http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.008

# Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno?[1]

## *Why is teaching with problem solving important to student learning?*[2]

**Jinfa Cai e Frank Lester**
Editor da Série: **Judith Reed Quander**

Tradução
**Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos**
Professor, UNINOVE
Mestre, Universidade Cruzeiro do Sul / SP
a.abrahao@gmail.com

**Norma Suely Gomes Allevato**
Professora, Universidade Cruzeiro do Sul / SP
normallev@uol.com.br

1 Trabalho traduzido e reimpresso com a permissão de http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=25713, direitos autorais do National Council of Teachers of Mathematics. Todos os direitos reservados. NCTM não é responsável pela precisão ou qualidade desta tradução.
2 As visões expressas ou implícitas nesta publicação, salvo indicação em contrário, não devem ser interpretadas como posição oficial do NCTM. Copyright © 2010 pelo National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191 – 1502. Tel: (703)620-9840, Fax: (703)476-2690, www.nctm.org. Disponível em http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=25713. Acesso em 24 jan. 2012. Autorização do NCTM para tradução e publicação feita em 29/02/2012.

A Resolução de problemas desempenha um papel importante na matemática e deveria ter um papel proeminente na educação matemática dos estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio. No entanto, saber como incorporar a resolução de problemas de forma significativa no currículo de matemática não é necessariamente óbvio para professores de matemática. (O termo "resolução de problemas" refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais para melhorar o entendimento e desenvolvimento matemático dos estudantes). Felizmente, uma quantidade considerável de pesquisas sobre ensino e aprendizagem envolvendo resolução de problemas matemáticos tem sido conduzida durante os últimos 40 anos ou mais, sendo realizadas coletivamente; este corpo de trabalho oferece sugestões úteis tanto para professores como para elaboradores de currículo. O texto a seguir fornece algumas orientações sobre o ensino com a resolução de problemas, com base nessas pesquisas.

## Que tipos de atividades de resolução de problemas deveriam ser propostas aos alunos?

Problemas com enunciados ou palavras freqüentemente vêm à mente em uma discussão sobre resolução de problemas. No entanto, essa concepção de resolução de problemas é limitada. Alguns "problemas com enunciados" não são suficientemente problemáticos para os estudantes e, portanto, deveriam ser considerados apenas como exercícios para os alunos realizarem. Por exemplo, pode-se pedir aos alunos que encontrem o perímetro de um polígono, dado o comprimento de cada lado. Eles podem descuidadamente somar esses números e obter a resposta sem compreender o conceito de perímetro e a situação do problema. No entanto, alguns problemas sem enunciados podem ser problemas verdadeiros, tais como aqueles encontrados, por exemplo, nos jogos matemáticos.

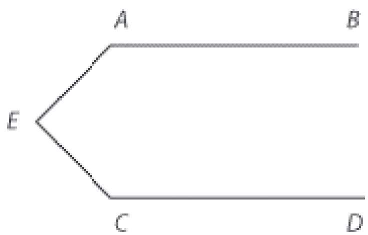
Em geral, quando os pesquisadores utilizam a expressão *resolução de problemas* eles estão se referindo a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos. Tais tarefas – isto é, problemas – podem promover o entendimento conceitual dos alunos, cultivar sua habilidade de raciocinar e se comunicar matematicamente, e despertar seu interesse e curiosidade (HIEBERT & WEARNE, 1993; MARCUS & FEY, 2003; NCTM, 1991; VAN DE WALLE, 2003). As pesquisas recomendam que os estudantes sejam expostos a tarefas verdadeiramente problemáticas, de modo que o fazer sentido matemático seja praticado (MARCUS & FEY, 2003; NCTM, 1991; VAN DE WALLE, 2003). Os problemas matemáticos que são verdadeiramente problemáticos e envolvem matemática significativa têm o potencial de fornecer os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos estudantes. No entanto, apenas "problemas que valem a pena" dão aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar o que eles sabem e estimular a aprendizagem de matemática. Dito isto, o que é um problema que vale a pena? Independentemente do contexto, as tarefas que valem a pena deveriam ser intrigantes e conter um nível de desafio que convide à especulação e trabalho árduo. Mais importante, as tarefas matemáticas que valem a pena deveriam orientar os alunos a investigarem idéias matemáticas importantes e modos de pensar na direção dos objetivos de aprendizagem (NCTM, 1991). Lappan e Phillips (1998) desenvolveram um conjunto de critérios para um bom problema, que eles usaram para desenvolver seu currículo de matemática do Ensino Fundamental II (Matemática Conectada), e tem havido algumas pesquisas que atestam a eficácia desse currículo em promover o entendimento conceitual dos alunos e a resolução de problemas (CAI, MOYER, WANG & NIE, no prelo). Embora não tenha havido nenhuma pesquisa focando especificamente a eficácia desse conjunto de critérios, o fato de que o currículo como um todo tenha se mostrado eficaz sugere que os professores possam querer observar esse conjunto ao escolherem, revisarem e elaborarem problemas. São os seguintes os critérios para caracterizar problemas que valem a pena:

