

---

## Alguns aspectos históricos da álgebra e suas relações com o ensino na Educação Básica

---

**Maria Laura Magalhães Gomes**

Departamento de Matemática e Programa de Pós-Graduação em Educação, UFMG  
mlauramgomes@gmail.com

### Resumo

Considerando a relevância do ensino da álgebra na educação básica e as possibilidades de contribuição do conhecimento histórico para a formação dos professores, o artigo focaliza dois conjuntos de estágios propostos por historiadores da matemática para o desenvolvimento da álgebra. O primeiro conjunto refere-se à expressão das ideias algébricas nas fases retórica, sincopada e simbólica. O segundo conjunto diz respeito à ocorrência de quatro fases conceituais para a álgebra: a geométrica, na qual a maior parte dos conceitos são geométricos; a estática de resolução de equações, na qual o objetivo é encontrar números que satisfaçam a certas relações; a fase dinâmica da função, em que o movimento parece ser uma ideia subjacente; a fase abstrata, em que a estrutura é o objetivo. Argumenta-se em favor da consideração de ambos os conjuntos de estágios para uma reflexão acerca do ensino da álgebra na escola básica.

**Palavras-chave:** Relações entre História e Ensino da Álgebra. Estágios da Linguagem Algébrica. Estágios Conceituais da Álgebra.

---

## Some historical aspects of algebra and its relations with school teaching

---

### Abstract

Considering the importance of teaching algebra in elementary education and the possible contribution of historical knowledge for teachers, the article focuses on two sets of stages in the development of algebra proposed by historians of mathematics. The first set refers to the expression of algebraic ideas in the rhetoric, syncopated and symbolic stages. The second set is related to the occurrence of four conceptual phases to algebra; the geometric stage, the static equation-solving stage, the dynamic function stage and the abstract stage. Considering both sets of stages may contribute for a reflection on the teaching of algebra in school.

**Keywords:** Relations between History of Algebra and its Teaching. Stages of Algebraic Language. Conceptual Stages of Algebra.

*Aquele que quiser se circunscrever ao presente, ao atual, não compreenderá o atual.*  
(Jules Michelet)

*Os matemáticos são como os franceses: quando lhes falamos, traduzem nossas palavras para seu idioma e em seguida elas se convertem em outra coisa totalmente diferente.*  
(Johann Wolfgang Von Goethe)

## **Introdução: história e álgebra**

As relações entre história e ensino, no que se refere à matemática, são, há muito tempo, objeto de discussões e estudos por parte dos professores e pesquisadores. No Brasil, um rápido exame revelará, além das recomendações curriculares quanto à participação da história no processo de ensino-aprendizagem (BRASIL, 1997, 1998, 2006), uma inserção muito frequente de alusões históricas nas páginas dos livros didáticos atuais para os ensinos fundamental e médio. A presença da história nos livros projetados para o ensino em nosso país não é uma novidade: constata-se que referências ao passado da matemática aparecem em livros didáticos aqui publicados originalmente desde o século XIX, como os textos de aritmética e álgebra de Aarão Reis (REIS, 1892; REIS, 1914).

No Brasil, uma referência a ser ressaltada em relação ao tema das relações entre história, educação e matemática é o livro de Miguel e Miorim (2004), denominado *História na educação matemática: propostas e desafios*, no qual são discutidas com profundidade questões relativas à participação da história no ensino em diversos níveis. Em particular, o primeiro capítulo dessa obra apresenta um extenso panorama das manifestações referentes à participação da história no ensino da matemática no Brasil ao longo do século XX. No contexto internacional, a exemplo de estudos temáticos que vem desenvolvendo desde os anos 1980, a ICMI-International Commission on Mathematics Instruction promoveu um encontro de pesquisadores de todos os continentes em Luminy, na França, em 1998, para debater o tema da presença da história na educação matemática. Do encontro resultou um livro, publicado em 2000, cujo título é *History in Mathematics Education*, que se tornou referência essencial aos interessados nas possibilidades e limites da participação da história nos mais variados contextos de ensino da matemática.

O propósito deste artigo, porém, não é enumerar e discutir argumentos gerais acerca das potencialidades da história no ensino da matemática. Ele visa, sobretudo, apresentar algumas considerações de caráter histórico num campo específico da matemática, a álgebra, que também foi o tema de um estudo recente (o 12º) da ICMI. Esse estudo foi conduzido no período 2000–2004 e teve sua conferência principal (Study Conference) realizada em dezembro de 2001, na Universidade de Melbourne, na Austrália. Seu título foi *The future of the teaching and learning of algebra*, e esse é também o nome do livro (STACEY; CHICK, KENDAL, 2004) no qual foram sintetizadas as discussões dos vários grupos de trabalho participantes do evento na Austrália. A preocupação da ICMI em relação ao futuro do ensino e aprendizagem da álgebra é explicada no prefácio da obra a partir de duas tendências evidentes mais recentemente: a “massificação” da educação, que é um processo em continuidade em alguns países e início em outros, e os avanços da tecnologia.

Segundo as organizadoras do livro (STACEY; CHICK, KENDAL, 2004), a álgebra é afetada centralmente por ambas as tendências. De fato, afirmam as autoras:

Para a educação em massa, o ensino da álgebra ilumina questões de equidade e relevância. Para o progresso em direção à matemática superior, os estudantes precisam da álgebra, mas sua abstração a torna difícil de aprender e difícil também que os iniciantes vejam uma razão para aprendê-la. Simultaneamente, o avanço da tecnologia fornece perspectivas ricas de aperfeiçoamento do ensino. No entanto, ele também oferece um desafio ao currículo existente, porque tantas rotinas que têm sido o cardápio usual (e nas quais os estudantes têm tido mais sucesso) estão agora disponíveis “apertando um botão”. O resultado é que um currículo de álgebra que sirva bem aos alunos no século XXI pode muito bem parecer muito diferente de um currículo ideal de alguns anos atrás (p. vii-viii).

