Conhecimentos Mobilizados por Estudantes do Curso de Matemática sobre o Conceito de Grupo

Christian James de Castro Bussmann
Professor, UENP/Campus Luiz Meneghel
christian@uenp.edu.br

Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Professora, UEL
angelamarta@uel.br

Resumo
Apresentamos neste trabalho os resultados de uma pesquisa que investigou quais conhecimentos sobre o conceito de grupo são mobilizados por estudantes que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos, na resolução de um conjunto de questões. Estudantes da terceira e quarta séries de um Curso de Licenciatura em Matemática resolveram problemas envolvendo grupos e seus registros escritos foram analisados segundo as concepções e fases apontadas por Sfard (1991).

Palavras-chave: Educação Matemática. Grupos. Ensino Superior. Reificação. Operacional.

Knowledge Mobilized by Students of Mathematic Course on the Group Concept

Abstract
This paper presents the results of a survey that investigated what knowledge about the concept of the group are deployed by students who have studied algebraic content disciplines in resolving a number of questions. Students from third and fourth sets of a degree course in mathematics solved problems involving groups and their written records were analyzed according to the concepts and phases identified by Sfard (1991).

Keywords: Mathematical Education. Groups. Higher Education. Reification. Operational.

Introdução

Neste trabalho, apresentamos os resultados de uma pesquisa relacionada com o tema **Grupos**, cuja escolha deve-se ao fato dessa estrutura abstrata sempre nos inquietar pela dificuldade no seu entendimento e sua necessidade para a formação do professor.

Considerando que o conceito de **Grupo** aparece em vários momentos em cursos de matemática, pois ao trabalhar com os conjuntos numéricos, com matrizes e suas operações ou com permutações, estamos implicitamente trabalhando com grupos, cremos que abordar esse conteúdo seja importante para a formação do matemático e/ou futuro docente.

Nosso objetivo foi investigar quais conhecimentos sobre o conceito de Grupo são mobilizados por estudantes de um curso de matemática, habilitação licenciatura, que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos, na resolução de um conjunto de questões.

Para tanto, aplicamos um instrumento contendo oito questões (Anexo 1) a estudantes desse curso, buscando identificar traços do conteúdo **Grupos** em seus registros escritos.

Na análise desses registros utilizamos as noções abstratas de conceitos matemáticos de Sfard (1991), que nos permitiram fazer considerações a respeito de estruturas algébricas no Ensino Superior. A autora entende as noções abstratas de conceitos matemáticos como estruturais (como objeto) e operacionais (como processo). Além disso, defende a existência de fases (interiorização, condensação ou reificação) que se manifestam no desenvolvimento de conceitos matemáticos, em particular, de estruturas algébricas.

Concepções sobre um conceito matemático:

Fundamentamos nossa pesquisa em Sfard (1991), que apresenta noções abstratas classificadas de duas maneiras: **estrutural** — como objeto, e **operacional** — como processo. A autora argumenta que a inacessibilidade matemática ultrapassa todas as dificuldades encontradas em outras áreas do conhecimento, fazendo com que a matemática seja a mais abstrata das ciências. Neste sentido, Tall (2002) afirma que, mesmo dentro da matemática, o pensamento matemático avançado (do ensino superior) se diferencia dos outros pensamentos, pois ele é dedutivo e abstrato.

Para Sfard (1991), essa inacessibilidade matemática é mais qualitativa do que quantitativa, pois para entendê-la é preciso olhar para a origem das dificuldades e investigar o caráter epistemológico relacionado à natureza do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, uma questão que a incomoda é: “Como a abstração matemática difere dos outros tipos de abstrações em sua natureza, na maneira de se desenvolver e nas suas funções e aplicações?” (SFARD, 1991, p.2).

Uma possível resposta seria mais facilmente encontrada na matemática, ou no pensamento matemático do ensino superior, em que, segundo a autora, “[…] a diferença entre a matemática e outras ciências torna-se mais evidente.” (SFARD, 1991, p.2). Da mesma forma, Tall (2002) afirma que:

> […] devemos focar nossa atenção no círculo de atividades do pensamento matemático avançado: do ato criativo de considerar um contexto em pesquisa matemática, passando pela formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova (TALL, 2002, p.3)

O mesmo autor ainda considera que muitas das atividades que ocorrem nesse círculo também ocorrem na resolução de problemas matemáticos elementares, contudo a possibilidade de definição e dedução formal é um fator que distingue o pensamento matemático avançado.