1. O problema envolve matemática útil e importante.
2. O problema exige níveis mais altos de pensamento e resolução de problemas.
3. O problema contribui para o desenvolvimento conceitual dos alunos.
4. O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar o que seus alunos estão aprendendo e onde eles estão enfrentando dificuldades.
5. O problema pode ser abordado por estudantes de múltiplas maneiras usando diferentes estratégias de resolução.
6. O problema tem várias soluções ou permite diferentes decisões ou posições a serem tomadas e defendidas.
7. O problema encoraja o envolvimento e o discurso dos alunos.
8. O problema se liga a outras importantes idéias matemáticas.
9. O problema promove o uso habilidoso da matemática.
10. O problema proporciona uma oportunidade de praticar habilidades importantes.

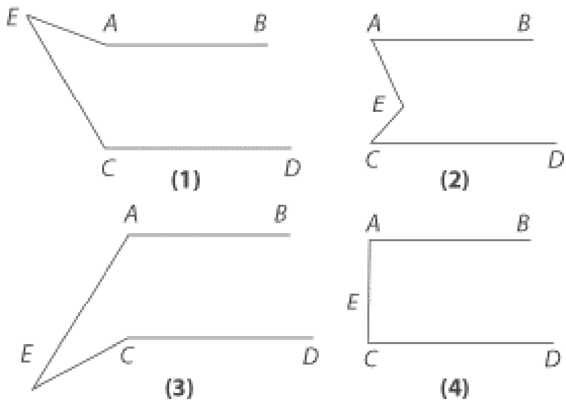
Certamente, não é razoável esperar que cada problema que um professor escolhe deva satisfazer todos os 10 critérios; os critérios a considerar devem depender dos objetivos instrucionais do professor. Por exemplo, alguns problemas são usados principalmente porque fornecem aos alunos uma oportunidade de praticar certa habilidade (critério 10), por exemplo, resolver uma proporção; enquanto outros são usados principalmente para incentivar os alunos a colaborarem uns com os outros e justificarem o seu pensamento (critérios 6 e 7). Mas os pesquisadores e elaboradores de currículo tendem igualmente a concordar que os quatro primeiros critérios (matemática importante, pensamento de nível mais alto, desenvolvimento conceitual e oportunidade de avaliar a aprendizagem) devem ser considerados essenciais na seleção de todos os problemas. Na verdade, esses quatro critérios podem ser considerados como a condição *sine qua non* dos critérios. O valor real desses critérios é que eles fornecem aos professores as diretrizes para a tomada de decisões sobre como tornar a resolução de problemas um aspecto central do seu ensino.

