, fã de música, reserva num certo mês R\$ 120,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$ 10,00 e um DVD R\$ 15,00. Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R\$ 120,00? (STIGLITIZ; WALSH, 2003, p.27).

A solução do problema pelos autores está representada abaixo:



x	y
0	8
3	6
6	4
9	2
12	0

(STIGLITIZ; WALSH, 2003, p.27).

O conceito da Microeconomia associado a esta situação é a ‘Restrição Orçamentária’, que neste caso implicitamente revela a equação diofantina linear $10.x + 15.y = 120$, onde ‘x’ e ‘y’ representam, respectivamente, as quantidades de CDs e DVDs possíveis que Michelle poderá adquirir.

A representação cartesiana das soluções deste problema aproxima ideias Matemáticas importantes, contrapondo o caráter discreto das incógnitas envolvidas no problema. Stiglitz e Walsh (2003) ponderam que, na representação gráfica, as cinco soluções indicadas pelos pontos (pares ordenados) podem ser unidas por meio de uma reta pontilhada. Porém, os autores mencionam que usualmente, nos livros didáticos de Economia, os pontos são unidos por meio de uma reta, deixando uma boa oportunidade de esclarecer um importante ponto: o caráter discreto das grandezas envolvidas nesta área e o modo correto de representá-las graficamente.

Às vezes, obviamente, nem todos os pontos do gráfico são significativos do ponto de vista econômico. É impossível comprar meio DVD ou meio CD. Na maioria dos casos ignoramos essas considerações ao plotar gráficos; consideramos que qualquer ponto da restrição orçamentária é possível (STIGLITIZ; WALSH, 2003, p.36).

Complementando esta última posição, Resende (2007) aponta que a concepção vigente em tratar os inteiros como subconjuntos dos números reais conduz a simplificações que desprezam aspectos fundamentais dos números inteiros.

Acreditamos que a situação acima permite refletir o entendimento de questões ligadas às quantidades discretas. Neste sentido, Brolezzi (1996) alerta sobre um desequilíbrio no programa da escola básica entre a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo. O referido autor destaca a predominância, no Ensino Médio, na abordagem de situações envolvendo a Matemática do Contínuo. Assim, há a necessidade de explorar nesta faixa de ensino a elegante e complementar interação entre essas duas correntes.

Observa-se a riqueza no desenvolvimento da resolução destes problemas, articulando as várias linguagens e possibilitando o desenvolvimento de várias competências necessárias neste ciclo. Localizamos como limitante da utilização do método da tentativa e erro e no método gráfico, na resolução de uma Equação Diofantina Linear, os casos que possuem infinitas soluções ou então, nenhuma solução inteira. A seguir, serão apresentadas abordagens que permitem o encaminhamento nestas situações de contorno.

A abordagem utilizando conceitos da Teoria dos Números

Algumas situações podem ser abordadas no ciclo básico utilizando-se conceitos advindos da Teoria dos Números. Inicialmente, expomos uma situação veiculada numa revista, que publica problemas tratados numa importante competição de Matemática, cujo enunciado traz um contexto financeiro:

Camila possui R\$ 500,00 depositados num banco. Duas operações bancárias são permitidas, retirar 300 e depositar 198. Essas operações podem ser repetidas quantas vezes Camila desejar, mas somente o dinheiro inicialmente depositado pode ser usado. Qual o maior valor que Camila pode retirar do banco? (REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS, p. 13, 2003).

Na modelação, surge a equação diofantina linear $198x - 300y = 6 \cdot (33x - 50y)$ onde 'x' é a quantidade de depósitos e 'y' a quantidade de retiradas, cuja resolu-

ção inicial pode empregar a fatoração do primeiro membro da equação. Assim, $198x - 300y = 6 \cdot (33x - 50y)$, o que garante que o resultado procurado deve ser múltiplo de 6. A partir de 500, que não é múltiplo de 6, encontra-se facilmente 498, que representa o maior valor que Camila pode retirar do banco.

Encontramos um outro ‘probleminha’ sobre idades, na Revista do Professor de Matemática:

João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento? (PEREIRA; WATANABE, 2005, p. 54).