Sendo assim, ao refletirmos a respeito dessa inacessibilidade da matemática, cremos que o trabalho com objetos matemáticos relacionados ao ensino superior pode nos ajudar a entender a diferença entre a abstração matemática e a abstração considerada como estado de alheamento do espírito, e também, como o conceito matemático emerge e quais são suas origens. Esse entendimento nos permitiria estabelecer uma ligação entre o pensamento e o conhecimento matemático, contribuindo para a compreensão das noções abstratas citadas anteriormente. Faremos agora algumas considerações sobre conceito e concepção.

Sfard (1991) considera conceito como “[…] uma construção teórica dentro “do universo formal do conhecimento ideal” (SFARD, 1991, p.3).

Assim, entendemos por **conceito** uma idéia matemática construída por meio de uma definição rigorosa e aceita pela comunidade matemática. E por **concepção** a formação, pelo sujeito, a partir de experiências, de representações e associações emanadas do conceito.

Tendo um entendimento de conceito e concepção neste trabalho, apresentamos a seguir como Sfard (1991) classifica noções abstratas como **concepção estrutural** e **concepção operacional**.

A **concepção estrutural** de um conceito matemático se dá quando o estudante consegue tratar o conceito como objeto, olhando como um todo sem se prender a detalhes que envolvem o mesmo, “o pensamento estrutural cria uma fisionomia para o conceito” (IBID). Por exemplo, quando entende o conceito e não somente exemplos daquele conceito.

Já a **concepção operacional** ocorre na efetivação do conceito como um processo, "implica olhá-lo mais como um potencial do que como um conceito, o qual vem de uma seqüência de ações" (IBID). Por exemplo, quando consegue trabalhar com o conceito sem necessariamente defini-lo.

A autora ainda afirma que a concepção estrutural é estática, instantânea e integradora e a operacional é dinâmica, seqüencial e detalhada.

Mesmo com essa distinção revelada pelas concepções estruturais e operacionais, Sfard (1991) argumenta que é praticamente impossível formular definições exatas do raciocínio estrutural e operacional. Assim, os elementos comuns às duas concepções são quantitativos, isto é, graus de abstração e de integração e, suas diferenças são qualitativas, isto é, a respeito das entidades matemáticas.

Sfard (1991) afirma que as concepções estruturais e operacionais não são exclusivas, mas sim complementares, e sendo assim considera que a noção matemática é dual. Afirma que para se ter um conhecimento profundo da matemática é imprescindível ver o conceito matemático como um **processo** e como um **objeto**.

Entendemos que a definição de grupo seria uma concepção estrutural, pois se apresenta estática e instantânea. A concepção operacional aparece no processo de desenvolvimento desse conceito, numa forma dinâmica e seqüencial, advindo da busca de soluções para equações algébricas, de permutações e do trabalho com conjuntos numéricos.

Como exemplo, Sfard (1991) argumenta que representações algébricas que contém o sinal de igual (=) podem ser interpretadas de ambas as maneiras (operacional e estrutural), devido à dualidade do símbolo de igual (=), o qual pode ser interpretado como uma identidade ou como um "comando" para executar operações.

> As representações algébricas podem ser facilmente interpretadas de ambas as maneiras: pode ser explicada operacionalmente, como uma descrição concisa de alguns cálculos, ou estruturalmente, como uma relação estática entre duas magnitudes (SFARD, 1991, p.6).

Nessa perspectiva, o conceito de grupo pode então ter essas duas concepções. Por exemplo, no caso de verificarmos se os reais com a operação $*$, dada por $x*y = x + y - 7$, é um grupo, podemos interpretar como sendo uma relação de identidade entre duas magnitudes (estrutural), mas também podemos entender como um comando (computacional) necessário para executar operações (operacional).

Sfard (1991) afirma que os conceitos matemáticos têm uma característica mais estrutural (estática) podendo criar uma "figura mental", e assim alguns tipos de representações internas se mostram mais apropriadas que outras.

> Conceitos matemáticos são, às vezes, visualizados com a ajuda de 'figuras mentais' […] Imagens mentais sendo compactadas e integrativas, parecem sustentar a concepção estrutural […] podem ser manipuladas quase como se fossem objetos reais. […] Em contraste, a codificação verbal não pode ser captada instantaneamente à primeira vista e precisa ser processada sequencialmente, sendo, portanto, parecer ser mais apropriada para representação de procedimentos de cálculo. Logo, a representação interna não-figurativa é mais pertinente para o modo de raciocínio operacional (IBID, p. 6–7).

A seguir discutiremos como o desenvolvimento histórico, psicológico e cognitivo do conceito e as concepções estrutural e operacional se relacionam.