O papel dos professores é revisar, selecionar e desenvolver as tarefas que favoreçam o desenvolvimento do entendimento e o domínio dos procedimentos, de maneira que também promovam o desenvolvimento de habilidades para resolver problemas e raciocinar e de se comunicar matematicamente (NCTM, 1991). O exemplo a seguir ilustra como um professor pode modificar um problema de um livro didático padrão de uma forma que ambos envolvam os alunos na aprendizagem de matemática importante (critério 1) e também melhorem o desenvolvimento de suas habilidades de resolução de problemas (critérios 2, 3, 4 e 5).

**Exemplo.** Problema original (CAI & NIE, 2007) (nono ano do Ensino Fundamental e primeiro e segundo anos do Ensino Médio): Na figura abaixo, o segmento *AB* é paralelo ao segmento *CD.* Mostre que a soma das medidas dos ângulos *A, E* e C é 360º.




Este problema pode ser encontrado em qualquer livro didático padrão. Ele claramente envolve matemática importante, mas, na sua forma atual, os critérios 2, 3, 4 e 5 não estão tão claramente incluídos. Ao fazermos uma revisão bem modesta, podemos abrir o problema e, fazendo isso, aumentar a exigência cognitiva (critério 2) e também satisfazer os critérios 3 e 4. *Problema Revisado:* Qual é a soma das medidas dos ângulos *A, E* e *C?* Além disso, podemos pedir aos alunos para acharem a soma dos três ângulos de maneiras diferentes e fazer a generalização do problema perguntando: Qual é a soma das medidas dos três ângulos se o ponto *E está* em localizações diferentes (como mostrado nas figuras abaixo)?




Este exemplo ilustra que modificar problemas que já existem nos livros didáticos é, freqüentemente, relativamente fácil de fazer, mas aumenta a oportunidade de aprendizagem para os alunos. Na verdade, os problemas revisados não precisam ser complicados ou ter um formato sofisticado. Os leitores também podem ver (BUTTS, 1980) como revisar um problema para que seja mais problemático, de modo que aumente as oportunidades de aprendizagem dos alunos.

**A Resolução de problemas deveria ser ensinada como um tópico separado no currículo de matemática ou deveria ser integrada no currículo?**

Há pouca ou nenhuma evidência de que as habilidades de resolução de problemas dos alunos melhoram isolando a resolução de problemas da aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. Ou seja, a abordagem comum de ensinar primeiramente os conceitos e procedimentos, em seguida, propor problemas de "um passo" com "enunciados", destinados a praticar o conteúdo aprendido, e então, ensinar resolução de problemas como um conjunto de estratégias, tais como "desenhe uma gravura" ou "adivinhe e confirme" e, finalmente, se houver tempo, propor aos alunos problemas aplicados que exigirão a matemática aprendida na primeira etapa (LESH & ZAWOJEWSKI, 2007, p. 765), não é sustentada pela pesquisa. Na verdade, as evidências têm mostrado, ao longo dos últimos 30 anos, que tal abordagem não melhora as habilidades de resolução de problemas dos alunos, a tal ponto que hoje nenhuma pesquisa está sendo conduzida com essa abordagem como uma intervenção instrucional (por exemplo, BEGLE, 1973; CHARLES & SILVER, 1988; LESTER, 1980; SCHOENFELD, 1979). A implicação dessa mudança de perspectiva é que, se quisermos ajudar os estudantes a se tornarem solucionadores de problemas bem sucedidos, primeiramente precisaremos mudar nossa visão de resolução de problemas como um tema que é adicionado à instrução após os conceitos e habilidades terem sido ensinados. Uma alternativa é fazer com que a resolução de problemas seja parte integrante da aprendizagem da matemática. Essa alternativa, freqüentemente chamada de ensino através da resolução de problemas, adota a visão de que a conexão entre a resolução de problemas e a aprendizagem de conceitos é simbiótica (LAMBDIN, 2003): os alunos aprendem e entendem a matemática através da resolução de problemas matematicamente ricos, e as habilidades na resolução de problemas são desenvolvidas através da aprendizagem e entendimento de conceitos e procedimentos de matemática (SCHROEDER & LESTER, 1989).