A solução apresentada pelos autores do artigo na revista foi a seguinte:

Suponhamos que Pedro nasceu no dia x , $1 \leq x \leq 31$ do mês y , $1 \leq y \leq 12$. Pelo enunciado, $12x + 31y = 368$. Observa-se que 4 é um divisor de 12 e de 368 e, como 31 e 4 são primos entre si, 4 tem que ser um divisor de y . Os possíveis valores de y são 4, 8 e 12. Somente $y = 8$ resultará um valor inteiro para x , no caso $x = 10$. O aniversário de Pedro é no dia 10 de agosto. O produto pedido é 80. (PEREIRA; WATANABE, 2005, p. 54).

A seguir, retomamos um problema apresentado anteriormente, ‘Quantos CDs ou DVDs?’, com a seguinte modificação na variável didática⁵:

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês uma certa quantia para a compra de CDs ou DVDs. Se um CD custa R\$ 12,00 e um DVD R\$ 16,00, quais são as várias possibilidades de aquisição de um deles ou de ambos, gastando-se exatamente R\$ 70,00? E qual a equação que representa este problema? (POMMER, 2008, p. 62).

Este problema apresenta solução vazia, sendo tal fato observado a partir da escrita algébrica $12x + 16y = 70$, que simplificada resulta: $6x + 8y = 35$. Nesta última equação, o primeiro membro resultará num número par, diferindo em paridade⁶ com o segundo membro.

5 Segundo Brousseau (1986 apud CHEVALLARD, BOSCH; GASCÓN, p. 215–216, 2001), variáveis didáticas são aquelas que o professor pode fazer uso de modo a possibilitar a evolução de estratégias numa situação de ensino.

6 Dois números inteiros têm mesma *paridade*, quando são ambos pares ou ambos ímpares.

A seguir, é apresentada uma situação aplicada a alunos do Ensino Médio, que revelou o desenvolvimento dos múltiplos de um número inteiro como estratégia de resolução.

DINARLÂNDIA:

Em um reinado distante, de regime monarquista parlamentarista, existem cédulas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 dinares, que permitem pagar e receber troco nas transações monetárias mais usuais (em dinares).

O rei, excêntrico por natureza, resolveu, por decreto, extinguir as cédulas existentes, retirando-as de circulação. Então, instituiu operações de pagar e receber troco, somente com novas cédulas de 4 e 6 dinares. O primeiro-ministro argumenta com o rei que a utilização de cédulas de 4 e 6 dinares é matematicamente imprópria. Cada grupo deve escrever uma declaração, embasada em algum argumento, de preferência matemático, mostrando se o grupo concorda ou discorda do primeiro-ministro.

Argumento: _____

A seguir, cada grupo deverá expor seu argumento ao adversário. Terminada a exposição, cada grupo terá que apresentar um veredicto quanto ao argumento do adversário:

() Argumento correto ou () Argumento incorreto

(se assinalou argumento incorreto, descreva abaixo o motivo)

Motivo: _____

Ainda, o rei, descontente com seu primeiro-ministro, mas não podendo demiti-lo por causa disso, resolve estabelecer um duelo a nível nacional para resolver a questão de quais deveriam ser as duas moedas nacionais, achando que este concurso o ajudaria a desacreditar o primeiro-ministro, comprovando o mérito de seu decreto. O rei assim proclama:

Hoje e somente hoje, abro inscrições para os súditos reais que desejam colaborar com o Tesouro Nacional. Será paga a quantia de cem mil dinares ao(s) súdito(s)

que me mostrar(em) quais são as maneiras que podem ser estabelecidas as duas cédulas necessárias para dar ou receber qualquer quantia monetária em dinares. Ainda, dentre as várias maneiras, o(s) súdito(s) deverá(ão) argumentar qual seria a mais cabível dentre todas, de modo a promover o bem estar monetário da nação. A regra única é que as cédulas deverão ser números naturais menores que 7. A única exceção desta regra é a impossibilidade de emissão de cédula de 1 dinar. Cabe aos súditos procurar e achar a solução (POMMER, 2008, p. 87).

Esta atividade utiliza o conceito de paridade⁷, o múltiplo ou o divisor como estratégia preferencial para a tomada de decisão em relação à possibilidade de solução. Assim, este desafio possibilita a reflexão sobre a quantidade mínima de cédulas que podem ser utilizadas por um país em operações bancárias de ‘dar’ e ‘receber’ troco, assim como favorece o levantamento de conjecturas envolvendo a relação entre os valores das cédulas deste suposto ‘reinado’ e as possíveis operações monetárias do dia a dia.