Sfard (1991) afirma que a concepção operacional, em muitos casos, ocorre antes da estrutural, sendo que a história apresenta algumas situações em que se percebe tal evento, assim como exceções a tal afirmação.

> Um olhar cuidadoso na história dos conceitos de números ou funções nos mostrará que eles foram concebidos operacionalmente muito antes que suas definições e representações estruturais fossem inventadas (SFARD, 1991, p.11).

Sfard (1991) acredita que alguns desenvolvimentos históricos se deram em um processo cíclico, e, a cada ciclo, surgia algo novo. É nessa perspectiva que acreditamos que o conceito de **Grupo** surgiu sempre na tentativa de se resolver equações algébricas cada vez mais complexas.

Esta manifestação histórica pode evidenciar as alterações do operacional para estrutural e em que momento se deu essa mudança. No caso do conceito de **Grupo**, objeto de nosso estudo, isto pode ser significativo para entender como esse conteúdo é apresentado e por que ele é dado de tal maneira.

Segundo Sfard (1991) a formação do conceito estrutural é lenta e muitas vezes um processo difícil. Nessa perspectiva, a dificuldade deve ser analisada pela psicologia. No entanto, a autora afirma que vai se ater em responder a seguinte pergunta: "[…] é verdade que, quando uma pessoa adquire um novo conceito matemático, a concepção operacional é na maioria das vezes a primeira a se desenvolver?" (IBID, p. 16).

A autora acredita que a resposta a tal questão é afirmativa. Neste sentido, "… o esquema que foi desenvolvido historicamente pode ser usado na descrição dos processos de aprendizagem" (IBID).

> Primeiramente, a afirmação acima coloca que há um curso "natural" de eventos no processo, que dificilmente pode ser considerado como espontâneo.

> Assim, a aprendizagem matemática, especialmente em níveis mais avançados, não acontece sem que haja uma intervenção externa (do professor, de um livro) e pode ainda ser dependente de um tipo de estímulo (método de ensino) para acontecer (IBID, p.17).

Em um contexto psicológico, este tipo de afirmação "operacional antes do estrutural", que segundo Sfard (1991), pode ser entendido como sendo uma prescrição para ensinar. A autora afirma que sua argumentação é baseada nas pesquisas de Piaget, considerado o pioneiro neste campo. Em seu trabalho, denominado *Epistemologia Genética*, Piaget (1993) afirma que: "[…] a abstração [matemática] deriva-se não do objeto sobre qual se atua, mas da própria ação. Parece-me que esta é base da abstração lógica e matemática" (PIAGET, 1978, p.50).

Desse ponto de vista, podemos assegurar que, se em certo nível a concepção de um conceito é operacional, este mesmo conceito poderá ser concebido de maneira estrutural em um nível superior. Por exemplo, quando usamos problemas para introduzir um conceito, o estudante utiliza a concepção operacional e, assim que o resolve e generaliza, passa do operacional para o estrutural.

Nesta perspectiva, primeiro deve ser realizado um processo com objetos já conhecidos para chegar a um conceito autônomo, e finalmente desenvolver uma habilidade para ver se este "novo" conceito é um objeto adquirido.

A partir dessa discussão, a autora afirma que existem três fases distintas na formação do conceito, que denomina como sendo "degraus de estruturação" e é uma análise teórica existente entre o processo e o objeto.

A autora considera que a formação do conceito é hierárquica e denomina as fases como sendo **interiorização**, **condensação** e **reificação**. Apresentamos uma definição de cada uma dessas fases.

Interiorização é o estágio no qual o estudante consegue uma familiaridade com o novo conteúdo. Os processos que são executados, nesta fase, nos objetos matemáticos, são de um grau de dificuldade inferior de maneira que o novo conceito possa ser organizado.

> O termo "interiorização" é usado aqui praticamente no mesmo sentido dado por Piaget. Nós poderíamos afirmar que o processo foi interiorizado se "pode ser executado por meio de representações [mentais]", e para ser considerado analisado e comparado não precisa mais ser realmente efetuado (SFARD, 1991, p.18).

Na **condensação** o estudante começa a pensar sobre o processo como um todo, sem ficar preso a detalhes, ou seja, é o momento em que ele começa a fazer compactações das seqüências de operações. É neste ponto que nasce o conceito. Nesse momento, torna-se mais fácil elaborar generalizações, comparações e combinações com outros processos. Assim, o estudante tem maior facilidade em alternar entre os diferentes perfis (da operacionalização para a estruturação) sobre o conceito. A condensação se perpetua enquanto tiver conectada a um conceito.