No ensino através da resolução de problemas, a aprendizagem ocorre durante o processo da tentativa de resolver os problemas nos quais os conceitos e habilidades matemáticas relevantes estão incorporados (LESTER & CHARLES, 2003; SCHOEN & CHARLES, 2003). À medida que os alunos vão resolvendo os problemas, eles podem usar qualquer abordagem em que consigam pensar, extrair qualquer parte do conhecimento já aprendido e justificar suas idéias de maneira convincente. O ambiente de aprendizagem do ensino através da resolução de problemas oferece um cenário natural para os alunos apresentarem várias soluções do problema para o seu grupo ou classe e aprenderem matemática por meio de interações sociais, ou seja, negociação, e obter a compreensão compartilhada. Tais atividades ajudam os alunos a esclarecer suas idéias e adquirir diferentes perspectivas para o conceito ou idéia que estão aprendendo. Empiricamente, o ensino da matemática através de resolução de problemas ajuda os alunos a irem além da aquisição de idéias isoladas para desenvolverem cada vez mais um complexo e conectado sistema de conhecimento (por exemplo, CAI, 2003; CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA, & EMPSON, 1998; COBB et al 1991;. HIEBERT & WEARNE, 1993; LAMBDIN, 2003). O poder da resolução de problemas está em que a obtenção de uma solução bem sucedida exige dos alunos refinar, combinar e modificar o conhecimento que já aprenderam.

É importante ressaltar que não estamos dizendo que todas as tarefas com que os alunos se deparam devam ser problemáticas. Se o objetivo de uma aula é desenvolver e dominar certas habilidades, alguns exercícios são necessários. Além disso, como indicamos antes, os professores podem transformar os problemas menos problemáticos existentes em problemas "verdadeiros".

**Como os professores podem conduzir pedagogicamente a resolução de problemas de forma ativa em sala de aula?**

Escolher o problema ou tarefa é apenas uma parte do ensino com resolução de problemas. Há evidências consideráveis de que, mesmo quando os professores têm bons problemas, esses podem não ser implementados como pretendido. As reais oportunidades dos alunos de aprenderem dependem não só dos tipos de tarefas matemáticas que os professores colocam, mas também dos tipos de discurso em sala de aula que ocorrem durante a resolução de problemas, tanto entre professor e alunos como entre alunos. O discurso se refere às maneiras de representar, pensar, falar, concordar e discordar que os professores e os alunos usam para se engajarem nas tarefas de ensino. Existem evidências teóricas e empíricas consideráveis que sustentam a conexão entre o discurso de sala de aula e a aprendizagem dos alunos. O suporte teórico vem de ambas as perspectivas de aprendizagem construtivista e sociocultural (por exemplo, COBB, 1994; HATANO, 1988; HIEBERT et al, 1997). À medida que os estudantes explicam e justificam o seu pensamento e desafiam as explicações de seus colegas e professores, eles também se engajam em esclarecer o seu próprio pensamento, tornando-se donos do "saber" (LAMPERT, 1990). As evidências empíricas que sustentam as relações positivas entre os questionamentos de ordem superior dos professores e a aprendizagem dos alunos pode ser encontrada na obra de Hiebert e Wearne (1993) e de Redfield e Rousseau (1981).

Então, o que é considerado um discurso desejável no ensino da matemática? Para explorar essa questão, vamos comparar os dois episódios de ensino apresentados abaixo envolvendo professores do sétimo ano e seus alunos (THOMPSON, PHILIPP, THOMPSON, & BOYD, 1994). Os professores apresentaram o seguinte problema para suas classes:

> *Em algum momento no futuro, John terá 38 anos. Nessa época, ele terá três vezes a idade de Sally. Sally tem agora 7 anos de idade. Qual é a idade John agora?*

**Episódio de Ensino 1**

*P:* Vamos falar um pouco sobre este problema. Como é que você pensou sobre ele?

