A Existência da *Sequência de Fibonacci* no Campo dos Inteiros: Uma Atividade de Investigação Apoiada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*

Francisco Regis Vieira Alves
Professor, IFCE
fregis@ifce.edu.br

Hermínio Borges Neto
Professor, UFC
herminio@ufc.br

Resumo
Nesta seção descrevemos uma atividade para sala de aula que caracteriza a possibilidade de se definir a sequência de Fibonacci $\{f_n\}_{n\in ¢}$ no campo dos inteiros. Assim, chamamos de *sequencia estendida de Fibonacci* e, descrevemos nossa mediação a partir dos pressupostos de uma metodologia de ensino conhecida no Ceará como *Sequência Fedathi*.

Palavras-chave: Sequencia de Fibonacci. Sequencia Fedathi. Sequencia estendida de Fibonacci.

A Existência da *Sequência de Fibonacci* no Campo dos Inteiros: Uma Atividade de Investigação Apoiada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*

Abstract
In this section we describe an activity for the classroom that features the ability to define the Fibonacci sequence $\{f_n\}_{n\in ¢}$ in the integers field. Thus, we call the extended Fibonacci sequence, and describe our mediation form the assumptions of a teaching methodology know as Sequencia Fedathi in Ceará.

Keywords: Fibonacci´s sequence. Sequencia Fedathi. Extended. Fibonacci´s sequence.

Introdução

Esta atividade foi elaborada por nós e pode ser aplicada no âmbito da disciplina de História da Matemática. Ancoramos nossa abordagem na metodologia de ensino nomeada *Sequência Fedathi* – SF que, segundo Borges Neto et al (2001, p. 592), prevê um “clima experimental de investigação em sala de aula, semelhante ao processo de identificação, compreensão e solução um problema, por parte de um matemático profissional”.

Assim, a situação inicial envolve a apresentação de um problema relacionado com a noção da *possibilidade da descrição de uma definição formal para um objeto matemático e se pretende discutir sua existência*. Destarte, ancorando nossa mediação nestes e outros pressupostos descritos pela SF, a atividade que pode ser proposta em sala de aula é a seguinte: sabemos que uma *sequência* em ° é definida por *xn* : • → °.

n a *xn*

De modo particular, definimos a seguinte sequência descrita de modo recursivo, caracterizada por

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_3 = 1 + 1 = 2 \\ f_4 = 1 + 2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_5 = 2 + 3 \\ \dots \\ \dots \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \ \forall \ n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{(a).}$$

Esta sequência é emblemática e merece alguns comentários adicionais. Neste sentido, recordamos que Leonardo de Pisa (1180–1250), mais conhecido como Fibonacci, é considerado o matemático mais capaz e original do Ocidente no período medieval. Sua obra mais famosa é chamada o livro *Líber Abaci* de 1202 (DOMINGUES,1991, p. 73).

Domingues (1991, p. 74) explica que, “provavelmente, para amenizar leitura do Livro do Ábaco, ou torná-la mais interessante”, Fibonacci incluiu no livro alguns problemas curiosos e estimulantes, dentre os quais, um veio a se tornar especial: “Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?”.

O problema da modelização da produção de coelhos é bastante divulgado na literatura, entretanto, a exploração de um problema, por parte do professor de Matemática, influenciado pelos fundamentos assumidos na SF, não orienta a explicitação imediata do mesmo. De modo sistemático, seguimos as etapas:

Fase 1 *Tomada de posição – apresentação do problema*.

Na perspectiva do professor, devem ser claras as ideias principais relacionadas com o problema. No que se refere aos alunos, faz parte do seu papel a descoberta/

identificação de um problema relevante. Assim, podemos questionar os alunos sobre as propriedades que podemos inferir da relação $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $\forall$ n $\geq$ 2. De modo particular, podemos propor as possibilidades de se avaliar f_0 = ? ou f_{-1} = ?. Esta fase inicial deve proporcionar o debate em sala de aula e os alunos têm a possibilidade de concluir que: $f_0 = 0$ e devem fornecem a justificativa $f_{1+1} = f_1 + f_{1-1}$ p/n = 1, segue que $f_2 = f_1 + f_0 \therefore f_0 = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$. Paulatinamente, os alunos têm a possibilidade de concluir também que $f_{0+1} = f_0 + f_{0-1}$ p/n = 1 $\therefore f_1 = f_0 + f_{-1} \leftrightarrow f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$.

Dando prosseguimento a esta manipulações algébrico-aritméticas, podemos inferir ainda que: $f_{-1+1} = f_{-1} + f_{-1-1}$ p/n = –1 $\therefore f_0 = f_{-1} + f_2$, segue que $f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = 1$. A mediação do professor evolui com ênfase no raciocínio indutivo. Na próxima fase, explicitamos o problema em foco.

Fase 2 *Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema*.