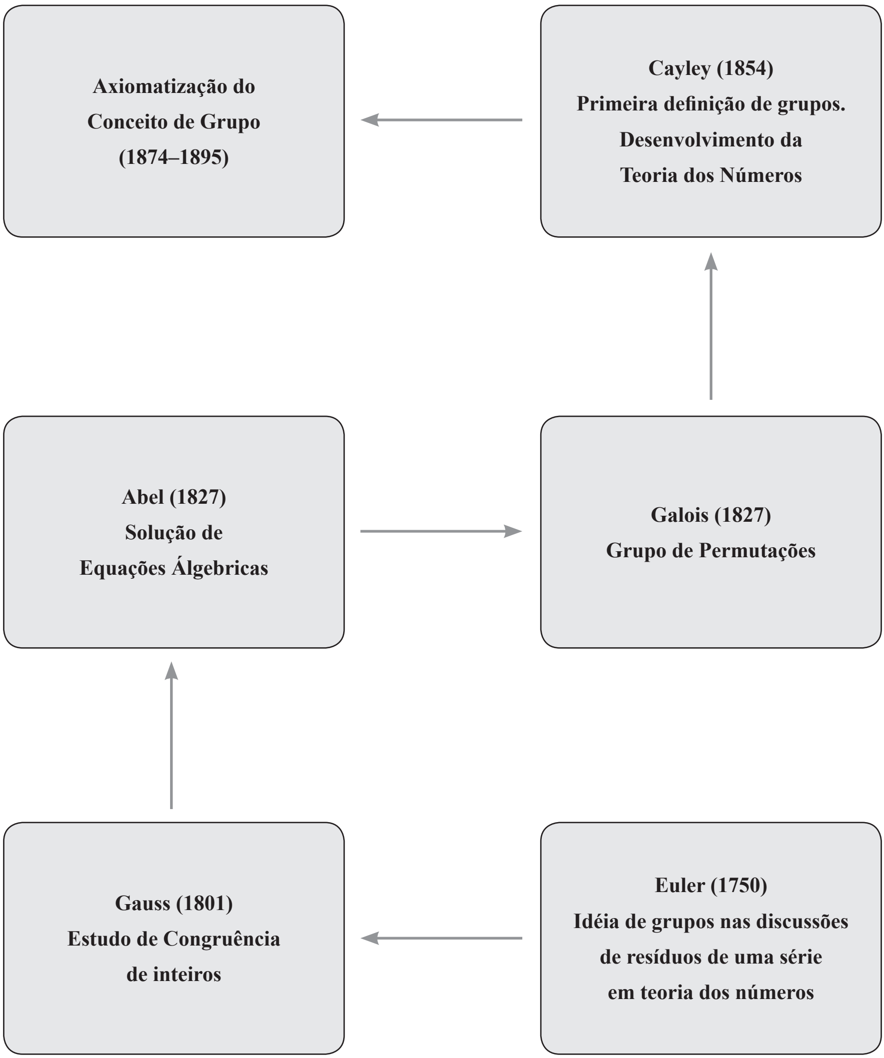
Sfard (1991) define **reificação** como sendo: “o momento em que se torna possível “ver” um conceito como um objeto”. Entendemos reificação como sendo a transformação de um conceito num objeto. Nessa perspectiva, a partir do momento em que o estudante deixa de ver um conjunto numérico por meio de uma operação usual e suas propriedades e passa a observá-lo como uma estrutura que pode ser aplicada em outros entes, ele passa por um processo de reificação.

> Assim, enquanto interiorização e condensação são mudanças graduais mais quantitativas do que qualitativas, a reificação é um salto quântico instantâneo: um processo que se solidifica num objeto, numa estrutura estática. Várias representações do conceito se tornam semanticamente unificadas por esta construção abstrata, puramente imaginária. O novo conceito é logo separado do processo que o produziu e começa a formular seu significado: de ser membro de uma determinada categoria. Em algum momento, esta categoria mais que qualquer tipo de construção concreta se torna a mais nova base para sustentar a existência de um novo objeto (IBID, p.19–20).

Nessa hierarquia, o desenvolvimento histórico conceitual é cíclico, pois “o estágio de reificação é o ponto onde começa uma interiorização de conceitos de alto nível” (IBID, p.20).