*E1:* Eu dividi 38 por 3 e obtive 12 $\frac{2}{3}$. Então, eu subtraí 7 de 12 $\frac{2}{3}$ e obtive 5 $\frac{2}{3}$. [Pausa] Então, eu subtraí isso de 38 e obtive 32 $\frac{1}{3}$. [Pausa] John tem 32 $\frac{1}{3}$.

*P:* Bom! [Pausa] Você pode explicar o que você fez com mais detalhes? Por que você dividiu 38 por 3?

*E1:* [Parecendo intrigado com a questão, E1 olha para seu trabalho. Ela olha novamente para o problema original.] Porque eu sabia que John é mais velho – 3 vezes mais velho.

*P:* Ok, e então, o que você fez?

*E1:* Então, eu subtraí 7 e obtive $5\frac{2}{3}$. [Pausa] Eu tirei isso de 38, o que me deu $32\frac{1}{3}$.

*P:* Por que você tirou $5\frac{2}{3}$ de 38**?**

*E1:* [Pausa] Para descobrir a idade de John.

*P:* Ok, e você obteve $32\frac{1}{3}$ para a idade de John. Isso é bom! [Pausa]

**Episódio de Ensino 2**

*P:* Vamos falar um pouco sobre este problema. Como é que você trabalhou as informações deste problema?

*E1:* Bem, você tem que começar dividindo 38 por 3. Então, você tira…

*P:* [Interrompendo] Espere! Antes de continuar, conte-nos sobre os cálculos que você fez, explique-nos por que você fez o que fez. (Pausa) O que você estava tentando encontrar?

*E1:* Bem, você sabe que John tem 3 vezes a idade de Sally, então você divide 38 por 3 para descobrir quantos anos Sally tem.

*P:* Vocês todos concordam com o pensamento do E1?

[Vários estudantes dizem “Sim”, outros balançam a cabeça.]

*E2:* Isso não vai dizer a você qual é idade de Sally agora. Vai dizer qual será a idade de Sally quando John tiver 38 anos.

*P:* É isso que você tinha em mente, E1?

*E1:* Sim.

*P:* [Para o resto da classe] O que representa o número 38?

*E2:* A idade de John no futuro.

*P:* Então, 38 não é a idade de John agora. É a idade de John no futuro. [Pausa] O problema diz que quando John chegar aos 38 anos, ele terá três vezes a idade de Sally. Isso significa "três vezes a idade que Sally tem agora" ou "3 vezes a idade que Sally terá quando John tiver 38"?

[Vários alunos respondem em uníssono: "Quando John tiver 38."]

*P:* Todos entenderam o raciocínio do E2? [Pausa]

Há uma série de semelhanças entre os dois episódios de ensino que Thompson e seus colegas analisaram. Por exemplo, ambos os professores iniciaram suas aulas com o mesmo problema e com orientações semelhantes. Ambos os professores levaram seus alunos a apresentarem justificativas para seus procedimentos de cálculo. No entanto, os dois episódios de ensino diferiram significativamente em termos de como os professores conduziram a discussão em sala de aula. Por exemplo, os alunos do Episódio de Ensino 2 começaram a dar explicações que foram fundamentadas em concepções sobre a situação (ou seja, em dar sentido à situação apresentada no problema). Em contrapartida, as explicações dadas pelos alunos no Episódio de Ensino 1 permaneceram estritamente procedimentais. Além disso, o Professor 1 foi menos persistente do que o Professor 2 em sondar o pensamento dos alunos. Ele aceitou as soluções que consistiam em seqüências de cálculo. O Professor 2 persistentemente sondou o pensamento dos estudantes sempre que as suas respostas eram lançadas em termos de números e operações. A análise mostra claramente que as tarefas matemáticas podem ser implementadas de forma diferente, dependendo da natureza do discurso de sala de aula (KNUTH & PERESSINI, 2001; SHERIN, 2000; SILVER & SMITH, 1996; THOMPSON et al, 1994).