A relevância da álgebra na educação e a questão referente aos modos como a história poderia ter alguma participação nessa educação, particularmente na educação básica brasileira, motivam o presente trabalho, que trata de dois conjuntos de fases para o desenvolvimento da álgebra propostos por historiadores da matemática. O objetivo do texto não é fornecer uma ferramenta de trabalho direto para a sala de aula de álgebra da escola básica, mas propiciar uma reflexão sobre o ensino do tema que tome como referência esse enfoque histórico.

Antes de focalizar os dois conjuntos de estágios, façamos algumas considerações acerca do que a palavra “álgebra” evoca ou significa.

### **O que é álgebra? A que remete a palavra álgebra no contexto do ensino na escola básica?**

Como bem observa Katz (2007), atualmente é raro encontrarmos uma definição de álgebra nos livros destinados ao ensino. O historiador lembra que isso não acontecia no século XVIII, e enuncia, em seu artigo, as definições de Colin Maclaurin (1698–1746) e Leonhard Euler (1707–1783). Segundo Katz (2007, p. 185), numa obra publicada em 1748, Maclaurin escreveu: “Álgebra é um método geral de calcular com certos sinais e símbolos que foram inventados e considerados convenientes para esse propósito. Ela é chamada uma Aritmética Universal, e continua por Operações e Regras similares às da Aritmética Comum, fundada nos mesmos Princípios.” Euler, por sua vez, no livro de álgebra que publicou em 1770, conceituou da seguinte maneira a álgebra: “A Álgebra foi definida como *a ciência que ensina como determinar*

*quantidades desconhecidas por meio daquelas que são conhecidas*” (EULER, apud KATZ, 2007, p. 185). Ainda no século XVIII, o verbete Álgebra, no primeiro volume da *Enciclopédia ou Dicionário Raciocinado das Ciências, das Artes e dos Ofícios*, de 1751, escrito por Jean Le Rond d’Alembert (1717–1783), começava assim:

“Álgebra é o método de fazer em geral o cálculo de todos os tipos de quantidades, representando-as por signos universais. Escolheram-se para esses signos as letras do alfabeto por serem de uso mais fácil e mais cômodo que qualquer outro tipo de signo.” (DIDEROT; D’ALEMBERT, 1751, p. 259).

Mais adiante, d’Alembert acrescenta que a Álgebra tem duas partes: a primeira é o método de calcular as grandezas representando-as pelas letras do alfabeto, e a segunda é a maneira de se utilizar esse cálculo para resolver problemas. D’Alembert considera a segunda parte a principal e mais extensa, e afirma que é a ela que se deve a visão de álgebra de seu verbete, que focaliza o desenvolvimento histórico do campo e enfatiza o estudo da resolução de equações no decorrer do tempo até o momento em que escreve.

O que percebemos, nessas conceituações do século XVIII, é a visão clara da álgebra como simultaneamente um cálculo generalizado mediante regras para manipular sinais e signos e um método para resolver problemas. Entretanto, como nota Katz, se os livros didáticos de hoje não costumam definir a álgebra, um livro de álgebra contém uma grande variedade de tópicos<sup>1</sup>, o que nos conduz a pensar que a álgebra ensinada nos níveis de ensino que antecedem os cursos universitários envolve mais do que cálculos generalizados, linguagem simbólica e resolução de equações. De fato, escreve Victor Katz, entre os conteúdos dos livros de álgebra estão a aritmética dos números com sinais, a solução de equações do primeiro e segundo graus, sistemas de equações lineares e/ ou do segundo grau, a manipulação de polinômios, inclusive a fatoração e as regras para os expoentes, matrizes, funções, gráficos, estudo analítico das cônicas. Um livro de álgebra abstrata, prossegue Katz, apresenta ainda conteúdos como grupos, anéis e corpos.

No Brasil, conquanto não tenhamos livros projetados exclusivamente para o ensino da álgebra na escola básica, reconhecemos que os tópicos citados por Katz são precisamente aqueles alocados pelos autores de livros didáticos no último segmento do ensino fundamental e no ensino médio nos capítulos, unidades ou seções dedicados à álgebra. Assim, entre nós se verifica o mesmo que é apontado por Katz — a associação da álgebra escolar a uma grande variedade de tópicos; podemos acrescentar ainda a essa observação a de que nossos livros, em geral, também raramente apresentam uma

<sup>1</sup> Victor Katz se refere a livros específicos para o ensino da álgebra porque fala sobre o ensino no contexto norte-americano.

conceituação do campo da álgebra<sup>2</sup>. Em disciplinas que ministrei a licenciandos e professores da escola básica, pedi-lhes uma resposta à pergunta: o que a palavra álgebra significa para você? Nas muitas respostas que colecionei, constatei tanto a presença dos mesmos elementos que aparecem nas definições de Euler, Maclaurin e d'Alembert aqui reproduzidas, quanto a vinculação do significado da álgebra aos conteúdos escolares usualmente associados a ela. Vejamos algumas dessas respostas.

**Resposta 1:** Acredito que a álgebra seja a parte da matemática que trata dos símbolos, seus significados, operações e propriedades. A álgebra é uma forma de generalização da aritmética, uma forma de fazer operações, tratar de números que não estão disponíveis para os cálculos. A álgebra é a **linguagem que a matemática usa no seu discurso**.