Conceito de GRUPO

As primeiras concepções sobre o conceito de **Grupo**, segundo Milies (1992), se encontram nos trabalhos de **Euler**, como também no de vários outros matemáticos, como **Karl. F. Gauss** (1777–1855), **Joseph L. Lagrange** (1736–1813) e **Niels H. Abel** (1802–1829). A estruturação lógica do conceito de **Grupo** se deu por volta do século XIX, considerado o “século do rigor”. O quadro a seguir mostra a manifestação histórica do conceito de grupo:



Quadro 1 – Desenvolvimento histórico do conceito de Grupo

No desenvolvimento do conceito de **Grupos** pudemos observar as várias fases apresentadas por Sfard (1991):

- A **Interiorização** refere-se à manipulação de objetos familiares, como os conjuntos numéricos, a resolução de equações lineares, propriedades associativa, elemento neutro e simétrico, mas não obrigatoriamente em uma ordem estabelecida.
- A **Condensação** refere-se à mobilização e compactação de técnicas na busca de resolver problemas envolvendo o conceito de **Grupo** e suas propriedades, como no caso associatividade, elemento neutro e simétrico, mas agora respeitando a ordem de como o conceito é apresentado.
- A **Reificação** refere-se a um tratamento estático do objeto, ou seja, não há necessidade de um objeto mental, o estudante começa a enxergar o conjunto com determinada operação como uma estrutura de **Grupo**.

Ao nos referir à concepção operacional no conceito de **Grupo**, estamos falando das técnicas utilizadas para verificar se determinado conjunto munido de uma operação é **Grupo**, não importando necessariamente a ordem.

Mas, ao mencionarmos concepção estrutural, a ordem já se faz necessária, e a noção será utilizada como um objeto matemático na resolução de equações algébricas.

Experimento

Para realização desta pesquisa, optamos por verificar, inicialmente, como os livros de álgebra utilizados pelos estudantes escolhidos abordavam o conteúdo **Grupos**. Também foram analisadas como as concepções operacionais e estruturais, segundo Sfard (1991), apareciam nesses livros e no desenvolvimento histórico.

Em seguida, elaboramos um instrumento contendo questões que contemplavam de diferentes maneiras o conceito de **Grupo**, que foi aplicado junto a esses estudantes, num total de sete participantes, indicados por $A_1, \ldots, A_7$.

Com essas questões procuramos investigar qual concepção de **Grupo**, operacional ou estrutural, estava sendo trabalhada e verificar as fases de desenvolvimento do conceito de **Grupo**, segundo a fundamentação teórica.

As oito questões que compuseram esse instrumento foram organizadas da seguinte forma: as três primeiras questões eram relativas ao conceito de **Grupo**, sem necessariamente se referir a tal, ou citá-lo. A questão quatro era para escrever a definição de **Grupo**. A questão cinco (5) tinha o propósito de relacionar o que cada uma das questões anteriores tinha com o conceito de **Grupo**. A questão seis (6) era uma questão também relacionada ao conceito, mas ao contrário das três primeiras, no enunciado, referia-se a **Grupo**. A questão sete (7) era relacionada ao conceito de **Grupo** e a ordem dos itens da definição. Finalizando, a questão oito (8) era uma questão relacionada ao conceito de **Grupo**. Assim, as três primeiras questões eram operacionais, as duas seguintes, estruturais, e as três últimas estruturais de um nível mais avançado.

Com a elaboração desse instrumento, tínhamos uma expectativa de que ele fornecesse dados para levantar conhecimentos, sobre o conceito de **Grupo**, mobilizados por estudantes que já tinham visto o assunto. Posteriormente, fizemos uma análise observando conceitos e técnicas utilizados e concepções que foram mobilizadas, segundo Sfard (1991).

As questões foram formuladas ou adaptadas de livros de álgebra de modo que, preferencialmente, não fossem questões usualmente vistas pelos estudantes. O objetivo desta escolha era verificar se eles tinham a noção de **Grupo** e sabiam trabalhar com o abstrato.

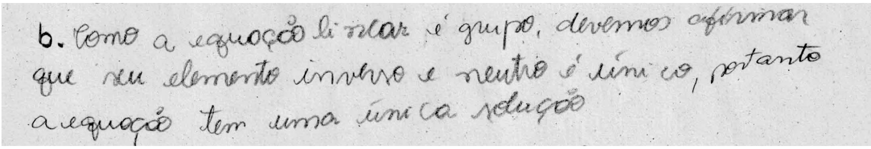
Analisamos as respostas dos estudantes, buscando identificar os conhecimentos mobilizados por estes quanto ao conteúdo **Grupo**. Optamos por realizar esta análise questão por questão, seguindo os indicadores, que construímos a partir do referencial teórico, de modo a auxiliar-nos nesta fase da investigação: processo envolvido: operacional ou estrutural; fases manifestadas no desenvolvimento: interiorização, condensação ou reificação; escolha da resolução, buscando a fase manifestada e procedimentos desenvolvidos. Apresentamos a análise da questão oito:

A resolução da questão exige que o estudante saiba verificar o conceito de **Grupo** em diversas situações. Esta questão tem uma concepção estrutural.