Há uma série de fatores que podem influenciar a implementação de problemas que valem a pena nas salas de aula (por exemplo, HENNINGSEN & STEIN, 1997). Um dos fatores predominantes é a quantidade de tempo destinada a resolver e discutir o problema. Por exemplo, Rowe (1974) descobriu que o tempo médio que os professores esperaram entre fazer uma pergunta e, se nenhuma resposta fosse dada, fazê-la novamente foi de apenas 0,9 segundos. Um tempo de espera de menos de um segundo impediu a maioria dos alunos de participar da discussão em sala de aula. Conseqüentemente, não é de admirar que muitos estudantes acreditem que todos os problemas devem ser resolvidos com pouco ou nenhum pensamento

(LESH & ZAWOJEWSKI, 2007). Outra barreira importante para as experiências significativas de resolução de problemas é que os professores geralmente retiram os desafios de uma tarefa matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, e dizendo aos alunos como resolver o problema. Há evidências consideráveis de que muitos professores de matemática nos EUA acham que eles têm a responsabilidade de retirar o desafio (e o esforço) para os seus alunos quando estes estão envolvidos na resolução de problemas. Em seu estudo com alunos do oitavo ano que participaram do Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências (TIMSS), Smith (2000) percebeu que os professores nos EUA quase sempre intervieram para mostrar aos alunos como resolver os problemas que lhes haviam sido solicitados, deixando a matemática restante solicitada para eles bastante simples. Isto contrasta diretamente com os professores na Alemanha e no Japão, que propiciaram aos alunos oportunidades muito maiores para lutarem com as partes mais desafiadoras dos problemas. O esforço produtivo com idéias matemáticas complexas é crucial para a aprendizagem durante a resolução de problemas. Finalmente, os professores também são responsáveis por ouvir atentamente as idéias dos estudantes e pedir a eles que esclareçam e justifiquem suas idéias oralmente e por escrito, assim como monitorar sua participação nas discussões e decidir quando e como encorajar cada aluno a participar. As questões que os professores fazem são também cruciais para a boa condução do discurso da sala de aula (RASMUSSEN, YACKEL, & KING, 2003; STEPHAN & WHITENACK, 2003).

**Conclusão**

Para ajudarem os alunos a se tornarem eficientes solucionadores de problemas, os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas freqüentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula. Os estudantes também devem acreditar na importância de se engajarem regularmente em atividades desafiadoras (LESTER, 1994; WILLOUGHBY, 1990).

Desenvolver as habilidades dos alunos em resolver problemas não é apenas uma parte fundamental da aprendizagem matemática em todas as áreas de conteúdos, mas também uma parte integrante da aprendizagem matemática através dos níveis de escolaridade. Iniciando na pré-escola, os alunos devem receber um ensino de matemática de uma forma que favoreça a compreensão dos conceitos e procedimentos da matemática e da resolução de problemas. De fato, há fortes evidências de que mesmo estudantes muito jovens são bastante capazes de explorar situações-problema e inventar estratégias para resolver problemas (por exemplo, BEN-CHAIM et al, 1998; CAI, 2000; CARPENTER et al, 1998; KAMII & HOUSMAN, 1989; MAHER & MARTINO, 1996; RESNICK, 1989). No entanto, os alunos não conseguem se tornar bons solucionadores de problemas da noite para o dia. Ajudar os estudantes a se tornarem eficientes solucionadores de problemas deve ser um objetivo instrucional a ser atingido a longo prazo; portanto, devem ser feitos esforços para atingir esse objetivo em cada nível de escolaridade, em cada tópico matemático e em cada aula.