**Resposta 2:** A palavra álgebra, na minha concepção, está relacionada a raciocínio e cálculo. É a parte da matemática que une generalizações e resolução de problemas. Enquanto professor, vejo a dificuldade dos alunos em traduzir o problema ainda textual em conceitos matemáticos, ou seja, transferir as informações para **linguagem matemática** através do uso de variáveis (letras).

**Resposta 3:** Considerando minhas experiências como professor e, principalmente, como aluno, posso concluir que o conceito de “álgebra” que possuo gira em torno da capacidade que um indivíduo possui em esquematizar uma dada situação ou problema **na linguagem própria que a matemática possui**. Existem várias maneiras de fazer esse tipo de esquema, e a álgebra teria como um dos objetivos estudar estas maneiras, como a utilização de símbolos e operações.

As três respostas transcritas, ainda que destaquem também outros aspectos relacionados à álgebra, como generalização, cálculos, propriedades e a característica instrumental de ferramenta para a resolução de problemas, têm em comum a ênfase na ligação entre álgebra e linguagem, ou seja, realçam a dimensão da álgebra como linguagem da matemática<sup>3</sup>. Entretanto, outras respostas já não sublinham tanto esse aspecto da linguagem, conferindo maior relevo ao papel instrumental da álgebra na resolução de problemas — é o caso das seguintes:

2 Imenes e Lellis (1997) apresentam, no *Dicionário Ilustrado* que integra seu livro didático para a 7ª série, a seguinte definição para a álgebra: “Parte da Matemática que estuda equações e cálculos com variáveis e incógnitas, que são representadas por letras”. (IMENES; LELLIS, 1997, p. 286).

3 Em todas as respostas transcritas dos trabalhos dos alunos, os negritos são nossos.

**Resposta 4:** Álgebra é um dos diversos ramos do estudo matemático e este consiste em trabalhar com letras que representam, muitas vezes, incógnitas. Na álgebra é que se aprende a **calcular o que inicialmente costuma parecer impossível**.

**Resposta 5:** Estudo e **resolução de problemas** através de uma **linguagem matemática** que utiliza letras para representar diversas variáveis.

**Resposta 6:** Significa um ramo da matemática que trata de valores desconhecidos e envolve a aritmética para encontrar esses valores. É uma **ferramenta poderosa na resolução de problemas**, mas requer, em algumas situações, alto nível de abstração.

Observemos que a resposta 5 vincula o papel instrumental ao aspecto linguístico da álgebra: é possível resolver problemas desde que se use a álgebra como linguagem matemática. Contudo, há respostas que, sem tocar no aspecto linguístico ou no aspecto instrumental, conceituam a álgebra a partir de referências curriculares relativas a sua abordagem na escola, ou seja, identificam a álgebra ao estudo dos conteúdos escolares a ela comumente associados.

**Resposta 7:** Álgebra é a parte da matemática que estuda as **equações, inequações, sistemas e problemas, e as funções**.

**Resposta 8:** Álgebra seria o estudo de **propriedades dos números e assuntos como determinantes, matrizes**, que se desenvolvem com várias leis. Além de números, podemos ter **incógnitas, funções etc**.

Essas duas últimas respostas diferem das anteriores. Em vez de focalizar a natureza da álgebra, destacando-a como linguagem ou jogo de símbolos, sinais ou signos, como as definições de Maclaurin e d'Alembert e as respostas 1, 2 e 3, ou acentuar sua finalidade — resolver problemas, encontrar coisas desconhecidas, como as respostas 4, 5 e 6 e a definição de Euler, elas se centram nos tópicos algébricos dos currículos usuais. Notemos, particularmente, que ambas essas respostas mencionam as funções como algo associado à álgebra, e a segunda delas cita, além das funções, dois outros conteúdos — as matrizes e os determinantes.

Levando em consideração, sobretudo, a dimensão da álgebra como linguagem e a identificação da álgebra com o estudo dos conteúdos tradicionalmente vinculados à álgebra escolar, que se têm mostrado recorrentes nas respostas aqui citadas e

em outras, é oportuno focalizar os dois conjuntos de estágios do desenvolvimento da álgebra propostos pelos historiadores, para, conforme proposto anteriormente, subsidiar uma breve reflexão acerca do ensino do tema na educação básica. Os dois conjuntos de estágios, como veremos, dizem respeito às transformações ocorridas na linguagem algébrica no transcorrer do tempo e às modificações conceituais que marcaram o percurso dos conhecimentos que hoje associamos à álgebra. O primeiro conjunto de estágios, mais conhecido e bastante divulgado em publicações referentes à história da matemática, concerne ao desenvolvimento da linguagem algébrica nas fases retórica, sincopada e simbólica. O segundo conjunto, proposto pelo historiador Victor Katz (2007), diz respeito à ocorrência de quatro fases conceituais para a álgebra: a geométrica, a estática de resolução de equações, a fase dinâmica da função e a fase abstrata, em que a estrutura é o objetivo. A seguir abordamos os dois conjuntos.