No item (a), os estudantes afirmaram que em um **Grupo** o elemento neutro é único e inferimos que a fase é a de reificação.

No item (b), dividimos em quatro grupos:

> **Grupo 1** – Afirmaram que num **Grupo** o elemento neutro e o inverso são únicos, logo a equação linear terá apenas uma solução. Observamos que alguns confundiram propriedades com operações. Segundo nosso referencial teórico, eles estão em uma fase de transição de interiorização para a condensação. Apesar de escreverem erroneamente, consideramos essa justificativa, pois entendemos que os estudantes devem ter pensado corretamente. Neste grupo temos os estudantes: A_1, A_2, A_6, A_7.

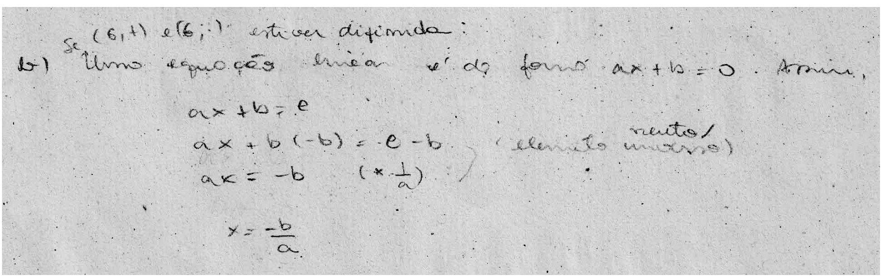


b. Como a equação linear é grupo, devemos afirmar que seu elemento inverso e neutro é único, portanto a equação tem uma única solução

Figura 01 – Registro escrito do estudante A_6

Grupo 2 – Marcaram que o item é verdadeiro, mas não justificaram. Neste caso acreditamos que estão em uma fase de interiorização do conceito. Nesta situação é imprescindível a justificativa, pois é por meio dela que podemos ver qual a fase manifestada, considerando que se trata de uma questão de verdadeiro ou falso. Neste grupo temos somente o estudante A_3.

Grupo 3 – Os estudantes deste grupo afirmaram que: Se (G, +) e (G, ·) estiverem definidos, a equação linear é da forma ax+b = 0 e assim tem-se uma solução. A necessidade de um objeto mental, no caso (G, +) e (G, ·), leva-nos a inferir que os estudantes estão em um processo de condensação. Neste grupo temos somente o estudante A_5.



Se (G,+) e (G,·) estiver definida:

b) Uma equação linear é da forma $ax+b=0$. Assim,

$ax+b=e$

$ax+b(-b)=e-b$ (elemento neutro/inverso)

$ax=-b$ $(\times\frac{1}{a})$

$x=\frac{-b}{a}$

Figura 02 – Registro escrito do estudante A_5

Grupo 4 – O estudante que faz parte deste grupo colocou que a afirmação é falsa e um contra exemplo. Neste grupo temos somente o estudante A_4.

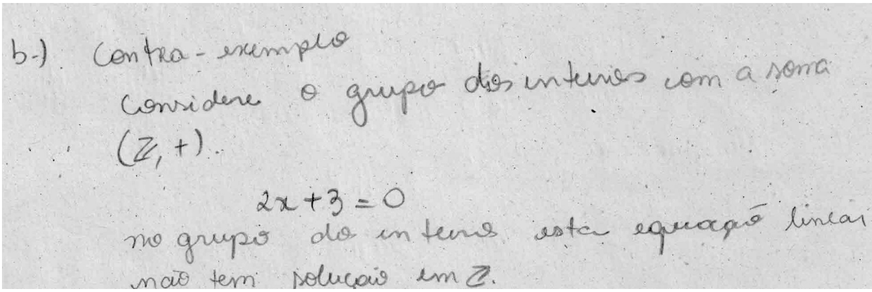


Figura 03 – Registro escrito do estudante A_4

No item (c), dividimos os registros em alguns grupos:

Grupo 1 – Assinalaram que o item é verdadeiro, contudo não justificaram. Acreditamos que estão em uma transição de interiorização para condensação, pois a falta da justificativa nos leva a crer que eles necessitam construir este objeto mental. Neste grupo temos somente o estudante A_3.

Grupo 2 – Assinalaram que o item é verdadeiro, exibindo a solução. Segundo o referencial teórico estão em um estágio de reificação, pois conseguem discernir o conceito em outras situações. Neste grupo temos somente o estudante A_5.