Pesquisas sugerem claramente que a resolução de problemas não deve ser ensinada como um tópico separado no currículo de matemática. De fato, elas mostram que ensinar os alunos a usarem estratégias gerais de resolução de problemas surte pouco efeito no seu sucesso como bons resolvedores de problemas. Assim, a resolução de problemas deve ser ensinada como uma parte integrante da aprendizagem matemática, exigindo um compromisso significativo no currículo em cada nível de escolaridade e em cada tópico matemático. Além de fazerem da resolução de problemas um compromisso no currículo de matemática, os professores precisam ser estratégicos ao selecionarem tarefas apropriadas e conduzirem o discurso de sala de aula para maximizarem as oportunidades de aprendizagem. Em particular, os professores devem envolver os alunos em uma variedade de atividades de resolução de problemas, como: (a) encontrar múltiplas estratégias de resolução para um dado problema; (b) engajar-se na exploração matemática; (c) dar justificativas para suas soluções e; (d) fazer generalizações. Focar na resolução de problemas em sala de aula não só causa impacto no desenvolvimento das habilidades de pensamento de ordem superior dos alunos, mas também reforça atitudes positivas. Finalmente, não há evidências de que devamos nos preocupar com que os estudantes sacrifiquem suas habilidades básicas se os professores focarem no desenvolvimento das suas habilidades matemáticas de resolver problemas.

**Referências**

BEGLE, E. G. Some lessons learned by SMSG. **Mathematics Teacher**, 66, p. 207-214. 1973.

BEN-CHAIM, D.; FEY, J. T.; FITZGERALD, W. M.; BENEDETTO, C.; MILLER, J. Proportional reasoning among 7th-grade students with different curricular experiences. **Educational Studies in Mathematics**, 36, p. 247-273. 1998.

BUTTS, T. Posing problems properly. In: S. Krulik and R. E. Reyes (Eds.), **Problem solving in school mathematics.** Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics. p. 23-33. 1980.

CAI, J. Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving process-constrained and process-open problems. **Mathematical Thinking and Learning**: An International Journal, 2, p. 309-340. 2000

CAI, J. What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.), **Research and issues in teaching mathematics through problem solving.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 241-254. 2003

CAI, J.; NIE, B. Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. **ZDM**, 39, p. 459–473. 2007.

CAI, J.; MOYER, J. C.; WANG, N.; NIE, B. (In press). The development of middle school students' algebraic thinking: A longitudinal study. In: J. Cai & E. Knuth (Eds.), **Early algebraization:** Cognitive, curricular, and instructional perspectives**.** New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2011.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L.; JACOBS, V. R.; FENNEMA, E.; EMPSON, S. B. A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, 29, p. 3–20. 1998.

CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **Research agenda for mathematics education: The teaching and assessing of mathematical problem solving.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, and Hillsdale, NJ: Erlbaum. 1988.

COBB, P. (Ed.). **Learning mathematics**: Constructivist and interactionist theories of mathematical development. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. (1994)

COBB, P.; WOOD, T.; YACKEL E.; NICHOLLS, J.; WHEATLEY, G.; TRIGATTI, B.; PERLWITZ, M. Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. **Journal for Research in Mathematics Education,** 22, p. 3–29. 1991.

HATANO, G. Social and motivational bases for mathematical understanding. In: G. B. Saxe & M. Gearhart (Eds.), **Children's Mathematics.** New Directions for Child Development. San Francisco: Jossey Bass. p. 55-70. 1988.

HENNINGSEN, M. A.; STEIN, M. K. Mathematical tasks and students' cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, 28, p. 524-549. 1997.

HIEBERT, J.; WEARNE, D. Instructional task, classroom discourse, and students' learning in second grade. **American Educational Research Journal**, 30, p. 393-425. 1993.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; FUSON, K. C.; Wearne, D.; MURRAY, H.; et al. **Making sense:** Teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann. 1997.

KAMII, C. K.; HOUSMAN, L. B. **Young children reinvent arithmetic**: Implications of Piaget's theory**.** New York: Teachers College Press. 1989.

KNUTH, E. J.; PERESSINI, D. D. Unpacking the nature of discourse in mathematics classrooms. **Mathematics Teaching in the Middle School**, 6, p. 320-325. 2001.

LAMBDIN, D. V. Benefits of teaching through problem solving. In: Frank K. Lester, Jr., & R. I. Charles (Eds.), **Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-grade 6**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 3-13. 2003.

LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. **American Educational Research Journal**, 27, p. 29-63. 1990.