### **Estágios na expressão das ideias algébricas**

De acordo com Puig (1998) e Puig<sup>4</sup> e Rojano (2004), a distinção de três períodos na evolução da linguagem da álgebra foi estabelecida pelo alemão G. H. F. Nesselmann, em 1842, na primeira parte de seu livro *Ensaio sobre uma história crítica da álgebra*, intitulada *A álgebra dos gregos*. Segundo Nesselmann, a distinção das três fases vem da consideração de como a representação formal das equações e operações é realizada. Assim, é descrita como retórica a álgebra na qual os cálculos são expressos completa e detalhadamente por meio da linguagem comum, sem qualquer uso de símbolos e abreviações (PUIG; ROJANO, 2004). Embora na época em que Nesselmann escreveu o seu livro os tabletas da Mesopotâmia não tivessem sido completamente analisados, o uso exclusivo da linguagem comum na proposição e

4 Luis Puig (2008) vem se dedicando à pesquisa sobre as relações entre a história das ideias algébricas e a pesquisa em educação algébrica, caracterizando seu trabalho como um movimento de mão dupla entre os textos históricos e os sistemas escolares, do seguinte modo: 1) da educação algébrica à história das ideias algébricas, no sentido de que o ensino e a aprendizagem da álgebra são o que determina os textos históricos a serem procurados e as questões a serem dirigidas a tais textos; 2) da história das ideias algébricas à educação algébrica: o exame de textos históricos leva a: a) considerar novos itens que devem fazer parte do que se chama modelo de competência, isto é, uma descrição do comportamento competente considerado como o comportamento do sujeito ideal ou epistêmico; b) obter novas maneiras de compreender o desempenho dos alunos e, portanto, de desenvolver o que se denomina o modelo de cognição; c) desenvolver modelos de ensino; 3) de volta à história: a atenção é redirecionada aos textos históricos para questioná-los novamente, agora usando os resultados obtidos com os alunos, isto é, os resultados provenientes do desempenho dos estudantes quando tudo que tiver sido extraído da análise de ideias algébricas for incorporado ao modelo de ensino e à análise dos processos de ensino e aprendizagem. 4) e assim por diante, repetidamente. O leitor interessado poderá consultar esse artigo de 2008 e mais outros artigos recentes de Puig na revista *Suma*, intitulados *Histórias de Al-Khârizmî* publicados no período de 2008 a 2011 no site <http://www.uv.es/puigl/textos.htm> (Acesso em 17 jun 2011).

resolução de problemas considerados algébricos foi constatado desde a época dos antigos babilônios (2000 a 1600 a. C) até o século III, quando o trabalho de Diofanto de Alexandria registra a presença de uma linguagem que não é unicamente a natural. No entanto, no estágio retórico, estaria, por exemplo, ainda, a álgebra de Al-Khwârizmî (século IX), em que tanto os problemas como suas soluções são apresentados inteiramente por meio de palavras.

A segunda fase proposta por Nesselmann é a fase sincopada, em que a exposição ainda é de natureza retórica, mas faz uso de abreviações consistentes para certos conceitos e operações que ocorrem frequentemente. Diofanto de Alexandria teria sido o primeiro a introduzir um símbolo para a incógnita, uma variante da letra sigma. A escolha dessa variante se deve, provavelmente, segundo Polcino Milies (2004), ao fato de, no sistema grego de numeração, em que as letras representavam também números, de acordo com sua posição no alfabeto, a variante da letra sigma não fazer parte do sistema, e, assim, não corresponder a nenhum valor numérico particular. Além de Diofanto, ainda conforme a abordagem de Nesselmann, os europeus até a metade do século XVII se inserem no estágio sincopado. François Viète (1540–1603), reconhecido por sua contribuição ao simbolismo pelo uso de consoantes para representar coeficientes e vogais para simbolizar as incógnitas em sua obra *In artem analyticam isagoge* (Introdução à arte analítica), publicada em 1591, usava linguagem sincopada. Por exemplo, para ilustrar o estilo sincopado de Viète, a forma  $A \text{ quad} - B \text{ in } A^2, \text{aequatur } Z \text{ plano}$ , significava o que representaríamos como  $x^2 - 2bx = c$  (PUIG; ROJANO, 2004, p. 207).

A terceira etapa de desenvolvimento da linguagem algébrica, a fase simbólica, caracteriza-se pela expressão das ideias mediante o uso de símbolos, dispensando-se completamente o recurso às palavras da linguagem comum. Viète, que ainda escrevia num estilo sincopado, com sua utilização das vogais para representar as incógnitas e consoantes para designar os coeficientes, é geralmente indicado pelos historiadores como aquele que iniciou a transição da segunda para a terceira e última etapa do simbolismo algébrico. Já Descartes (1596–1650) é visto como aquele que consolidou o uso da linguagem simbólica em *A Geometria*, um dos apêndices do *Discurso do Método*, publicado originalmente em 1637. Nessa obra, escrita em francês, Descartes emprega as primeiras letras do alfabeto para simbolizar as quantidades fixas e as últimas para nomear as incógnitas; ele também usou as notações  $x, xx, x^3, x^4, \dots$  para as potências (BELL, 1996).

Segundo Puig e Rojano (2004), para Nesselmann, a fase simbólica se caracteriza pelo fato de todas as principais formas e operações serem representadas em um sistema de signos independente da expressão oral, sem a necessidade de qualquer representação retórica (PUIG; ROJANO, 2004). A partir dessa primeira caracterização



da álgebra simbólica por Nesselmann, para Puig e Rojano, o fundamental não é a existência de letras para representar quantidades ou de signos estranhos à linguagem comum para representar operações; o aspecto primordial é “o fato de que se pode operar com esse sistema de signos sem ter que se recorrer a sua tradução para a linguagem comum” (PUIG; ROJANO, 2004, p. 199). Esse aspecto vincula-se claramente à afirmação de Goethe com que iniciamos este texto, além de remeter ao que Gómez-Granell (1997) caracteriza como a existência de dois tipos de tendências no ensino da matemática — as que enfatizam as dimensões sintáticas e as que privilegiam as dimensões conceituais ou semânticas. Retomaremos esse assunto adiante.

Focalizemos, a seguir, o segundo conjunto de estágios de desenvolvimento da álgebra, tendo como referência o trabalho de Katz (2007).