Nesta fase, os alunos são estimulados à identificação das variáveis mais pertinentes, ou melhor, dizendo, os elementos invariantes desta situação. Mas a partir da fase anterior, podemos orientar a construção das tabelas

$$\begin{cases} f_{-3} = 2 = f_{-1} - f_{-2} \\ f_{-4} = -3 = f_{-2} - f_{-3} \\ f_{-5} = 5 = f_{-3} - f_{-4} \\ f_{-6} = -8 = f_{-4} - f_{-5} \\ f_{-7} = 13 \\ ???? \end{cases} \quad \text{(b).}$$

E o problema principal que se coloca é a *possibilidade de generalização deste processo recursivo da sequência* obtida acima. Os alunos devem elaborar conjecturas a respeito do comportamento dos símbolos f_{-2n} e $f_{-(2n+1)}$ que descrevem os termos "pares" e "ímpares". Mas podemos relacionar as relações (a) e (b) do seguinte modo:

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = f_1 \\ f_{-2} = -1 = -f_2 \\ f_{-3} = 2 = f_3 \\ f_{-4} = -3 = -f_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{-5} = 5 = f_5 \\ f_{-6} = -8 = -f_6 \\ f_{-7} = 13 = f_7 \\ \dots \end{cases}$$

E ainda que

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \text{ p/n} = 1 \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \text{ p/n} = 2 \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \text{ p/n} = 3 \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \text{ p/n} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \\ f_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot f_6 \\ f_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot f_7 \\ \dots \end{cases}$$

A partir destas relações, o docente estimula a conjectura da seguinte propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$. Outra propriedade que é estimulada à descoberta refere-se às relações de recorrência que exibimos na figura 1. Nela explicitamos relações aritmético-algébricas de uma nova entidade conceitual, que denotamos por $(f_{-n})_{n\in \bullet}$ e que, caracterizada pela relação $f_{-n} - f_{-(n+1)} = f_{-(n+2)}$ ou $f_{-n} = f_{-(n+1)} + f_{-(n+2)}$, para $n \in \bullet$. A partir disto, definimos a "*sequência estendida de Fibonacci*".

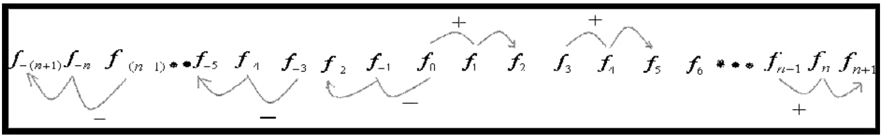

Figura 1: Relações de recorrência entre os elementos da *Sequência de Fibonacci* estendida.

Fase 3 *Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema*.
Neste momento podemos demonstrar por *Indução Matemática* que $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, $\forall\ n \geq 0$. Para tanto, definiremos o conjunto $\wp := \{n \in \bullet \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\}$ ou o conjunto $\wp := \{-n \in ¢ \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\}$ e já verificamos há pouco que $\{1, 2, 3\ \ldots, 7\} \subset \wp$. Usando a *hipótese indutiva* $n \in \wp$, nos resta verificar que $n+1 \in \wp$. Mas o método de demonstração por indução nos assegura que se pode escrever $f_{-(n-1)} = (-1)^{(n-1)+1} \cdot f_{n-1} = (-1)^n \cdot f_{n-1}$. Vejamos agora o comportamento de $f_{-(n+1)} = f_{-(n-1)} - f_{-n} = (-1)^n \cdot f_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^n \cdot f_{n-1} + (-1)^n \cdot f_n = (-1)^n \cdot (f_{n-1} + f_n) = (-1)^n \cdot f_{n+1}$. Por fim, concluímos que $f_{-(n+1)} = (-1)^n \cdot f_{n+1} = (-1)(-1)(-1)^n \cdot f_{n+1} = (-1)^{(n+2)} \cdot f_{n+1}$.

Um problema que podemos levantar aos estudantes diz respeito ao emprego do modelo de *Indução Matemática* aplicado ao campo dos inteiros negativos. Outro problema importante diz respeito à possibilidade matemática de definição de um novo objeto matemático (questão axiológica) e a verificação de sua *existência* (questão ontológica) Na próxima fase, indicamos uma abordagem que evita os problemas conceituais que deparamos em virtude do uso inadequado do método de *Indução*.

Fase 4 *Prova – formalização do modelo matemático a ser ensinado*.
Nos momentos finais de sua mediação, o professor deve explicitar e indicar as principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores. Aqui, na perspectiva da SF, exploramos a generalização do modelo matemático e evitamos o emprego da *Indução Matemática*.