LAPPAN, G.; PHILLIPS, E. Teaching and learning in the Connected Mathematics Project. In: L. Leutzinger (Ed.), **Mathematics in the middle**. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. p. 83-92. 1998.

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. S. Problem solving and modeling. In: F. K. Lester, Jr., (Ed.), **The handbook of research on mathematics teaching and learning, 2nd**

**ed**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, and Charlotte, NC: Information Age. p. 763-804. 2007.

LESTER, F. K., Jr. Research on mathematical problem solving. In: R. J. Shumway (Ed.), **Research in mathematics education.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 286-323. 1980.

LESTER, F. K., Jr. Musings about mathematical problem solving research: 1970-1994. **Journal for Research in Mathematics Education** (Special Issue), 25, p. 660-675. 1994.

LESTER, F. K., Jr.; CHARLES, R. I. (Eds.). **Teaching mathematics through problem solving**: Pre-K–grade 6. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2003.

MAHER, C. A.; MARTINO, A. M. The development of the idea of mathematical proof: A five-year case study. **Journal for Research in Mathematics Education**, 27, p. 194–214. 1996.

MARCUS, R.; FEY, J. T. Selecting quality tasks for problem-based teaching. In: **H**. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), **Teaching mathematics through problem solving:** Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 55-67. 2003.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). **Professional standards for teaching mathematics.** Reston, VA: Author. 1991

RASMUSSEN, C.; YACKEL, E.; KING, K. Social and sociomathematical norms in the mathematics classroom. In: H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), **Teaching mathematics through problem solving:** Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 143–154. 2003.

REDFIELD, D. L.; ROUSSEAU, E. W. A meta-analysis of experimental research on teacher questioning behavior. **Review of Educational Research**, 51, p. 237-245. 1981

RESNICK, L. B. Developing mathematical knowledge. **American Psychologist**, 44**,** p. 162-169. 1989.

ROWE, M. B. Wait-time and rewards as instructional variable, their influence on language, logic, and fate control: Part one–wait time. **Journal of Research in Science Teaching**, 11*,* p. 81-94. 1974.

SCHOEN, H. L.; CHARLES, R. I. (Eds.). **Teaching mathematics through problem solving:** Grades 6–12**.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2003.

SCHOENFELD, A. H.. Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, 10, p**.** 173-187. 1979.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Jr. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: P. R. Trafton (Ed.), **New directions for elementary school mathematics,** 1989 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Reston, VA: NCTM. p. 31–42. 1989.

SHERIN, M. G. Facilitating meaningful discussions about mathematics. **Mathematics Teaching in the Middle School**, 6, p.186-190. 2000.

SILVER, E.; SMITH, M. Building discourse communities in mathematics classrooms: A challenging but worthwhile journey. In: P. C. Elliott (Ed.), **Communication in mathematics,** K-12 and beyond**,** 1996 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Reston, VA: NCTM. p. 20-28. 1996.

SMITH, M. **A comparison of the types of mathematics tasks and how they were completed during eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States**. Ph.D. diss., University of Delaware. 2000.

STEPHAN, M.; WHITENACK, J. Establishing classroom social and sociomathematical norms for problem solving. In: F. K. Lester, Jr., & R. I. Charles (Eds.), **Teaching mathematics through problem solving:** Prekindergarten-grade 6. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 149-162. 2003.

THOMPSON, A. G.; Philipp, R. A.; Thompson, P. W; Boyd, B. A. Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In: D. B. Aichele & A. F. Coxford (Eds.), **Professional development for teachers of mathematics,** 1994 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Reston, VA. p. 79–92. 1994.

VAN DE WALLE, J. A. Designing and selecting problem-based tasks. In: F. K. Lester, Jr., & R. I. Charles (Eds.), **Teaching mathematics through problem solving:** Prekindergarten-grade 6. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 67-80. 2003.

WILLOUGHBY, S. S. **Mathematics education for a changing world.** Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.1990.

Submetido em março de 2011
Aprovado em maio de 2012