### **Estágios conceituais no desenvolvimento da álgebra**

Os quatro estágios propostos por Victor Katz (2007) sintonizam-se, como veremos, com as respostas sobre o significado da palavra “álgebra” que remetem aos conteúdos escolares associados ao campo. Para o historiador, tanto nesse conjunto dos estágios conceituais quanto no das fases da expressão das ideias algébricas, as etapas não são disjuntas: um estágio não termina completamente antes de começar o outro, e sempre se encontram superposições. No caso das fases da linguagem algébrica, por exemplo, muito depois do aparecimento da forma sincopada na obra de Diofanto, no século III, Al-Khwârizmî, no século IX, usava o estilo retórico.

A primeira fase conceitual de Katz é a fase geométrica que caracterizou os primórdios da álgebra, na Mesopotâmia, por volta de 4000 anos atrás. A matemática babilônica contém ideias que podemos considerar algébricas com base na conceitualização de álgebra de Maclaurin e Euler no século XVIII. A parte dessa matemática que denominamos “álgebra babilônica” liga-se, segundo Katz, a uma geometria de “cortar e colar” que provavelmente surgiu das necessidades dos agrimensores em relação à divisão da terra. Estão relacionados a essa geometria muitos antigos tabletes de argila datados de 1700 a 2000 a. C. nos quais há listas de problemas que hoje chamamos “problemas do segundo grau” cujo objetivo é encontrar quantidades geométricas como as dimensões de um retângulo. Katz apresenta, como exemplo, um problema do tablete YBC 4663 que descreve a resolução do problema de achar essas dimensões com a informação de que sua soma é  $6 \frac{1}{2}$  e a área do retângulo é  $7 \frac{1}{2}$ . Essa resolução contém passos detalhados e não apresenta figuras. O escriba divide  $6 \frac{1}{2}$  por 2, obtendo  $3 \frac{1}{4}$ . Em seguida, eleva ao quadrado  $3 \frac{1}{4}$  para obter  $169/16$ . Desse valor (área), subtrai a área dada ( $7 \frac{1}{2}$ ) e encontra  $3 \frac{1}{16}$ . A raiz quadrada desse número é extraída:  $1 \frac{3}{4}$ . Finalmente, o escriba observa que o comprimento do retângulo é

$3 \frac{1}{4} + 1 \frac{3}{4} = 5$ , enquanto a largura é  $3 \frac{1}{4} - 1 \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ . Katz mostra que o tablete indica o uso de um procedimento geométrico pelo escriba: ele divide por 2 a soma das dimensões do retângulo e em seguida eleva o resultado ao quadrado, obtendo a área desse quadrado. Desse valor, ele subtrai a área do retângulo e encontra um número do qual extrai a raiz quadrada. Esse número ( $1 \frac{3}{4}$ ), somado e subtraído à metade da soma das dimensões, fornece as duas dimensões procuradas.

Katz explica o procedimento geométrico que leva à solução é o seguinte: a soma  $6 \frac{1}{2}$  das dimensões do retângulo é dividida por 2 e constrói-se um quadrado cujo lado,  $3 \frac{1}{4}$ , é essa metade. A área desse quadrado excede a do retângulo original (de área  $7 \frac{1}{2}$ ) de  $3 \frac{1}{16}$ . Somando a  $3 \frac{1}{4}$  a medida do lado do quadrado de área  $3 \frac{1}{16}$ , que é  $1 \frac{3}{4}$ , é obtida uma das dimensões do retângulo; subtraindo o mesmo valor de  $3 \frac{1}{4}$ , chega-se à outra dimensão.

Assim, os babilônios, ao resolverem equações por um procedimento geométrico, usando uma linguagem puramente retórica, praticam a etapa da álgebra denominada geométrica. Para Katz, os gregos, que, como se supõe, aprenderam dos egípcios e babilônios, e cujo conhecimento matemático significava, sobretudo, a geometria, também se inserem no estágio geométrico da álgebra, porque aquilo que pensamos como noções algébricas se apresentava no trabalho de Euclides e Apolônio no contexto geométrico. Particularmente, o livro II dos Elementos, que contém 14 proposições, vem sendo há muito chamado e é conhecido como “álgebra geométrica” por apresentar resultados que podem ser facilmente traduzidos para a linguagem algébrica que se desenvolveu muito depois. Por exemplo, a proposição 4, “Caso uma linha seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos” (EUCLIDES, 2009, p. 137), é traduzida pelo que designamos como o produto notável  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 ab$ .

Katz apresenta vários outros exemplos da álgebra geométrica de Euclides e lembra que, embora a explicação para a resolução de equações pelos babilônios seja geométrica, eles também desenvolveram algoritmos ou procedimentos sem essa característica. O historiador afirma que existiu um momento em que a história da álgebra se movimentou em direção a um segundo estágio, o de resolução de equações, em que os algoritmos vão substituindo os procedimentos geométricos. Assim, no século III, Diofanto, que, como vimos, é considerado o introdutor da linguagem algébrica sincopada, resolveu equações do segundo grau baseando-se somente em números, e, na Índia, a fórmula para a resolução dessas equações apareceu sem qualquer apoio geométrico já no século VI.