Conforme Machado (2004), o uso da narrativa se constitui em importante elemento de composição de atividades, sendo uma competência necessária na ação didática do professor. Em particular, na situação proposta, a escolha do desafio na forma narrativa, ambientado numa situação hipotética, desvincula o usualmente estabelecido (um país não apresenta somente duas cédulas para as transações comerciais), o que permite ao aluno desenvolver a autonomia, estimula a reflexão crítica e o debate para o levantamento de hipóteses e a tomada de decisão.

Assim, a situação permite uma possível extrapolação, pelo repensar dos aspectos básicos de composição de um sistema monetário, articulados pelo uso de conhecimentos matemáticos envolvendo as propriedades dos números, podendo se constituir em uma pequena contribuição para favorecer aspectos de formação da cidadania, explorando uma competência comum e essencial⁸ proposta pelo ENEM, Brasil (2009).

A Abordagem através da Análise Diofantina (ou Algoritmo das Frações Contínuas).

Nos problemas resolvidos por Diofante, no seu livro *Arithmetica*, pesquisadores perceberam uma metodologia comum, que apesar de não ter sido explicitada por Diofante, é atualmente denominada Análise Diofantina.

7 A escolha das cédulas na 1ª parte permite que sejam efetuados pagamentos e transações comerciais envolvendo números pares, pois a adição ou subtração de dois pares resulta par. Na 2ª parte, as combinações possíveis de notas (em dinares) são quatro: 2 e 3; 2 e 5; 3 e 5; 4 e 5.

8 Competência V: Capacidade “de elaboração de propostas de intervenção solidária da realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural” (BRASIL, 2009, p. 1).

Ao se deparar com a Equação Diofantina Linear $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, o método consiste inicialmente em se isolar, à esquerda da equação, o termo com menor coeficiente. Supondo que $a < b$, então ficaríamos com: $ax = c - by \Rightarrow x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \cdot y$.

Iremos exemplificar o uso da abordagem pela Análise Diofantina no seguinte problema:

Preciso selar um envelope com a franquia de 75 escudos mas só tenho selos de 50 escudos, de 8 escudos e de 1 escudo. Quantos selos de cada valor deverei usar, sendo que no envelope só há espaço para 5 selos? (RENIZA, 2006).

A resolução deste problema envolve duas equações de 1º grau a três incógnitas. Ao se resolver o sistema composto por estas duas equações, obtém-se uma só solução natural. Assim, denominando-se ‘x’ o número de selos de 50 escudos, ‘y’ o número de selos de 8 escudos e ‘z’ o número de selos de 1 escudo, tem-se:

$$\begin{cases} 50x + 8y + 1z = 75 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50x + 8y + 1z = 75 \\ -x - y - z = -5 \end{cases} \Rightarrow 49x + 7y = 70 \Rightarrow 7x + y = 10$$

Ao se isolar o coeficiente de menor valor, obtém-se: $7x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 7x$. Como as parcelas 10 e -7 são inteiras, a solução ocorre por simples inspeção, organizada na tabela 2.

x	0	1	2
y	10	3	-4
z	não serve	1	não serve

Tabela 2

Portanto, a única solução é: $x = 1; y = 3; z = 1$.

Se as parcelas c/a e b/a não forem inteiras torna-se necessário a separação das frações não inteiras em duas partes, sendo uma inteira e a outra não inteira. A parte não inteira seria obtida com o denominador igual ao resto da divisão da fração estudada pelo denominador em questão. Tal abordagem está exemplificada no problema abaixo.

Um lavrador do século passado gastou mil escudos na compra de cem animais de três espécies diferentes. Cada vaca custa cem escudos, cada porco trinta escudos e cada ovelha cinco escudos. Supondo que o lavrador comprou

pelo menos um animal de cada espécie, quantos animais de cada espécie ele comprou? (RENIZA, 2006).