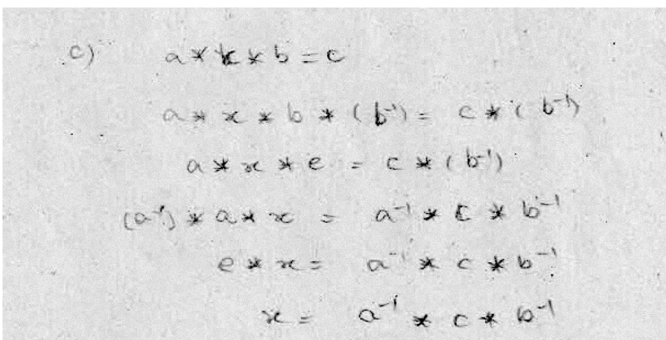


Figura 04 – Registro escrito do estudante A_5

Grupo 3 – Assinalaram que o item é verdadeiro, justificando que se deve ao fato de ser **Grupo**. Podemos inferir, segundo o referencial teórico, que estão em um estágio de reificação. O estudante A_1 ainda afirma que a operação tem uma única solução. Neste grupo temos os estudantes A_1 e A_7.

Grupo 4 – Assinalaram que o item é verdadeiro, justificando que $a*x*b=c$ pertence a um **Grupo**. De acordo com a justificativa, podemos inferir que ainda estão em um estágio de interiorização do conceito, pois mesmo acertando a resolução da questão 6, operacional, ainda não conseguem interiorizar em um contexto estrutural e não conseguem ver a definição em outros objetos. Neste grupo temos o estudante A_6.

Grupo 5 – Assinalaram que o item é falso, justificando que depende da operação. O estudante A_4 ainda afirmou que com a soma existe uma única solução e com a multiplicação não existe solução. Neste caso, podemos inferir que estão em uma fase de condensação do conceito, pois o fato de explicitarem as operações nos mostra que necessitam de um objeto mental. Neste grupo temos os estudantes A_2 e A_4.

No item (d), todos respondem falso à afirmação do item, apenas diferenciando a justificativa:

Grupo 1 – Afirmaram que o vazio não pode ser **Grupo**, pois não tem como demonstrar as propriedades de **Grupo**s. Alguns ainda colocam que não existe elemento no conjunto vazio e, portanto, não podemos provar as propriedades. Neste grupo temos os estudantes A_3, A_4, A_5 e A_6. Acreditamos que este grupo está em fase de reificação, pois conseguem enxergar a definição em outros conceitos.

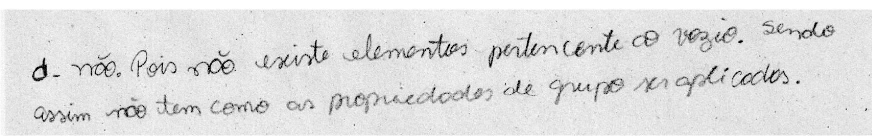

d- não. Pois não existe elementos pertencente ao vazio. Sendo assim não tem como as propriedades de grupo ser aplicados.

Figura 05 – Registro escrito do estudante A_6

Grupo 2 – Afirmaram que para ser **Grupo** deve ser diferente do vazio ou não ter elementos. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2 e A_7. Mesmo tendo uma resposta diferenciada do grupo anterior também podemos inferir que estão em um processo de reificação do conceito.

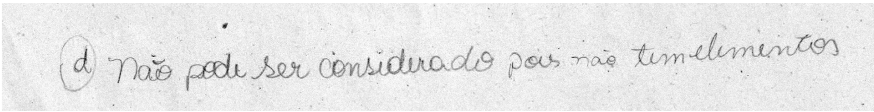

d Não pode ser considerado pois não tem elementos

Figura 06 – Registro escrito do estudante A_2

Feita as análises, construímos um quadro mostrando a relação entre os estudantes e as fases, que ficaram evidentes durante estas análises, tanto nas questões com concepção operacional quanto nas com concepção estrutural. Os números do Quadro 2 referem-se aos itens das questões, por exemplo, a questão oito possui três itens.