O estágio estático de resolução de equações se evidencia, de acordo com Katz (2007), com o livro de Al-Khwârizmî, escrito em Bagdá por volta do ano 825. Esse

livro tem o título traduzido como *Livro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala*<sup>5</sup> (PUIG, 1998) e sua primeira parte é um manual para resolver equações do primeiro e segundo graus. Katz explica que o autor apresenta de forma inteiramente verbal, sem usar símbolos, os algoritmos para resolver os seis tipos de equações que focaliza. A justificativa de cada algoritmo é geométrica, mas, de acordo com Katz, o procedimento de Al-Khwârizmî se diferencia do babilônio, porque as soluções dos problemas, que são frequentemente mais abstratos do que problemas que tratam de comprimentos e larguras, não fazem uso do apelo geométrico, baseando-se exclusivamente nos algoritmos expostos. Embora somente em linguagem retórica, Al-Khwârizmî diz como traduzir cada situação para uma equação, simplifica e resolve essa equação. Katz salienta que o enfoque de Al-Khwârizmî marca a mudança decisiva do estágio geométrico inicial para o estágio estático de resolução de equações. Essa abordagem, referente a equações de 1º e 2º graus, é a que foi transmitida para a Europa nos séculos XII e XIII, como, por exemplo, na obra de Leonardo de Pisa ou Fibonacci (c. 1170–1230).

Na Itália do século XVI, como se sabe, vários matemáticos conseguiram resolver equações do terceiro e quarto graus, sempre no contexto estático descrito por Katz, ainda que se perceba a transição da etapa retórica para a fase sincopada, e, depois para a fase simbólica moderna do primeiro conjunto de estágios de que falamos.

Katz relaciona fortemente a mudança para o terceiro estágio conceitual, a fase dinâmica da função, ao aparecimento e à consolidação da notação. Segundo ele, começa-se a investigar coisas diferentes de encontrar a solução para um problema expresso por uma equação; há muitas razões para isso e uma delas foi o interesse crescente na trajetória dos planetas. Galileu (1564–1642) e Kepler (1571–1630) precisavam não de um número, mas de uma curva inteira para sua pesquisa. Embora Apolônio, que viveu no século III a.C., lhes fornecesse seu estudo sobre as cônicas para representar o movimento, eles não dispunham de uma notação útil para isso, e Galileu, usando um argumento puramente geométrico, sem qualquer simbolismo algébrico, demonstrou que se o movimento de um projétil tem uma componente horizontal e uma componente vertical de aceleração para baixo, o projétil descreve uma linha semiparabólica. De acordo com Katz, Kepler, ao tratar o movimento dos planetas, também usa apenas geometria. Somente no século XVII é que a geometria analítica de Descartes e Fermat (1601–1665) propiciou a representação algébrica de

5 Atribui-se a origem da palavra “álgebra” a essa obra, pois considera-se que foi o livro de Al-Khwârizmî o responsável pela difusão desse ramo do conhecimento matemático na Europa. Segundo Boyer (1996), a palavra *al-jabr* significa algo como “restauração” e parece referir-se à transposição de termos de um para outro membro da equação, enquanto a palavra *muqabalah* tem o sentido de “redução” ou “equilíbrio”, isto é, diz respeito ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação. Boyer lembra que, no D. Quixote de Cervantes, a palavra “algebrista” designa um “restaurador” de ossos, o que atestaria a influência árabe na Espanha cerca de oitocentos anos depois da época de Al-Khwârizmî.

curvas que contribuiu para o estudo do movimento. Assim, a linguagem simbólica, terceira das etapas de desenvolvimento da expressão das ideias algébricas, relaciona-se diretamente aos rumos tomados conceitualmente pela álgebra.

No decorrer do século XVIII, a álgebra se desenvolveu cada vez mais no sentido de representar trajetórias de movimentos, e encontrar essas trajetórias se tornou um problema central, ao mesmo tempo em que se começou a pensar se as manipulações algébricas que estavam sendo feitas eram corretas. Ainda havia, no século XIX, preocupações quanto ao sentido dos números negativos e ao status dos números complexos. A busca de um sistema axiomático para os cálculos que eram feitos assinala a mudança para o quarto e último estágio conceitual da álgebra, o abstrato. Nesse estágio, de acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1992, p. 78), o trabalho centra-se “no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos, isto é, sobre estruturas matemáticas tais como grupos, anéis, corpos etc.” Foi nesse contexto que se desenvolveram os trabalhos de George Peacock (1791–1858), Augustus De Morgan (1815–1864), Évariste Galois (1811–1832), Niels Abel (1802–1829), Arthur Cayley (1821–1895), William Rowan Hamilton (1805–1865), que haviam sido precedidos por Lagrange (1736–1813) quando este introduziu a ideia das permutações no interior do estudo das soluções de equações algébricas de grau superior a quatro a partir das soluções de Cardano para as equações do 3º e 4º graus<sup>6</sup>.

Katz (2007, p. 197) sublinha que, por volta do início do século XX, a álgebra tinha se tornado “menos encontrar soluções para equações e mais procurar estruturas comuns em muitos e variados objetos matemáticos, sendo os objetos definidos por conjuntos de axiomas”, e termina nesse momento, no quarto estágio conceitual, sua caminhada pela história da álgebra.

### **Algumas reflexões para o ensino suscitadas pelos dois conjuntos de estágios da álgebra**

Como foi visto, o primeiro conjunto de estágios se refere às diferentes características da linguagem algébrica e o segundo trata de concepções diferentes para o conhecimento algébrico ao longo do tempo. Nota-se também que a apresentação dos quatro estágios conceituais da álgebra por Katz é realizada em relação direta com os três estágios de desenvolvimento da linguagem algébrica. Em relação ao segundo conjunto de estágios, fica evidente, na síntese que fizemos do artigo de

6 Aqui não vamos nos estender sobre o tema da álgebra abstrata. O leitor interessado, além dos livros tradicionais de história da matemática, poderá ler com proveito o trabalho de Polcino Milies (2004).