Denominando o número de vacas por 'x', o de porcos por 'y' e o de ovelhas por 'z', teremos duas equações de 1º grau a três incógnitas formando o sistema:

$$\begin{cases} 100x + 30y + 5z = 1000 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por 5 obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 20x + 6y + z = 200 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se a equação $19x + 5y = 100$

Utilizando o algoritmo de frações contínuas, procurara-se primeiramente isolar o termo com o menor coeficiente à esquerda, ficando com:

$$5y = 100 - 19x. \rightarrow y = 20 - \frac{19}{5}x$$

Neste caso, o coeficiente $\frac{b}{a} = -\frac{19}{5}$, não sendo inteiro, deve ser separado da forma $y = 20 - 3x - \frac{4}{5}x$, onde '3' é o quociente da divisão de '19' por '5' e '4' é o resto.

Utilizando-se agora a condição que o número de porcos é inteiro, o número de vacas deve ser múltiplo de 5, isto é, $x = 5n$, onde n é inteiro.

Poderíamos tomar o caso trivial em que o lavrador não comprou nenhuma vaca, onde $n = 0$, que implica $x = 0$. Daí resulta $y = 20$ e $z = 80$. Atribuindo $n = 1$ resulta $x = 5$, $y = 20 - 15 - 4 = 1$ e $z = 94$. Portanto, uma solução seria 5 vacas, 1 porco e 94 ovelhas. No caso de $n = 2$, resulta $x = 10$ e $y = -18 < 0$, o que é inaceitável. Portanto, existem somente duas soluções.

O método da Análise Diofantina utiliza elementos da Teoria dos Números, como o algoritmo da divisão, o conceito de fração, o conceito de múltiplo de um número inteiro. Da parte relativa à Álgebra, esta abordagem utiliza a escrita na forma algébrica a partir das condições dadas no enunciado, a resolução de sistema de equações, o uso de função discreta de 1º grau com variáveis inteiras e o cálculo de valor numérico de uma função.

A Abordagem Algorítmica

Inicialmente, propõe-se o Teorema 1 (T1), que se refere ao máximo divisor comum entre dois números, que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de solução inteira em uma equação diofantina linear.

T1: “Sejam a, b e c inteiros [não ambos nulos], e $d = \text{m.d.c.}(a,b)$. A equação diofantina $aX + bY = c$ [nas incógnitas inteiras x e y] tem soluções se e somente se d divide c ” (MILIES; COELHO, 2003, p. 98).

Uma condição equivalente a este teorema é apresentada pelo Corolário 1 (C1):

C1: “Se $\text{m.d.c.}(a,b) = 1$, isto é, se a e b são relativamente primos (ou primos entre si), então a equação $ax + by = c$ sempre tem soluções inteiras, qualquer que seja c ” (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 42).

A utilização do Corolário para a resolução de uma Equação Diofantina Linear (E.D.L) do tipo $aX + bY = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, onde $\text{m.d.c.}(a,b) = 1$, “equivale a encontrar inteiros ‘ r ’ e ‘ s ’ tais que $ar + bs = 1$. (...) Um modo de se chegar a eles é obtido através do algoritmo de Euclides, ou algoritmo das divisões sucessivas, para o cálculo do $\text{m.d.c.}(a,b)$ ” (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 42–43).

Aplicar o Algoritmo de Euclides para se encontrar os valores de r e s equivale a resolver a equação $ar + bs = 1$ ou seja, determinar o par ordenado (r,s) . Podemos considerar esta como sendo uma solução inteira particular da Equação Diofantina Linear $aX + bY = c$. Denominando-se $r = x_0$ e $s = y_0$, então a solução particular (x_0, y_0) será utilizada para se determinar as soluções da referida equação, de acordo com Teorema 2 (T2).

T2: “Se (x_0, y_0) for uma solução da equação diofantina $aX + bY = c$ com $\text{m.d.c.}(a,b) = 1$, então (x_1, y_1) será uma solução da equação se, e somente se, existir um inteiro k tal que $x_1 = x_0 + b.k$ e $y_1 = y_0 - a.k$ ” (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 43).

Existe uma resolução alternativa, também baseada no algoritmo de Euclides. Esta forma, também utiliza a condição do termo c ser divisível pelo $\text{m.d.c.}(a,b)$, porém prescinde de se utilizar o Corolário 1. Então, este processo alternativo utiliza o Teorema 3 (T3):

T3: “Sejam a, b e c inteiros tais que $d = \text{m.d.c.}(a,b)$ divide c . Escrevendo-se $d = ra + sb$, com $r, s \in \mathbb{Z}$, temos que $x_0 = r \cdot \frac{c}{d}$; $y_0 = s \cdot \frac{c}{d}$ é uma solução da equação $aX + bY = c$. Toda outra solução é da forma: $x = r \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{d} \cdot t$; $y = s \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{d} \cdot t$, com $t \in \mathbb{Z}$. E reciprocamente, para todo $t \in \mathbb{Z}$ os valores ‘ x ’ e ‘ y ’ dados pelas fórmulas acima são soluções da equação” (MILIES; COELHO, 2003, p. 99).