	Questões com concepção Operacional				Questões com concepção Estrutural			
	Interiorização	**Condensação**	**Reificação**	**Nenhuma**	**Interiorização**	**Condensação**	**Reificação**	**Nenhuma**
A1	5	5	2			2	7	
A2	5	2	3	2		3	6	
A3	1	4	4	3	2	1	6	
A4	5	1	4	2		3	4	2
A5	3	6	3			2	7	
A6	4	6	2		1	1	7	
A7	6	4	2			3	6	

Quadro 2 – Concepções apresentadas pelos estudantes em cada item das questões

Pelo quadro, podemos inferir que, em relação às questões com concepção operacional, as fases mais observadas foram interiorização e condensação. Já nas questões com concepção estrutural, a condensação e a reificação ficam evidenciadas. Em nossa análise verificamos que nessas questões o objeto mental se apresentava de maneira organizada e o estudante conseguia enxergar o conceito como uma estrutura estática.

Considerações Finais

Após as análises dos dados produzidos pela aplicação do conjunto de questões, obtivemos, nos registros escritos desses estudantes, os seguintes conhecimentos mobilizados: noção de conjuntos, operações de conjuntos, definição, propriedade e exemplos de

Grupo, conjuntos numéricos, operações em conjuntos numéricos, propriedades das operações nos conjuntos numéricos, matrizes, funções, aplicações, transformações lineares no plano, uso de linguagem algébrica, simbologia algébrica, conjunto vazio.

Assim, podemos inferir que ao responderem questões que tinham um caráter operacional, a maioria dos estudantes não teve dificuldade. Mas ao responderem questões estruturais, notamos que ainda não o concebem de tal maneira. Neste caso, acreditamos que os estudantes estão em um estágio bastante avançado do ponto de vista operacional, mas não do estrutural. Destacamos ainda que as questões de concepção estrutural foram questões que necessitavam apenas da definição de **Grupo**.

Portanto, podemos concluir que os conhecimentos mobilizados pelos estudantes foram, em sua grande maioria, de caráter operacional e a concepção estrutural apareceu timidamente em algumas questões. As fases ocorreram em todos os registros escritos, havendo destaque para a interiorização e a condensação.

Referências

MILIES, F. C. P. Uma breve introdução à história da teoria de grupo. In: XII ESCOLA DE ÁLGEBRA, Diamantina. **Anais da XII Escola de Álgebra.** Diamantina: Sociedade Brasileira de Matemática, 1992.

PIAGET, J. **A epistemologia genética; sabedoria e ilusões da filosofia; problemas de psicologia genética.** São Paulo: Abril Cultural, 1978.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides for the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 22, p.1–36, 1991.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. United Kingdom: Kluwer Academic Publisher, 2002.

Submetido em agosto de 2010.
Aprovado em abril de 2011.

Anexo 1

1) Considere a equação linear $2x + 3 = 0$
   a. Que operações e propriedades de Q utilizam-se para resolvê-la?
   b. Conseguiria resolvê-la em Z?

2) Dos itens abaixo, assinale os que você considera que satisfazem as propriedades associativas, elemento neutro e simétrico. Justifique sua resposta.
   a. (N, +)
   b. (Z, +)
   c. (Q*, .)
   d. (Z*, .)
   e. $(M_2(R), +)$
   f. $(M_2(R), .)$
   g. $(GL_n(R), .)$
   h. (Z*m, .)
   i. (Zm, +)

3) Considere um triângulo eqüilátero e construa, no sistema cartesiano, as simetrias desse triângulo no plano (rotações de ângulos 0°, 120° $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e 240° $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ e reflexão em relação ao eixo x). O que você pode observar?

4) Defina Grupo:

5) Existe relação entre as questões 1, 2, 3 e a questão 4? Justifique sua resposta.

6) Considere R o conjunto dos reais com a operação * dada por $x*y = x + y - 7$.
   a. Mostre que:
      i. * é associativa
      ii. Existe e pertencente a R tal que, $e*x = x = x*e$, para qualquer x pertencente a R

iii. Para qualquer x pertencente a R, existe x' pertencente a R tal que x*x' = e = x'*x.

b. (R, *) é um grupo? Justifique sua resposta.

7) Considere os axiomas da associatividade (A_1), elemento neutro (A_2) e elemento simétrico (A_3) da definição de um grupo, que são apresentados na ordem A_1 A_2 A_3. Considere outras ordens como: A_1 A_3 A_2 , A_2 A_1 A_3 , A_2 A_3 A_1, A_3 A_1 A_2, A_3 A_2 A_1. Das seis possíveis ordens, somente três são aceitáveis para a definição. Quais são elas e por quê?

8) Marque Verdadeiro ou Falso.

a. ( ) Um grupo pode ter mais do que uma elemento neutro;
b. ( ) Num grupo, cada equação linear tem uma solução;
c. ( ) Uma equação da forma a*x*b = c sempre tem uma única solução no grupo;
d. ( ) O conjunto vazio pode ser considerado um grupo.