Katz (2007), que conhecimentos que foram sendo incorporados ao ensino escolar de diversas maneiras com o passar dos anos pertencem a etapas conceitualmente distintas na história da álgebra. Nosso propósito, nesta seção, é apresentar algumas entre as muitas considerações que podem ser feitas quando pensamos no ensino da álgebra na educação básica tomando como referência ambos os conjuntos de etapas históricas brevemente expostos neste texto. A ideia subjacente a essas considerações, que não é nova na educação e nem exclusiva para a matemática<sup>7</sup>, tem sido chamada de argumento ou princípio genético; esse princípio ou argumento pode ser enunciado em sua forma mais estrita da seguinte maneira: todo indivíduo, em sua construção particular do conhecimento, passaria pelos mesmos estágios pelos quais a espécie humana teria passado na construção desse conhecimento (MIGUEL; MIORIM, 2004). Não acreditamos no caráter determinista desse argumento, mas, como Miguel e Miorim (2004), não negamos o condicionamento recíproco entre passado e presente, ou seja, pensamos que, se na aprendizagem matemática, cada pessoa não precisa vivenciar todas as fases históricas de um conhecimento, é plausível que aspectos portadores de dificuldades no passado da matemática também se apresentem como problemáticos na educação. Essa ideia deve, segundo pensamos, estar presente sempre em nosso trabalho como professores. Especialmente no que se refere à preparação para a abstração, o conhecimento da história nos mostra que foi preciso “muito tempo e experiência com a abstração para se estar à vontade com as abstrações formais particulares que caracterizam a matemática moderna”, conforme Bill Barton escreve em Katz (2007, p. 199).

É possível percebermos que os conteúdos identificados com a álgebra nas respostas que transcrevemos, ainda que sem esgotar a lista de conhecimentos da álgebra escolar, pertencem a diferentes fases conceituais de acordo com a proposta de Katz. Também é possível observar que essa lista, mesmo que apresente certa estabilidade, muda de acordo com o período que focalizamos. Assim, se hoje, em nosso país, dificilmente encontraremos alguma referência a estruturas como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais nos currículos e livros para a educação básica, houve um momento em que esses tópicos eram incluídos no ensino pré-universitário. Foi o período em que foram hegemônicas as ideias veiculadas pelo movimento da matemática moderna. Entretanto, mesmo sem aparecerem explicitamente, essas estruturas subjazem aos conteúdos da escola básica. A orientação atual está de acordo com a consideração do próprio Katz (2007) sobre o desenvolvimento tardio na história da axiomática na álgebra: o historiador afirma que

7 Propostas que argumentam em favor da consideração de que a aprendizagem do indivíduo ocorre de modo similar à da humanidade, estão registradas há muito. De acordo com Schubring (2011), as origens dos enfoques genéticos podem ser colocadas na emergência da ciência moderna por volta do século XVI.

Antes que se ensine “álgebra abstrata”, isto é, grupos, anéis, corpos e assim por diante, via definições axiomáticas, é crucial que os alunos tenham exemplos suficientes à sua disposição para entender por que é útil generalizar. Eles precisam entender por que certos conjuntos de axiomas foram escolhidos. O único modo de ganhar essa compreensão é por meio de experiência suficiente com exemplos. Portanto, seria razoável que a axiomática, juntamente com a abstração cada vez maior, aparecesse mais tarde do que cedo no currículo (KATZ, 2007, p. 198).

Outras observações de Katz também parecem estar sendo contempladas, se não nas práticas, pelo menos nos livros didáticos brasileiros da atualidade: por exemplo, um breve exame nos mostra a associação da álgebra à geometria na abordagem de alguns tópicos como os produtos notáveis e a fatoração, o que remete à primeira etapa conceitual da álgebra. Do mesmo modo, a ideia de função, desenvolvida posteriormente na história em relação às equações, tem sido proposta no final do ensino fundamental e no ensino médio, após os estudantes terem desenvolvido experiências com a geometria e com as manipulações algébricas.

A proposição da resolução de problemas como tendência no ensino, que tem tido ressonância no Brasil em documentos curriculares importantes como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997 e 1998), é também uma consideração que encontramos no artigo de Katz (2007), explícita nos comentários desenvolvidos por Bill Barton, pesquisador da Nova Zelândia. No que diz respeito à álgebra, Barton destaca que historicamente o campo não foi motivado por uma necessidade abstrata de generalizar a aritmética, mas pela necessidade de resolver problemas particulares, tanto do mundo real quanto das investigações matemáticas. Assim, faz sentido ponderar que uma base de resolução de problemas pode ser muito útil para a educação algébrica, contribuindo para a superação de barreiras que a álgebra parece representar para muitos estudantes. Nas palavras de Barton

Ainda que a álgebra tenha se transformado, no decorrer das etapas mais recentes da história, em uma ferramenta poderosa para descrever e usar sistemas matemáticos, a maioria das pessoas nunca precisará interagir com ela nesse papel. Assim, colocar a álgebra essencialmente como generalização matemática durante a escolarização obrigatória provavelmente não será muito útil, e até agora não tem sido algo bem sucedido pedagogicamente. [...] Isso não significa ignorar a necessidade de que a álgebra escolar seja transformada, em níveis mais adiantados, no estudo e uso dos sistemas matemáticos e axiomáticos. Mas, como a história nos ensina, uma introdução por meio da resolução de problemas é consistente com esse desenvolvimento (KATZ, 2007, p. 199).