Exemplificando, seja a seguinte situação: “Suponhamos que só existiam moedas de 15 escudos e de 7 escudos e que eu queria pagar (em escudos) uma certa quantia. Será que é sempre possível? E se só existirem moedas de 12 e 30 escudos?” (UNIVERSIDADE DE MINHO, 2003, p. 25).

O problema deixa em aberto a quantia total disponível que poderá ser paga. Isto requer a interpretação, que qualquer que seja esta quantidade, ela será possível se pagar 1 escudo. Assim sendo, o problema recai na Equação Diofantina Linear $15x + 7y = 1$, sendo ‘x’ e ‘y’ as notas de 15 e 7 escudos a serem operadas.

Para a primeira pergunta, referente as moedas de 15 e 7 escudos, é sempre possível obter uma solução com quantidades inteiras, pois na troca de moedas, o ato de pagar pode se associar a operação de adição e o ato de receber a operação de subtração.

Uma primeira solução é dada por pagar uma moeda de 15 escudos e receber de volta duas moedas de 7 escudos, pagando 1 escudo. A solução geral das infinitas soluções é dada por:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = 1 + 7t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = -2 - 15t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

No caso da segunda pergunta, referente à utilização de moedas de 12 e 30 escudos, recai-se na Equação Diofantina Linear $12x + 30y = 6$, sendo ‘x’ e ‘y’ as notas de 12 e 30 escudos a serem operadas. Nesta nova situação, a possibilidade recai no fato da quantia de escudos a ser paga poderá somente ser múltipla de 6, garantida pela condição de existência de solução dada pelo m.d.c. dos coeficientes da Equação Diofantina Linear, ou seja, m.d.c. (12, 30) = 6.

Uma possível solução, encontrada por inspeção simples, é dada através do pagamento de 1 moeda de 30 escudos e o recebimento de duas moedas de 12 escudos, ou seja, $x_0 = -2$ e $y_0 = 1$. Assim, a solução geral é dada por:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -2 + \frac{30}{6} \cdot t = -2 + 5t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = 1 - \frac{12}{6} \cdot t = 1 - 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Conclusões

A intenção deste texto foi trilhar as principais possibilidades de resolução de uma Equação Diofantina Linear, no âmbito do conjunto dos inteiros. A riqueza propiciada pelas diversas abordagens para a resolução das situações propostas possibilita ao aluno do ciclo básico um ganho procedimental, aprimorando o uso e articulação entre as diferentes linguagens (numérica, algébrica, gráfica e natural).

Também, a exploração em sala de aula referendada pela gênese e evolução dos conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares permite abertura para estabelecer uma rede de significados, conforme Machado (2004). Esta oportu-

nidade proporciona a articulação de conhecimentos matemáticos, presentes do atual currículo de Matemática, porém usualmente trabalhados de modo estanque e pontual. Assim, a inserção das equações diofantinas lineares como um tema articulador no ciclo básico pode promover significado ao conhecimento pelas relações constitutivas envolvidas na própria Matemática.

Ainda, aliada a natural articulação de temas internos a Matemática (intramatemática), em particular neste texto com referência as Equações Diofantinas Lineares, a própria epistemologia de tal conhecimento se enreda com a possibilidade da exploração da resolução de problemas, permitindo o desenvolvimento de competências essenciais, explicitadas em Machado (2009).

Assim, ao aluno é possibilitada a capacidade de compreensão (leitura dos problemas, selecionar dados e informações importantes), associada à capacidade de expressão pela utilização de várias estratégias de resolução e uso das várias linguagens matemáticas, representadas pela língua natural, linguagem gráfica, linguagem numérica e linguagem algébrica. Ainda, ao situar o aluno em contextos diversos estimulamos a capacidade de enfrentar as situações variadas e a necessidade de tomar decisões, manifestadas pela possibilidade de demarcar quais os limites e domínio de cada estratégia veiculada (tentativa e erro, método gráfico, conceitos da Teoria Elementar dos Números, a Análise Diofantina e a Abordagem Algorítmica).