Verificamos formalmente que $f_{-2n} = -f_{-2n} \leftrightarrow f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para $n \in \bullet$. Contudo, as relações estabelecidas na fase anterior, sugerem a relação de uma *sequência recursiva* $f_{-(n-1)} - f_{-n} = f_{-(n+1)} \leftrightarrow f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$ para $n \in \bullet$ ou ainda $f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$ (ver fig. 1). Notamos ainda que as relações $f_{-2n} = -f_{2n}$ e $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para $n \in \bullet$ de algum modo se relacionam. Neste sentido, vamos admitir provisoriamente que seja válida a seguinte relação $f_{2n+1}=f_{-(2n+1)}$. Mas desde que, a partir da relação de recorrência, escrevemos, substituindo ‘n’ por ‘2n’, que $f_{-(2n-1)}=f_{-(2n)}+f_{-(2n+1)}\leftrightarrow f_{(2n-1)}=f_{-(2n)}+f_{(2n+1)}\therefore f_{(2n-1)}-f_{(2n+1)}=f_{-(2n)}$ (c). Por outro lado, usando a relação clássica da *sequencia de fibonacci*, consideramos $f_{2n+1}=f_{2n}+f_{2n-1}\therefore f_{2n-1}-f_{2n+1}=-f_{2n}$ (d). Segue que de (c) e de (d) $-f_{2n}=f_{(2n-1)}-f_{(2n+1)}=f_{-(2n)}\leftrightarrow f_{-2n}=-f_{2n}$.

De modo análogo, assumimos provisoriamente que $f_{-2n}=-f_{2n}$ e verificamos que $f_{-(2n+1)}=f_{2n+1}$. De fato, substituindo (2n–1) na fórmula $f_{-(n-1)}=f_{-n}+f_{-(n+1)}$, obtém-se que $f_{-(2n-1-1)}=f_{-(2n-1)}+f_{-(2n-1+1)}\therefore f_{-(2n-2)}=f_{-(2n-1)}+f_{-2n}$. Agora, escrevendo $-f_{(2n-2)}+f_{2n}=f_{-(2n-2)}-f_{-2n}=f_{-(2n-1)}$. Segue que $f_{-(2n-1)}=f_{2n}-f_{(2n-2)}$, e usando a lei de recorrência clássica, estabelecemos no final que $f_{2n-2}+f_{2n-1}=f_{2n}\therefore f_{2n-1}=f_{2n}-f_{2n-2}$. Consequentemente $f_{2n-1}=f_{2n}-f_{2n-2}=f_{-(2n-1)}\leftrightarrow f_{2n-1}=f_{-(2n-1)}$. A partir deste raciocínio, evitamos a aplicação do modelo de *Indução Matemática* aos índices de . Assim, podemos descrever a sequência $\{f_n\}_{n\in ¢}$.

Considerações e recomendações

Esta atividade que pode ser proposta em sala de aula apresenta dois aspectos que merecem ser ressaltados. O primeiro diz respeito aos resultados inesperados que obtivemos à respeito de uma sequência que permite, por meio de uma regra, calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(a) (inclusive em ¢). A *sequência de Fibonacci* é recursiva (LIMA, 2000, p. 65), assim, usando a relação recursiva, muitas das conjecturas formuladas nas fases da SF foram apoiadas no *raciocínio indutivo*, o que difere do emprego do método de demonstração por *Indução*.

Outro aspecto que se sobressai, diz respeito à possibilidade de definirmos um novo objeto conceitual e verificarmos sua existência. Vale destacar que alguns lógicos afirmam que devemos definir apenas coisas existentes, todavia, Kennedy (1973, p. 239) menciona que “Mill iniciou a partir de uma definição de algo que não existe e supôs sua existência, chegando a um resultado absurdo. Porém, a absurdez deriva do fato da suposição de existência de algo definido, e não do fato de se ter definido algo que não existe.” (KENNEDY, 1973, p. 239). Assim, na apresentação desta atividade, assumimos a posição segundo a qual podemos definir o objeto matemático que neste escrito chamamos de “*sequência estendida de Fibonacci*”. Sua existência poderá ser questionada na medida em que deparamos alguma inconsistência, todavia, outros trabalhos (ALVES & BORGES NETO, 2010), nos informam que não há inconsistências. Destacamos o caráter de sua originalidade, na medida em que identificamos a escassez de trabalhos que sugerem exploração similar em sala de aula.

Referências

ALVES, Francisco. R. V. & BORGES NETO. Hermínio. **Sequências de Fibonacci e de Lucas: Uma aplicação da Sequência Fedathi**. In: V Colóquio de História e Tecnologia do Ensino da Matemática. Recife, 2010, p. 1-10. Disponível em: http://www.gente.eti.br/htem5/

BORGES NETO, Hermínio. et al. **A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**, XV EPENN – Encontro de Pesquisa Educacional Do Nordeste, São Luis, 2001, p. 590-609.

DOMINGUES. Hygino. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Edit. Atual, 1991.

LIMA, Elon. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, v. 2. 2000.

KENNEDY, Hubbert. C. **Selected works of Giuseppe Peano**. London: George Allen & Unwin Ltd, 1973.

Submetido em outubro de 2011
Aprovado em dezembro de 2011