Queremos ainda dizer algumas palavras especiais em relação ao primeiro conjunto de estágios, referentes ao desenvolvimento da linguagem algébrica. Aqui, trata-se de prestar atenção ao fato de que a fase simbólica representa a última de um longo processo e retomar a ideia enfatizada por Puig e Rojano de que essa etapa, consolidada a partir do século XVII, possibilitou operar com um sistema de signos sem ter que se recorrer a sua tradução para a linguagem comum, ou seja, sem associar esses signos a situações e contextos de referência. Carmen Gómez-Granell (1997) salienta, como já dissemos, a presença de dois tipos de tendências no ensino — as sintáticas e as semânticas. Nas primeiras, predominam os aspectos sintáticos e o ensino da matemática se baseia muito mais na manipulação de símbolos e regras do que no significado dos mesmos; nas segundas, dá-se prioridade ao estudo dos aspectos conceituais da matemática e o que se considera importante é que os alunos entendam ou construam o significado das operações e dos conceitos. Nesse segundo tipo, considera-se que as crianças, desde muito cedo, apresentam procedimentos e formas próprias de raciocínio, de caráter não formal, diferentes daqueles da matemática escolar, que lhes permitem ir construindo progressivamente os significados matemáticos, e que devem ser potencializados nas práticas pedagógicas. Ao mesmo tempo, nessas tendências, atribui-se um papel secundário à linguagem e chega-se a pensar que, uma vez que entendam o significado dos procedimentos e conceitos matemáticos, os alunos não terão dificuldade em dominar a linguagem formal. Acreditar-se-ia, nessas tendências, portanto, que a aprendizagem da linguagem simbólica ocorreria automaticamente.

Mostram os estudos, porém, que isso não acontece, e desse modo, tanto as tendências sintáticas quanto as semânticas têm aspectos desfavoráveis: as primeiras, porque os símbolos são manipulados de acordo com regras não compreendidas, o que torna difícil usá-los para resolver problemas de forma significativa; as segundas, porque a compreensão mediante o uso de procedimentos intuitivos e situações concretas não garante o acesso às regras sintáticas e às convenções de notação próprias do simbolismo matemático. Torna-se necessário integrar ambas as tendências, pois, como ocorre em qualquer linguagem, dominar a linguagem matemática requer conhecer seus aspectos sintáticos e semânticos. A história nos mostra o longo tempo necessário para o amadurecimento da forma de expressão das ideias algébricas até o simbolismo e as regras da terceira e última fase. São esses símbolos e essas regras que desejamos que os alunos da escola básica aprendam para avançar em seus conhecimentos. Afinal, acreditamos que conhecer matemática e especialmente álgebra “implica dominar os símbolos formais independentemente de situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e então usá-los nas situações e problemas que assim o requirem” (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 274).



Muitas pesquisas vêm sendo feitas ligando história e ensino da álgebra e muito ainda precisa ser realizado para que conheçamos mais profundamente o tema de modo a podermos dispor de instrumentos mais diretos que auxiliem o professor em sala de aula. Não pretendíamos, como dissemos, trazer, com este artigo, aportes imediatos para o trabalho dos professores da educação básica. Contudo, esperamos que as ideias aqui esboçadas possam propiciar reflexões que contribuam para o aperfeiçoamento do trabalho desses docentes.

## **Referências**

- BELL, E. T. **Historia de las Matemáticas**. Cidade do México: Fondo de Cultura Económica, 1996.
- BOYER, C. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006 (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Disponível em <http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 20 março 2011.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1998.
- DIDEROT, D. & D'ALEMBERT, J. **Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Metiers**. T. I : Par une Societé des Gens de Lettres. Paris : Briasson, David, Lebreton, Durand, 1751. Disponível em <http://gallica.bnf.fr> (Acesso em 13/03/2011).
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Eds.) **History in Mathematics Education**. The ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Press, 2000.
- FIorentini, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1 (10), p. 78–91, 1993.
- GOETHE, J. W. Máximas e reflexões. In: GOETHE, J. W. **Obras completas**. Recopilación, traducción, estudio preliminar, preámbulos y notas de Rafael Cansino Assens. Madrid: Aguillar, 1974.
- GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (orgs.). **Além da alfabetização:**



- a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática.** São Paulo: Ática, 1997, p. 257–282.
- IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **Matemática.** 7ª série. São Paulo: Scipione, 1997.
- KATZ, Victor. Stages in the history of algebra with implications for teaching. **Educational Studies in Mathematics.** 66: 185–201, 2007.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História e Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- POLCINO MILIES, F. C. **Breve história da álgebra abstrata.** Salvador: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em [www.bienasbm.ufba.br/M.18.pdf](http://www.bienasbm.ufba.br/M.18.pdf). Acesso em 10 março 2011.
- PUIG, L. Componentes de uma historia del álgebra. El texto de al-Khwârisimî restaurado. In: HITT, F. (ed.). **Investigaciones em matemática educativa II.** México, D. F.: 1998. Grupo Editorial Iberoamérica, p. 109–131.
- PUIG, L. History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) **Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education.** CD-version. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, 2008. Disponível em <http://www.uv.es/puigl/textos.htm>. Acesso em 17 jun. 2011.
- PUIG, L.; ROJANO, T. The history of algebra in mathematics education. In: STACEY, K.; CHICK, H.; and KENDAL, M. (eds.). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra.** Boston: Kluwer, 2004, p. 189–223.
- REIS, A.; REIS, L. **Curso Elementar de Mathematica – Theorico, pratico e applicado. Aritmética. Cálculo dos valores.** Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1892.
- REIS, A. **Curso Elementar de Matemática. II. Álgebra** (Cálculo das Formações Diretas). 2ª ed. 2 v. Rio de Janeiro/Paris: Garnier, 1914.
- SCHUBRING, G. Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning: epistemology, history and semiotics intersecting. **Educational Studies in Mathematics.** Published online: 08 March 2011. Disponível em [www.springerlink.com](http://www.springerlink.com). Acesso em 23 março 2011.
- STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The Future of the Teaching and the Learning of Algebra.** Boston: Kluwer, 2004.

Submetido em março de 2011.

Aprovado em junho de 2011.