Deste modo, a temática proposta neste texto se configura numa oportunidade de explorar a articulação do conhecimento matemático, tanto em nível conceitual como em nível procedimental, aumentando o repertório de argumentação e a expressão da personalidade do aluno, através de competências essenciais no ciclo básico.

Entendemos que tais situações devem ser veiculadas permitindo-se a ação do aluno, essencial para que haja espaço para a realização das tentativas e buscas necessárias, com uma moderada (e se possível nula) interferência do professor durante a realização das atividades. O aluno, situado num ambiente convidativo e motivador para refletir sobre as situações-problema, pode manifestar, a partir da estratégia da tentativa e erro, condições para o desenvolvimento das outras estratégias delineadas neste texto.

Esta importância ficou evidenciada quando do lançamento da matriz de referência para o ENEM, Brasil (2009), em particular para as competências de Matemática e suas Tecnologias, onde há a menção na construção de significado para os números inteiros.

Assim, ao se permitir ao aluno enfrentar situações-problema num âmbito de contextualização, abre-se oportunidade para exercitar a capacidade de compreensão, há o incentivo a autonomia pela possibilidade de mobilização de estratégias variadas, que permitem ao aluno expressar e articular conhecimentos matemáticos presentes no próprio ciclo básico, conforme Machado (2004).

A elaboração de situações de ensino que permitam ao estudante reconstruir em parte este caminho, propiciado pelo olhar sobre a gênese das equações diofantinas lineares, permite dar significado ao objeto matemático, mostrando que com o passar do tempo vai ficando clara a verdadeira posição dos conhecimentos e como se situam uns em relação aos outros.

Referências

- BRASIL. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília: Ministério da Educação, 2009.
- BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. 1996. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.
- CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory**. London: Ablex Publishing, Cap. 1. p. 1–14, 2002.
- CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução de: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução de: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- DANTE, L. R.. **Coleção Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2005.
- FUVEST. **Download de Provas**: 1990. Disponível em: < <http://www.fuvest.br/vest1990/provas/provas.stm>>. Acesso em: 10 ag. 2009.
- HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- IEZZI, G. et. al. **Coleção Matemática, Ciência e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Editora Atual, v.2, 2004.
- MACHADO, N. J. **Conhecimento e Valor**. São Paulo: Editora Moderna, 2004.
- _____. **Educação: Competência e Qualidade**. São Paulo: Escrituras, 2009.
- _____. **Educação e Autoridade**. São Paulo: Editora Vozes, 2008.
- MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. **O que se entende por Álgebra?** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.
- MELLO, G. N. **Ensino Médio: um desafio educacional novo para a sociedade brasileira**. 2002.
- MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. São Paulo: EDUSP, 2003.

- ORE, O. **Number Theory and Its History**. New York, Dover Publications Inc. Cap 6–8, p.116–207, 1988.
- PEREIRA, A. L.; WATANABE, R. **Seção O Leitor Pergunta**: Um probleminha sobre idades. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 1º quadr. 2005.
- POMMER, W. M. **EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES**: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. 2008. 155f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo.
- PUERI DOMUS ESCOLAS ASSOCIADAS. **Matemática** (7ª série). São Paulo, Unidade 5, p. 224–229, 2005.
- RENIZA. **Coletânea de Problemas**. Disponível em: <<http://www.reniza.com/matematica/diofantina>>. Acesso em: 15 mai. 2006.
- RESENDE, M. R. **Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura**. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS. **Coletâneas de Problemas**. Goiás: Universidade Federal de Goiás, n. 4, abr. 2003.
- ROCQUE, G.; PITOMBEIRA, J. B. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 19, p. 39–47, 1991.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática**: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, v.1, 2003.
- STIGLITIZ, J. E.; WALSH, C. E. **Introdução à Microeconomia**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2003.
- UNIVERSIDADE DE MINHO. **Equações Diofantinas**. Portugal, 2003. Cap. 2. Disponível em: <http://www.math.uminho.pt/.../outros/2003_Capitulo2>. Acesso em: 12 jul. 2006.

Submetido em outubro de 2010.

Aprovado em junho de 2011.